

## 8. gyakorlat

Matematika A4

Gyakorlatvezetők: Vetier András, Móra Péter

2007.11. 5.

### 1. CHT binomiális eloszlásra

Nagy  $n$  esetén az  $n$ -ed rendű  $p$  paraméterű binomiális eloszlás közelíthető  $np$ ,  $\sqrt{npq}$  paramétererű normális eloszlással.

1. Mennyi annak a valószínűsége, hogy 12000 kockadobás során előforduló hatosok száma 1900 és 2150 közé esik? (Közelítsünk normális eloszlással!)
2. Határozzuk meg azt a  $k$  egész számot, amelyre igaz, hogy annak a valószínűsége, hogy 1000 érmedobás során a fejek száma 490 és  $k$  közé esik kb. 0.5! (Közelítsünk normális eloszlással!)
3. Hányszor kell érmével dobnunk ahhoz, hogy 0.99-nál nagyobb valószínűséggel a fej eredmények száma a dobások számának 49%-a és 51%-a közé essen?
4. Egy repülőjáratra, mely minden nap többször is indul, 200 ember fér föl. Tegyük fel, hogy minden ember, a többitől függetlenül  $p = 0.1$  valószínűséggel lekési a járatát, mert nem jelenik meg az indulásig. Ezért a repülőtársaság úgy gondolja, hogy növelheti a hasznát, ha mindig 200-nál kicsivel több jegyet adnak el, hiszen 200-nál kicsivel több jegy esetén csak kicsi a valószínűsége annak, hogy az eladott extra jegyek miatt bajba keveredik a társaság azért, mert 200-nál több utas jeleniki meg induláskor. Hány jegyet adjanak el, ha azt szeretnék, hogy a járatok
  - a) harmadánál,
  - b) tizedénél,
  - c) századánál

forduljon csak elő, hogy valakinek nem jut hely? Hogyan módosul a helyzet, ha az emberek csak  $p = 0.01$  valószínűséggel késnek?

- 5.
6. Mi a valószínűsége, hogy a villamosmérnök hallgatók beférnek egy 360 fős előadóban tartott BSz órára, ha 500-an vannak, és mindenki, a többiektől függetlenül 0.7 valószínűséggel hallgatja az előadást? Mi a helyzet, ha a terem 370 vagy 380 vagy 390 fős?

## 2. CHT

Független valószínűségi változók összegének szórásnégyzete a szórásnégyzetek összege. Azaz ha  $X_1, X_2, \dots, X_n$  függetlenek, akkor

$$\sigma^2(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \dots + \sigma^2(X_n)$$

Sok független valószínűségi változó összegének eloszlását normális eloszlásúnak vehetjük.

Sok független valószínűségi változó összege standardizáltjának eloszlását standard normális eloszlásúnak vehetjük. A standardizálásnál a várható értéket kell levonni, és a szórással kell elosztani, azaz ha  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ , akkor az  $S_n$  összeg standardizáltja:

$$\frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)}$$

Ez az  $\frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)}$  érték tekinthető közelítőleg standard normális eloszlásúnak.

7. A harminc fős osztályban mindenki generál a számológépével egy  $[0, 1]$ -en egyenletes eloszlású számot. Mi a valószínűsége, hogy az összeg nagyobb 16-nál?
8. Egy trópusi országban minden nap esik. Sok éves statisztika alapján kiszámoltuk, hogy egy nap átlagosan 10 mm csapadék esik, a napi szórás pedig 2 mm. Mi a valószínűsége, hogy 100 nap alatt
  - a) 900,
  - b) 950,
  - c) 980mm-nél több esik?
9. Dobókockával dobok 100-szor, és összeadom a dobások eredményét. Mennyi lesz a szórás? Standardizáljuk az összeget!
10. Minden nap rágok a ceruzám végéből átlagosan fél centit (írni nem írok vele), a rágásom napi szórása pedig 0.1 cm. A ceruzám hossza 17 centiméter. Mi a valószínűsége, hogy 36 nap alatt teljesen elfogy?
11. Egy északi sarki téli tábor irodájában kell folyamatosan világosságot biztosítani. Az izzók, amiket használnak exponenciális eloszlásúak 10 óra várható értékkel. Legalább hány ilyen izzóra van szükség ahhoz, hogy a 60 napra tervezett táborban legalább 0,9 valószínűséggel folyamatosan éghessen a villany? (Az izzócserék időtartama elhanyagolható.)
12. Dömötör rulettezik a kaszinóban. Minden egyes körben 10 petákat tesz pirosra. 100 játék után 300 peták a vesztesége. Jogos-e a gyanúja, hogy svindliz a croupier? (A rulett-körön összesen 37 mező van 0-tól 36-ig számozva. Ezek közül egy (a 0 jelű) zöld, a fennmaradó 36-ból pedig 18 piros és 18 fekete.)

13. Mennyi a valószínűsége annak, hogy 50 darab azonos eloszlású  $X$  valószínűségi változó összege a  $[0, 30]$  intervallumba esik, ha  $X$  eloszlása a  $[0, 1]$  intervallumon
- a) egyenletes;  
b)  $f(x) = 2x$  sűrűségfüggvény szerint alakul?
14. Amerikai elnökválasztás előtt a Gallup közvéleménykutató társaság meg akarja becsülni a Demokrata párti szavazók arányát New Hampshire és Texas államban. Eleve tudják, hogy mindkét államban a Demokrata párti szavazók aránya 40% és 60% között van. Céljuk, hogy mindkét államban az arányokat 0.99-nél nagyobb valószínűséggel, 2% hibahatáron belül állapítsák meg. New Hampshire államban 1.2 millió polgár jogosult szavazni, míg Texas államban 12 millió. E számok alapján statisztikusuk azt állítja, hogy Texasban kb. tízszer akkora mintát kell megfigyelni, mint New Hampshire-ben. Jó-e ez az okoskodás, vagy rúgják ki a statisztikusok? Az utóbbi esetben kb. hányszor nagyobb mintát kell Texasban megfigyelni, mint New Hampshireben?

### 3. Kovariancia

A kovariancia definíciója:

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

A kovariancia mátrixban az  $i$ . oszlop  $j$ . sorában az  $i$ . és a  $j$ . valószínűségi változó kovarianciája áll, vagyis ez egy szimmetrikus mátrix, melynek főátlójában pedig a szórásnégyzetek helyezkednek el, azaz két változóra ez így néz ki:

$$\begin{pmatrix} \sigma^2(X) & \text{cov}(X, Y) \\ \text{cov}(X, Y) & \sigma^2(Y) \end{pmatrix}$$

15.  $X$  és  $Y$  együttes sűrűségfüggvénye  $f(x, y) = 60xy^2$ , ha  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x$ . Határozzuk meg a kovarianciájukat!
16. Legyen  $X$  és  $Y$  független. Mennyi a kovarianciájuk?
17. A következő táblázat egy hallgató HáRe és A4 jegyeinek együttes valószínűségét mutatja. Mennyi a kovariancia? Pozitív vagy negatív? Miért?

HáRe \ A4	1	2	3	4	5
1	0.2	0.1	0.1	0	0
2	0	0.1	0.1	0	0
3	0	0.1	0.1	0.1	0.1
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0

18.  $(X, Y)$  közös sűrűségfüggvénye  $2e^{-2x}/x$  ha  $0 < x < \infty$  és  $0 < y < x$ . Mennyi a kovariancia?