

# Matematika B4

## VI. gyakorlat

2005. október 19., 21.

### 1. Bevezető kérdések

1. Mi a valószínűsége, hogy éjszaka álmomból felriadva a nagymutató az óralap képzeletbeli függőleges középvonalához képest jobbra van? És annak a valószínűsége, hogy a körív 5-ös és 6-os számjegy közötti  $\frac{1}{12}$  részén van?
2. A mozigép egy film közepén elromlott, és szerencsétlen módon a szalagtovábbító elszakította a filmszalagot (a szakadás merőleges lett a szalag haladási irányára). Egy képkocka 20mm hosszú és a képkockák között 2mm-es felhasználatlan csík van. Mi a valószínűsége, hogy a masina egy képkockába szakított bele?
3. Legyen  $X$  egy egyenletes eloszlású valószínűségi változó az  $(a, b)$  intervallumon.

- a)  $P(X < x) = ?$
- b)  $\frac{P(X \in (x_1, x_2))}{x_2 - x_1} = ?$

### 2. Folytonos egyenletes eloszlás

Ha egy véges intervallumra úgy dobunk egy pontot, hogy a pont az intervallum bármely részintervallumára annak hosszával arányos valószínűséggel essen, akkor a pont koordinátája egyenletes eloszlású az adott intervallumon. Ha  $a$  és  $b$  ennek a véges intervallumunk két végpontja, akkor az eloszlást  $\mathbf{E}(a,b)$ -vel jelöljük. Annak a valószínűsége, hogy egy  $E(a,b)$  eloszlású véletlen szám egy  $d$  hosszúságú szakaszba essen (a fentiek alapján):  $\frac{d}{b-a}$ .

$$\text{valószínűség} = \frac{\text{az eseménynek megfelelő halmaz hossza}}{\text{az egész eseménytér hossza}}$$

Hasonló elgondolás alapján ha egy pont egy véges területű síktartomány bármely részére a kiválasztott rész területével arányos valószínűséggel esik, akkor a pont helyének eloszlása egyenletes eloszlású az adott síktartományon.

$$\text{valószínűség} = \frac{\text{az eseménynek megfelelő halmaz területe}}{\text{az egész eseménytér területe}}$$

Véges térfogatú térrészen értelmezett egyenletes eloszlás esetén:

$$\text{valószínűség} = \frac{\text{az eseménynek megfelelő halmaz térfogata}}{\text{az egész eseménytér térfogata}}$$

*Feladatok:*

4. Egy szabályos háromszögbe kört rajzolunk, mely érinti a háromszög oldalait. A háromszög belsejében egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot. Mi a valószínűsége, hogy a pont a kör belsejébe esik?
5. Egy körbe szabályos hatszöget rajzolunk. Mi a valószínűsége, hogy a körben egyenletesen választott pont a hatszögben is benne van?
6. Mi a valószínűsége, hogy a  $(0,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(1,0)$ ,  $(1,1)$  pontok által meghatározott négyzetben egyenletesen választott pont koordinátái közül
  - a) az első koordináta legfeljebb kétszerese a másikkak?
  - b) az első koordináta négyzete kisebb a második koordinátától?
7. Egy véletlen téglalapot úgy szerkesztünk, hogy mindkét oldalának hosszát egymástól függetlenül 0 és 1 között egyenletes eloszlás szerint választjuk. Mi a valószínűsége annak, hogy a téglalap kerülete nagyobb 2 hosszegységénél, és a területe kisebb  $\frac{1}{4}$  területegységénél?
8. Mi a valószínűsége, hogy ha a  $(0, 1)$  intervallumon kiválasztunk
  - a) 2 pontot egyenletes eloszlással, akkor az elhelyezkedésük szerint a kisebbik pont kisebb  $x$ -nél?
  - b) 3 pontot egyenletes eloszlással, akkor az elhelyezkedésük szerint a kisebbik pont kisebb  $x$ -nél?
  - c) 3 pontot egyenletes eloszlással, akkor az elhelyezkedésük szerint a nagyobb pont kisebb  $x$ -nél?
  - d) 3 pontot egyenletes eloszlással, akkor az elhelyezkedésük szerint a második legkisebb pont kisebb  $x$ -nél?
9. *Buffon-féle tűprobléma:* Egy nagy papírlapra 4 cm-enként párhuzamos vonalakat húzunk, majd egy 2 cm hosszú tűt magasról a papírra ejtünk. Mi a valószínűsége, hogy a tű vonalra esik?
10. Mi a valószínűsége, hogy 3 független  $(0, 1)$ -en választott pont közül pontosan 1-1 essen a  $(0, \frac{1}{3})$ ,  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ , és  $(\frac{2}{3}, 1)$  intervallumba?
11. 0 és 1 között két számot választunk egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint.
  - a) Mi a valószínűsége annak, hogy a két szám különbségének abszolút értéke kisebb, mint a kisebbik szám?
  - b) A két szám három darabra vágja a  $[0, 1]$  intervallumot. Mi valószínűsége annak, hogy a három részintervallumból háromszöget lehet összerakni?
12. Egy egységnyi oldalú négyzet két átlóval két átellenes oldalán egy-egy pontot választunk egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint. Mi a valószínűsége annak, hogy a két pont távolsága kisebb, mint  $x$  ( $1 \leq x \leq \sqrt{2}$ )?
13. Mi a valószínűsége, hogy független,  $(0, 1)$ -en egyenletes eloszlás szerinti két véletlen szám közül az egyik  $n$ -edik gyöke kisebb a másik  $m$ -edik gyökénél, azaz  $P(\sqrt[n]{RND_1} < \sqrt[m]{RND_2})$  ?
14. Jancsi és Juliska 12 és 1 óra között szeretnének találkozni. Az egyszerűség kedvéért jelöljük a 12 órát 0-val, így mindkettőjük érkezése egy  $(0, 1)$ -beli szám. Tudjuk, hogy érkezésük egymástól független azonos eloszlású valószínűségi változó, ami egy  $(0, 1)$ -en egyenletes eloszlású szám négyzetgyökének eloszlásával egyezik meg. Mi a valószínűsége, hogy találkoznak, ha mindketten 20 percet ( $1/3$  órát) várnak a másikkra?
15. A feltételek ugyanazok, mint az előző esetben, csak ugyanilyen eloszlás szerint Juliska apja is kiér a megbeszél helyre. Ha találkozik valakivel, akkor felpofozza, így a találkozás biztosan meghiúsul. Mi a valószínűsége, hogy a találka mégis létrejön? Mi a valószínűsége, hogy pofon csattan?

### Házi feladat

16. Válasszunk  $k$  db pontot a  $(0,1)$  intervallumon egymástól függetlenül, egyenként egyenletes eloszlás szerint. Mi a valószínűsége, hogy az elhelyezkedésük szerint az  $l$ -edik kisebb  $x$ -nél?
17. Egy körbe szabályos háromszöget rajzolunk. A körlapon egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot. Mi a valószínűsége annak, hogy a pont a háromszög belsejébe esik?
18. A  $(0, 1)$  intervallumban egyenletes eloszlás szerint választunk egy számot. Mi a valószínűsége, hogy olyan számot választunk, amelynek végtelen decimális kifejtése nem tartalmaz egyes számjegyet?
19. Egy hosszú, magas kerítés egymástól  $L$  távolságra leszűrt,  $D$  átmérőjű függőleges rudakból áll. Egy  $d$  átmérőjű labdát elég messziről, csukott szemmel a kerítés felé dobunk. A labda vagy nekiütődik valamelyik rúdnak, vagy érintés nélkül átrepül közöttük. Mi a valószínűsége annak, hogy a labda a rudak érintése nélkül átrepül a rudak között?
20. Egy ropit két egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint választott helyen eltörünk. Mi a valószínűsége, hogy a középső darab hosszabb a ropi felénél?
21. *Általános Buffon-féle tűprobléma:* Egy nagy papírlapra  $d$  cm-enként párhuzamos vonalakat húzunk, maj egy  $2l$  cm hosszú tűt magasról a papírra ejtünk. Mi a valószínűsége, hogy a tű vonalra esik?
22. Egy papírra 4 cm-enként függőleges és vízszintes vonalakat húzunk, akkor mennyi a valószínűsége, hogy a 2 cm hosszú tű
  - a) legalább 1 vonalra esik?
  - b) pontosan 1 vonalra esik?
23. Egy piros, egy fehér és egy zöld pontot teszünk a  $[0, 1]$  intervallumra egymástól függetlenül, külön-külön egyenletes eloszlás szerint. Mi a valószínűsége annak, hogy a piros és a zöld pont közötti távolság legfeljebb  $\frac{1}{3}$ , és a fehér pont a piros és a zöld közé kerül?
24. *Bertrand-paradoxon:* Egyezzünk meg abban, hogy a kör egy húrját "hosszúnak" nevezzük, ha a húrhoz tartozó középponti szög  $120$  foknál nagyobb, vagyis a húr hosszabb, mint a körbe rajzolható egyenlőoldalú háromszög oldalának a hossza. Egységsugarú kör esetén ez annyit jelent, hogy a húr hosszabb, mint  $\sqrt{3}$  egység. Mi a valószínűsége annak, hogy a kör húrjai közül véletlenszerűen választva hosszú húr adódik, ha a véletlenszerű választás az alábbi módszerek egyikét jelenti?
  - a) A kör egyik átmérőjét véletlenszerűen kiválasztjuk úgy, hogy az átmérő irányát kijelölő szög egyenletes eloszlású legyen  $0$  és  $2\pi$  között, majd pedig a kiválasztott átmérőn egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot. Azt a húrunkat tekintjük, mely átmérő ezen a ponton, és merőleges az átmérőre.
  - b) A kör területén egymástól függetlenül két pontot választunk egyenletes eloszlás szerint, és tekintjük a két pont által meghatározott húrunkat.
  - c) A körlapon egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot, és tekintjük azt a húrunkat, aminek ez a pont a felezőpontja.