

8. gyakorlat

Matematika A4
Vetier András kurzusa

2009. április 3.

1. Normális eloszlás

Tény: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$.

A standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ ha $-\infty < x < \infty$,

eloszlásfüggvénye: $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$ ha $-\infty < x < \infty$.

$X_1 + X_2 + \dots + X_{12} - 6$ jól közelíti. (X_i a $[0, 1]$ intervallumon vett egyenletes eloszlású valószínűségi változó $i = 1, 2, \dots, 12$)

Az m várható értékű, σ szórási normális eloszlás a standard normálisból származtatható: $F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$
Független, azonos eloszlású, véges szórási valószínűségi változók összege is normális eloszlást közelít.

1. Bizonyítsuk be, hogy $\Phi(-x) + \Phi(x) \equiv 1$.
2. Számítsuk ki a következő valószínűségeket, ha X standard normális eloszlású valószínűségi változó!
 - a) $P(X < 1.7)$
 - b) $P(-1.7 < X)$
 - c) $P(0 < X < 1.3)$
 - d) $P(-1.7 < X < 1.3)$
 - e) $P(-1.7 < X < -1.3)$
 - f) $P(-1.6 < X < 1.6 \mid 0.5 < X < 2.6)$
3. Számítsuk ki a standard normális eloszlás 0.9 és 0.2-quantilisét!
4. Legyen X normális eloszlású valószínűségi változó $m = 1$, $\sigma = 2$ paraméterekkel. A táblázat segítségével adjuk meg a következő valószínűségeket:
 - a) $P(1 < X)$
 - b) $P(-1 < X < 2)$
 - c) $P(0 < X < 4)$
 - d) $P(-\infty < X < 0)$
 - e) $P(-\infty < X < 2)$
 - f) $P(-1 < X < 2 \mid -2 < X < 2)$
 - g) $P(-1 < X < 1 \mid 0 < X)$

5. Egy nagy populációban az emberek testmagassága 178 cm, 9 cm paraméterű normális eloszlást követ. Mennyi ekkor annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott személy testmagassága 169 és 187 cm közé esik? Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezen személy magasabb 2 méternél?
6. Megfigyelték, hogy egy napszakban egy metrókocsiban az átlagos utaslétszám 80 fő, a szórás 20 fő. Mekkora a valószínűsége, hogy az utaslétszám egy kocsiban
 - a) 50 fő alatt
 - b) 80 és 100 fő között lesz, ha mindkét esetben feltételezzük, hogy az utaslétszám közelíthető normális eloszlással?
7. Az ACME[®] Corporation (http://en.wikipedia.org/wiki/Acme_Corporation) rendelkezik két alkatrészüzemmel, mindkettőből berendeltünk egy raklap diódát. Sajnos Jucika megunta a munkát és hazament, így nincs aki megmondja, hogy melyik raklap melyik gyárból jött. Azt tudjuk, hogy mindkét gyár azonos technológiával dolgozik – tehát a letörési feszültségek szórása 0.5 V –, valamint, hogy az egyik gyárban -17 V-os diódákat gyártanak, a másikban pedig -21 V-osakat. Célunk, hogy a döntésünk 0.95 valószínűséggel helyes kell legyen.
A portás bácsi (aki hirtelen beugrott Jucika helyett) a következőt csinálja: kivesz az egyik raklapból 2 db-ot, megméri a letörési feszültségüket, átlagot számol, majd ha az érték nagyobb, mint -19, akkor a raklapot -17 V-os matricával látja el, egyébként a -21 V-ossal. Jó-e a módszer?

2. CHT binomiális eloszlásra

Nagy n esetén az n -ed rendű p paraméterű binomiális eloszlás közelíthető np , \sqrt{npq} paraméterű normális eloszlással.

8. Mennyi annak a valószínűsége, hogy 12000 kockadobás során előforduló hatosok száma 1900 és 2150 közé esik? (Közelítsünk normális eloszlással!)
9. Határozzuk meg azt a k egész számot, amelyre igaz, hogy annak a valószínűsége, hogy 1000 érmedobás során a fejek száma 490 és k közé esik kb. 0.5! (Közelítsünk normális eloszlással!)
10. Hányszor kell érmével dobnunk ahhoz, hogy 0.99-nál nagyobb valószínűséggel a fej eredmények száma a dobások számának 49%-a és 51%-a közé essen?
11. Egy repülőjáratra, mely minden nap többször is indul, 200 ember fér föl. Tegyük fel, hogy minden ember, a többitől függetlenül $p = 0.1$ valószínűséggel lekési a járatát, mert nem jelenik meg az indulásig. Ezért a repülő-társaság úgy gondolja, hogy növelheti a hasznát, ha mindig 200-nál kicsivel több jegyet adnak el, hiszen 200-nál kicsivel több jegy esetén csak kicsi a valószínűsége annak, hogy az eladott extra jegyek miatt bajba keveredik a társaság azért, mert 200-nál több utas jeleniki meg induláskor. Hány jegyet adjanak el, ha azt szeretnék, hogy a járatok
 - a) harmadánál,
 - b) tizedénél,
 - c) századánál
 forduljon csak elő, hogy valakinek nem jut hely? Hogyan módosul a helyzet, ha az emberek csak $p = 0.01$ valószínűséggel késnek?
12. Mi a valószínűsége, hogy a villamosmérnök hallgatók beférnek egy 360 fős előadóban tartott BSz órára, ha 500-an vannak, és mindenki, a többiektől függetlenül 0.7 valószínűséggel hallgatja az előadást? Mi a helyzet, ha a terem 370 vagy 380 vagy 390 fős?

3. CHT

Független valószínűségi változók összegének szórásnégyzete a szórásnégyzetek összege. Azaz ha X_1, X_2, \dots, X_n függetlenek, akkor

$$\sigma^2(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \dots + \sigma^2(X_n)$$

Sok független valószínűségi változó összegének eloszlását normális eloszlásúnak vehetjük.

Sok független valószínűségi változó összege standardizáltjának eloszlását standard normális eloszlásúnak vehetjük. A standardizálásnál a várható értéket kell levonni, és a szórással kell elosztani, azaz ha $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, akkor az S_n összeg standardizáltja:

$$\frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)}$$

Ez az $\frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)}$ érték tekinthető közelítőleg standard normális eloszlásúnak.

13. A harminc fős osztályban mindenki generál a számológépével egy $[0, 1]$ -en egyenletes eloszlású számot. Mi a valószínűsége, hogy az összeg nagyobb 16-nál?
14. Egy trópusi országban minden nap esik. Sok éves statisztika alapján kiszámoltuk, hogy egy nap átlagosan 10 mm csapadék esik, a napi szórás pedig 2 mm. Mi a valószínűsége, hogy 100 nap alatt
 - a) 900,
 - b) 950,
 - c) 980mm-nél több esik?
15. Dobókockával dobok 100-szor, és összeadom a dobások eredményét. Mennyi lesz a szórás? Standardizáljuk az összeget!
16. Minden nap rágok a ceruzám végéből átlagosan fél centit (írni nem írok vele), a rágásom napi szórása pedig 0.1 cm. A ceruzám hossza 17 centiméter. Mi a valószínűsége, hogy 36 nap alatt teljesen elfogy?
17. Dömötör rulettezik a kaszinóban. Minden egyes körben 10 petákat tesz pirosra. 100 játék után 300 peták a vesztesége. Jogos-e a gyanúja, hogy svindliz a croupier? (A rulett-körön összesen 37 mező van 0-tól 36-ig számozva. Ezek közül egy (a 0 jelű) zöld, a fennmaradó 36-ból pedig 18 piros és 18 fekete.)
18. Mennyi a valószínűsége annak, hogy 50 darab azonos eloszlású X valószínűségi változó összege a $[0, 30]$ intervallumba esik, ha X eloszlása a $[0, 1]$ intervallumon
 - a) egyenletes;
 - b) $f(x) = 2x$ sűrűségfüggvény szerint alakul?
19. Amerikai elnökválasztás előtt a Gallup közvéleménykutató társaság meg akarja becsülni a Demokrata párti szavazók arányát New Hampshire és Texas államban. Eleve tudják, hogy mindkét államban a Demokrata párti szavazók aránya 40% és 60% között van. Céljuk, hogy mindkét államban az arányokat 0.99-nél nagyobb valószínűséggel, 2% hibahatáron belül állapítsák meg. New Hampshire államban 1.2 millió polgár jogosult szavazni, míg Texas államban 12 millió. E számok alapján statisztikusuk azt állítja, hogy Texasban kb. tízszer akkora mintát kell megfigyelni, mint New Hampshire-ben. Jó-e ez az okoskodás, vagy rúgják ki a statisztikust? Az utóbbi esetben kb. hányszor nagyobb mintát kell Texasban megfigyelni, mint New Hampshireben?

