

Matematika A4

IV. gyakorlat

Vetier András kurzusa

2006. október 5.

1. Poisson eloszlás

Ha az X valószínűségi változó a $0, 1, 2, \dots$ értékeket veheti fel és

$$P(X = k) = p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

ahol $\lambda > 0$ egy tetszőleges valós szám, akkor X eloszlását λ paraméterű Poisson-eloszlásnak nevezzük. Várható értéke λ .

Feladatok:

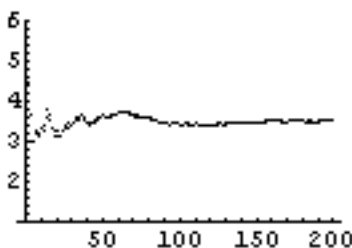
1. Egy kollégiumban egy év alatt 0.1%-os valószínűséggel üt ki tűz. Mennyi a valószínűsége, hogy 5 év alatt legalább 1 tüzeset van? (Számoljuk ki az eddig tanult módszerekkel, és a Poisson eloszlás segítségével is!)
2. Feltéve, hogy a balkezesek aránya átlagosan 1%, becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy 200 véletlenszerűen kiválasztott ember között legalább négy balkezes van.
3. Sok év statisztikája áll rendelkezésünkre arra nézve, hogy naponta hány lakástűz volt Budapesten. A napi négyes gyakoriság ugyanolyan valószínűséggel fordul elő, mint az ötös gyakoriság. Becsülje meg, hogy a napok körülbelül hány százalékában fordul elő a kettes gyakoriság.
4. Átlagosan hány szem mazsolának kell lennie egy sütiben ahhoz, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott sütiben 99%-os valószínűséggel legyen (legalább egy szem) mazsola?
5. Egy 400 oldalas könyvben összesen 200 sajtóhiba van (véletlenszerűen elszórva). Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 13. oldalon több, mint egy sajtóhiba van?
6. Háromszor olyan valószínű, hogy egy évben két ember öli magát a Dunába, mint az, hogy 5.
 - a) Mire tippel, hány ember öli magát a Dunába egy évben?
 - b) Mi a valószínűsége, hogy senki nem lesz így öngyilkos?
 - c) Átlagosan hány ember választja az öngyilkosságnak ezt a módját?
7. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ha 4 000 000 lottószelvényt véletlenszerűen és egymástól függetlenül kitöltenek, ezek között pontosan k db öttalalatos szelvény lesz?
8. A kocogj velünk mozgalom keretében tavaly futóversenyt rendeztek a Duna-kanyarban. A pályát sajnos kullancs fertőzött területen át vezették. Kiderült, hogy a versenyzők közül 300-an találtak magukban egy, 75-en pedig két kullancsot. Ennek alapján becsüljük meg, hogy körülbelül hányan indultak a versenyen.
9. Egy forgalmas országútszakaszon, ahol egyébként is szoktak radarozni, figyelik, hogy 5 perc alatt hány autó lépi át a megengedett sebességhatárt. Tudjuk, hogy valószínűbb, hogy lesz ilyen autó, mint az, hogy nem lesz. Adjon becslést (lehetőleg élel) annak a valószínűségére, hogy pontosan három autó lépi át a megengedett sebességhatárt.

2. Várható érték

A lehetséges kimeneteleket jelöljük x_i -vel, a hozzájuk tartozó valószínűségeket pedig p_i -vel. Ekkor a várható érték: $E(X) = \sum_i p_i \cdot x_i$.

A nagy számok törvénye (tétel) szerint a kísérletszám növekedésével az átlag az elméleti úton kiszámolt várható értékhez.

Feldobtam egy kockát 200-szor. Minden egyes dobás után kiszámoltam az addig dobott értékek átlagát. Az eredményt az 1. ábra mutatja.



1. ábra.

X helyett tekinthetjük $t(X)$ -et, azaz X egy függvényét (például a kockadobás eredményeit négyzetre emeljük). A $t(X)$ várható értékére a következő összefüggés adódik: $E(t(X)) = \sum_i p_i \cdot t(x_i)$.

Jelöljük X -szel a kockadobás eredményét. X^2 várható értékét szemléletesen úgy is kiszámolhatnánk, ahogy a kocka oldalaira új címkéket ragasztanánk 1, 4, 9, 16, 25, 36 számokkal. Így nem meglepő, hogy a képletekben p_i értékek változatlanok maradnak, míg x_i -t mindenhol formálisan kicseréljük $t(x_i)$ -re.

Feladatok:

10. Mennyi a szabályos kockával végzett kockadobás során a dobott szám várható értéke?
11. A diszkrét P eloszlás tagjai: $p(x) = \frac{x^2}{30}$ ($x=1,2,3,4$). Mennyi az eloszlás várható értéke?
12. Albert és Béla a következőt játszik. Mindketten feldobnak egy dobókockát, majd Albert annyi Ft-t kap Bélától amennyi a két kockán lévő pontok különbségének a négyzete. Béla meg annyit, amennyi a két kockán lévő pontok összege. Melyiküknek kedvez a játék?
13. Legyen egy diszkrét eloszlás a következő: $x_k = (-1)^k \cdot \frac{2^k}{k}$ és $p_k = \frac{1}{2^k}$. Igazolja, hogy nincs várható értéke!
14. Egy sorsjátékon 1 darab 1 000 000Ft-os, 10 db 50 000Ft-os, és 100 db 5 000Ft-os nyeremény van. A játékhoz 40 000db sorsjegyet adnak ki. Mennyi legyen a jegy ára, hogy egy sorsjegyre a nyeremény várható értéke a jegy árának a felével egyezzen meg?
15. Tételezzük fel a 700 Ft, 10000 Ft, 789 ezer Ft és 535 millió Ft fix nyereményeketa lottón. 150 Ft-os jegyárral számolva, mekkora, egy szelvényvel fogadva, nyereségünk várható értéke?
16. Péter, ha kockával páratlant dob 100 Ft-ot veszít, ha 6-ot dob 400 Ft-ot nyer, ha 2-öt, vagy 4-et dob, újból dob. A második dobásnál 10 Ft-ot nyer, ha párost dob, 20-at veszít, ha páratlant dob. Előnyös-e ez a játék számára?
17. Anna és Béla két kockával játszanak. Az A játékos akkor fizet B-nek, ha a feldobott kockákon páratlan számok szerepelnek. A B játékos akkor fizet A-nak, ha pontosan az egyik kockával páros számot dobna. Ha más eset fordul elő, egyik sem fizet. Milyen pénzüsszegeben állapodjanak meg, hogy a játék méltányos legyen?
18. Egy dobozban 5 piros és 2 kék golyó van. Visszatevés nélkül húzzunk addig, amíg az első kék golyót kihúzzuk. Jelöljük X -szel az első kék golyó húzásának sorsszámát. Tekintsük egy ilyen húzásorozatot egy kísérletnek. a.) Adjuk meg a X valószínűségi változó eloszlását. b.) Számítsuk ki a X valószínűségi változó várható értékét.
19. Két ember asztaliteniszt játszik. A győztesnek három játszmát kell nyernie. Legyen p , illetve $q (=1-p)$ annak a valószínűsége, hogy egy játszmát az első játékos, illetve a második játékos nyer. Mennyi a játszmák számának várható értéke? Mikor lesz maximális a játszmák számának várható értéke?

20. Egy kockával addig dobunk, míg 6-ost nem dobunk. Mennyi lesz az addigi dobásszám várható értéke, ha az utolsó dobást is beszámítjuk? És ha két kockával dobunk addig, amíg valamelyiken 6-ost nem dobunk?
21. Két kosaras felváltva dob. Ha az egyikük dobása sikeres, akkor abbahagyják a dobálást. Az első 0.5, a második 0.6 valószínűséggel dob sikeresen.
 - a) Mi a valószínűsége, hogy az első játékos nyer?
 - b) Mi a kosárra dobások számának várható értéke?
22. Egy dobókockával addig dobunk, amíg kétszer egymásután ugyanazt nem dobjuk. Mennyi a dobások számának várható értéke?
23. Pista és Zoli kockáznak. Mindketten feldobnak egymás után egy piros és egy zöld kockát. Ha Pista 1-t vagy 2-t dob ő nyer és kap Zolitól 5 Ft-ot, ha Zoli 6-t dob ő a nyertes és 11 Ft-ot kap Pistától. Ha egyikük sem nyer, illetve ha mindketten egyszerre dobnak nyerőt, nem fizetnek, hanem előlről kezdik a dobálást. Zoli azt javasolja, hogy ne koptassanak két kockát, inkább kérjék meg Józsit, dobáljon ő az egyetlen fekete kockával, de a nyerési és fizetési feltételek maradjanak változatlanok. Érdemes elfogadni Pistának Zoli ajánlatát?
24. Egy játékos 250 Ft-ot befizet a banknak, majd egy kockával, amelynek öt oldala zöld, hatodik pedig fekete, egy sorozatot dob. Bármelyik dobás után bejelentheti, hogy nem akar tovább játszani és ilyenkor annyiszor 100 Ft-ot kap, ahány zöldet dobott addig. Ha viszont bármikor feketét dob, akkor vége a sorozatának, és semmit se kap a banktól. Keresse meg a játékos számára optimális stratégiát és győződjön meg, hogy még az is veszteséges!
25. Mennyi a lottón a találatok számának várható értéke?
26. Nevezetes eloszlások esetén mennyi a várható érték (binomiális, poisson, geometriai)?