

Matematika A4

VII. gyakorlat

Vetier András kurzusa

2006. október 26.

1. Normális eloszlás

Tény: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$.

A standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ ha $-\infty < x < \infty$,

eloszlásfüggvénye: $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$ ha $-\infty < x < \infty$.

$X_1 + X_2 + \dots + X_{12} - 6$ jól közelíti. (X_i a $[0, 1]$ intervallumon vett egyenletes eloszlású valószínűségi változó $i = 1, 2, \dots, 12$)

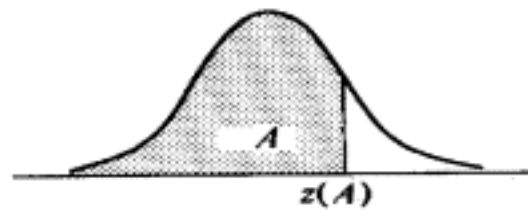
Az m várható értékű, σ szórású normális eloszlás a standard normálisból származtatható: $F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$
Független, azonos eloszlású, véges szórású valószínűségi változók összege is normális eloszlást közelít.

Feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy $\Phi(-x) + \Phi(x) \equiv 1$
2. Számítsuk ki a következő valószínűségeket, ha X standard normális eloszlású valószínűségi változó!
 - a) $\mathbf{P}(-1 < X < 1)$
 - b) $\mathbf{P}(-2 < X < 2)$
 - c) $\mathbf{P}(-3 < X < 3)$
3. Számítsuk ki a standard normális eloszlás 0.9 és 0.2-kvantilisét!
4. Egy nagy populációban az emberek testmagassága 178 cm, 9 cm paraméterű normális eloszlást követ. Mennyi ekkor annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott személy testmagassága 169 és 187 cm közé esik? Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezen személy magasabb 2 méternél? Most mennyi a 0.9 és 0.2-kvantilis (p -kvantilison azt az x értéket értjük, amelyre teljesül, hogy $F(x) = p$)?
5. Megfigyelték, hogy egy napszakban egy metrókocsiban az átlagos utaslétszám 80 fő, a szórás 20 fő. Mekkora a valószínűsége, hogy az utaslétszám egy kocsiban
 - a) 50 fő alatt
 - b) 80 és 100 fő között lesz, ha mindkét esetben feltételezzük, hogy az utaslétszám közelíthető normális eloszlással?
6. Legyen X normális eloszlású valószínűségi változó $m = 1$, $\sigma = 2$ paraméterekkel. A táblázat segítségével adjuk meg a következő valószínűségeket:
 - a) $P(1 < X)$
 - b) $P(-1 < X < 2)$

- c) $P(0 < X < 4)$
 - d) $P(-\infty < X < 0)$
 - e) $P(-\infty < X < 2)$
 - f) $P(-1 < X < 2 | -2 < X < 2)$
 - g) $P(-1 < X < 1 | 0 < X)$
7. Legyen X_1 és X_2 egymástól független normális eloszlású valószínűségi változó $m = 0, \sigma = 1$ paraméterekkel. A táblázat segítségével adjuk meg a következő valószínűségeket:
- a) $P(-1 < X_1 < 2 \text{ és } 0 < X_2)$
 - b) $P(-2 < X_1 \text{ és } 1 > X_2)$
8. A 4-6-os villamos átlagos járatsűrűsége 5 perc. A villamosok érkezése között eloszlás tekinthető exponenciálisnak. Mi a valószínűsége, hogy
- a) legalább 10 percet kell várnom a villamosra?
 - b) legalább 5 percet, de legfeljebb 8 percet kell várnom?
 - c) összesen 5 percnél nem kell többet várnom feltéve, ha már 2 percet vártam?
9. Legyen X exponenciális valószínűségi változó λ paraméterrel. Adjuk meg a következő valószínűségeket:
- a) $P(X < 5)$
 - b) $P(X > 4)$
 - c) $P(1 < X < 5)$
 - d) $P(1 < X < 5 | X > 1)$
 - e) $P(1 < X < 5 | X < 4)$

Entry is area A under the standard normal curve from $-\infty$ to $z(A)$



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998