

8. gyakorlat

Matematika A4

Gyakorlatvezetők: Vetier András, Móra Péter

2007.10.29, 31.

1. Többdimenziós diszkrét eloszlások

1. Először egy kockával dobunk, majd annyi érmével, ahányast a kockával dobunk. Mi a valószínűsége, hogy a kockával 4-est dobunk és 2 fejet kapunk? Mi a valószínűsége, hogy 5 fejet kapunk?
2. Van 20 könyvem a polcon. Sorban elolvasom a címeiket, és mindegyik könyvet 0,6 valószínűséggel leveszem a polcról. A levett könyveket még átszelektálom, és mindegyiket 0,5 valószínűséggel kidobom az ablakon. Adjuk meg az ablakon kidobott könyvek számának eloszlását!
3. Vegyük azt a két dimenziós diszkrét eloszlást, aminek a valószínűségeit az alábbi táblázat határozza meg.

$X \setminus Y$	1	2	3
1	0.1	0.2	0.2
2	0.1	0.2	0
3	0.1	0	0.1

- a) Mi a valószínűsége, hogy $X = 2$ és $Y = 1$?
- b) Mi a valószínűsége, hogy $Y = 3$?
- c) X^2Y várható értéke?
- d) Feltéve, hogy $Y = 3$, mi X eloszlása?
- e) Független-e X és Y ?

2. Sűrűségfüggvény a síkon

Sűrűségfüggvény tulajdonságai:

1. $f(x, y) \geq 0$, minden x, y valós számra.

2.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

Az A tartományba esés valószínűsége:

$$P(A) = \iint_A f(x, y) dx dy$$

Feladatok:

4. Az alábbi függvények melyike sűrűségfüggvény? (Amelyik tartomány nincs megadva, ott a függvény 0.)

a)

$$f(x, y) = \frac{4}{5}(x + xy + y) \quad , \quad \text{ha } 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$$

b)

$$f(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} \quad , \quad \text{ha } x > 0, \quad y > 0$$

c)

$$f(x, y) = 4xy - 10 \quad , \quad \text{ha } x^2 + y^2 < 1$$

d)

$$f(x, y) = \frac{1}{x} \quad , \quad \text{ha } 0 < y < x < 1$$

5. Határozzuk meg c -t úgy, hogy $f(x, y)$ sűrűségfüggvény legyen:

$$f(x, y) = cy \quad , \quad \text{ha } x > 0, \quad y > 0, \quad x + y < 1$$

6. Vegyük az $f(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}$ függvényt. Számítsuk ki az alábbi események valószínűségét:

a) $0 < X < 1$ és $0 < Y < 1$

b) $1 < X < 5$ és $2 < Y < 8$

c) $0 < X < 1$

d) $3 < Y < 5$

3. 2-dimenziós valószínűségi változó függvényének várható értéke

A $t(X, Y)$ valószínűségi változó várható értéke:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t(x, y) \cdot f(x, y) dx dy$$

Speciálisan X és Y szorzatának várható értéke:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y) dx dy$$

Feladatok:

7. Vegyük a következő 2-dimenziós valószínűségi változót:
Első koordinátája legyen $X = \sqrt{RND_1}$. A másik koordinátája pedig ez az érték beszorozva egy másik véletlen szám négyzetgyökével: $Y = \sqrt{RND_1} \cdot \sqrt{RND_2}$.
- Számoljuk ki e 2-dimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!
 - Legyen $t(x, y) = xy$. Mennyi $t(X, Y)$ valószínűségi változó várható értéke?
 - Legyen $t(x, y) = xy^2$. Mennyi $t(X, Y)$ valószínűségi változó várható értéke?
8. Legyen X a $[0, 1]$ -en egyenletes, Y pedig az $[X, 1]$ -en egyenletes. Mi a közös sűrűségfüggvényük? Mi X várható értéke? Mi Y várható értéke? Mi a szorzatuk, azaz XY várható értéke? Igaz-e, hogy ez a várható értékek szorzata?

4. Feltételes eloszlás

A fontos az alábbi összefüggés:

$$P(c < Y < d | X = x) = \int_c^d f_{2|1}(y|x) dy = F_{2|1}(d|x) - F_{2|1}(c|x)$$

Feladatok:

9. Legyen $f(x, y) = \frac{1}{x}$ ha $0 < y < x < 1$, egyébként 0. Válaszoljunk meg az alábbi kérdéseket:
- $P(Y \in (0.3, 0.4) | X = 0.5) = ?$
 - $P(Y \in (0.3, 0.4) | X = 0.8) = ?$

- c) $P(Y \in (0.3, 0.4) | X = x) = ?$
- d) $P(X \in (0.5, 0.7) | Y = 0.1) = ?$
- e) $P(X \in (0.5, 0.7) | Y = 0.4) = ?$
- f) $P(X \in (0.5, 0.7) | Y = y) = ?$

10. Legyenek X és Y független 2 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók.

- a) $P(X + Y < 3) = ?$
- b) $P(X + Y < z) = ?$
- c) $P(X + Y < 3 | X < 2) = ?$
- d) $P(2 < X + Y < 3 | Y > 1) = ?$

5. Függetlenség

X, Y valószínűségi változók $f(x, y)$ közös sűrűségfüggvénnyel. X és Y pontosan akkor függetlenek, ha $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ alakban áll elő. Ezzel ekvivalens megfogalmazások az alábbiak:

$$f_{2|1}(x, y) = f_2(y) \quad \text{illetve} \quad f_{1|2}(x, y) = f_1(x)$$

11. Függetlenek-e az alábbi közös sűrűségfüggvénnyel rendelkező valószínűségi változók?

- a) $f(x, y) = \frac{1}{x}$ ha $0 < y < x < 1$
- b) $f(x, y) = 2$ ha $0 < y < x < 1$
- c) $f(x, y) = 1/2$ ha $0 < x < 1$ és $0 < y < 2$
- d) $f(x, y) = 2e^{x+2y}$ ha $0 < x$ és $0 < y$

12. Vegyük az alábbi sűrűségfüggvényt:

$$f(x, y) = 24xy \quad , \text{ ha } 0 < x, \quad 0 < y, \quad x + y < 1$$

- a) Független-e X és Y ?
- b) $P(X < u, Y < v) = ?$, ahol $u, v > 0$ és $u + v < 1$.

13. Vegyük az alábbi sűrűségfüggvényt:

$$f(x, y) = 1 \quad , \text{ ha } 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2(1 - x).$$

- a) $P(X < x, 1 < Y < \frac{3}{2}) = ?$
- b) Független-e X és Y ?