10. gyakorlat

Matematika A4
Gyakorlatvezetők: Vetier András, Móra Péter

2007. november 19.

1. Konvolúció

Ha X és Y *diszkrét* valószínűségi változók, akkor $Z = X + Y$ eloszlását könnyedén ki tudjuk számolni.

$$P(X+Y=l) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(X=k \cap Y=l-k)$$

Ha függetlenek is, akkor

$$P(X+Y=l) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(X=k)P(Y=l-k)$$

Például ha X, Y két szabályos dobókockával dobott értéket jelöl, akkor a képlet szerint:

$$P(\text{dobások összege } = 8) = P(X=2)P(Y=6) + P(X=3)P(Y=5) + \\ P(X=4)P(Y=4) + P(X=5)P(Y=3) + P(X=6)P(Y=2)$$

Ugyanilyen logikával számoltunk a félév elején.
Folytonos esetben is hasonló képletet kapunk. Ha X és Y függetlenek, továbbá X sűrűségfüggvénye $f(x)$, Y sűrűségfüggvénye $g(y)$, és $Z = X + Y$ sűrűségfüggvényét $h(z)$-vel jelölve:

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z-x)dx$$

Feladatok:

1. Én és az öcsém kockával külön-külön dobunk az első 6-osig. Megszámoljuk, hogy összesen hányszor dobtunk. Adjuk meg ennek a számnak az eloszlását!

2. 20-an vagyunk egy osztályban. Mindenki dob az első 6-osig. Adjuk meg az összes dobás számának eloszlását.

3. Én kockával dobok az első 6-osig, az öcsém érmével dob az első fejig. Megszámoljuk, hogy összesen hányszor dobtunk. Adjuk meg ennek a számnak az eloszlását!

4. Délelőtt átlagosan $3,5$-szer lépnek a lábamra a villamoson, délután csak $2,5$-szer. Mindkét esetben használhatunk Poisson eloszlást. Megszámolom, hogy egy nap hányszor léptek a lábamra. Adjuk meg ennek a valószínűségi változó eloszlását!

5. Minden diák 0.9 százalékos valószínűséggel megy át a vizsgán (a tudásától függetlenül). Két vizsgahely van: a K. AudMAX-ban 150-en vizsgáztak, még a Ch. MAX-ban 200-an. Mindkét teremben külön-külön megszámoljuk a sikeres vizsgák számát. Ez mindkét esetben binomiális eloszlású valószínűségi változó lesz. A nap végén megszámoljuk, hogy összesen hányan mentek át. Adjuk meg az összes sikeres vizsga számának eloszlását!

6. A számológépemmel generálok két véletlen számot $[0, 1]$-en, és összeadom őket. Írjuk fel az összeg eloszlásának sűrűségfüggvényét!

7. Számoljuk ki egy $[0, 2]$-n és egy $[0, 3]$-an egyenletes eloszlású valószínűségi változók összegének sűrűségfüggvényét.

8. Számoljuk ki egy λ_1 és egy λ_2 paraméterű exponenciális eloszlás konvolúcióját! (Ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, akkor ezt nevezzük 2-od rendű, λ paraméterű eloszlásnak.)

9. X és Y egymástól független valószínűségi változók, melyek egyenletes eloszlásúak az $[1, 5]$ intervallumon. Vezessük le $X - Y$ sűrűségfüggvényének a képletét!

10. Számoljuk ki $X - Y$ sűrűségfüggvényét, ha

    a) X és Y egymástól független 2 paraméterű exponenciális eloszlás.

    b) X λ paraméterű, Y μ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók.

2. Gamma eloszlás

n db λ paraméterű független exponenciális eloszlás összegének eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda^i x^i}{i!} e^{-\lambda x} \qquad \text{ha } x > 0$$

sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \qquad \text{ha } x > 0$$

Feladatok:

11. Éjszaka bárányok helyett az ablakom alatt elhaladó kocsikat számolom. Átlagosan 3 perc telik el két autó elhaladása között. Mi a valószínűsége, hogy 6 perc alatt 3 kocsi hangját is hallom?

12. Egy világítótoronyban kell megoldanunk a folyamatos (éjjel-nappali) világítást. A reflektorban az égők, amiket használunk exponenciális eloszlásúak 3 nap várható értékkel. Legközelebb új égőket csak 7 nap múlva kapunk. Mi a valószínűsége, hogy addig tudunk folyamatosan világítani, ha még 4 működőképes égőnk van?