Matematika B4
VIII. gyakorlat

2005. november 2., 4.

1. Szórás

Az m várható értékű diszkrét valószínűségi változó szórása: $\sigma = \sqrt{\sum_k (k-m)^2 \cdot p_k}$.

Folytonos esetben: $\sigma = \sqrt{\int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 \cdot f(x)dx}$

2. Normális eloszlás

Tény: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$.

A standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ ha $-\infty < x < \infty$,

eloszlásfüggvénye: $\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$ ha $-\infty < x < \infty$.

$X_1 + X_2 + \cdots + X_{12} - 6$ jól közelíti. (X_i a $[0, 1]$ intervallumon vett egyenletes eloszlású valószínűségi változó $i = 1, 2, \dots 12$)

Az m várható értékű, σ szórású normális eloszlás a standard normálisból származtatható: $F(x) = \Phi(\frac{x-m}{\sigma})$

Független, azonos eloszlású, véges szórású valószínűségi változók összege is normális eloszlást közelít.

Feladatok

1. Számítsuk ki a λ paraméterű exponenciális eloszlást követő X valószínűségi változó szórását és a várható értéktől való átlagos abszolút eltérését! Mennyi a medián, az alsó és a felső kvartilis, illetve általában a p-kvantilis értéke (Az F eloszlásfüggvényű eloszlás p-kvantilise az az x, amelyre $F(x) = p$; a medián és a kvartilisek ennek speciális esetei rendre $p = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, illetve $\frac{3}{4}$ értékekkel)?

2. Számítsuk ki az $[a, b]$ intervallumon vett egyenletes eloszlást követő X valószínűségi változó szórását és átlagos abszolút eltérését!

3. Számítsuk ki az $f(x) = 2x$ ha $0 < x < 1$ sűrűségfüggvényt követő X valószínűségi változó megadott valószínűségi változó szórását és átlagos abszolút eltérését!

4. Mennyi az előző 3 feladatban a következő valószínűségek értéke (m, σ és d a várható értéket, a szórást illetve az átlagos abszolút eltérést jelöli)?

   a) $\mathbb{P}(m - \sigma < X < m + \sigma)$
   b) $\mathbb{P}(m - d < X < m + d)$
   c) $\mathbb{P}(m - 2\sigma < X < m + 2\sigma)$
   d) $\mathbb{P}(m - 2d < X < m + 2d)$

5. Legyen X egy dobókockával dobott szám. Mennyi X szórása? Mi a helyzet n oldalú "kocka" esetén?

6. Egy dobozból, amiben 4 piros és 6 fehér golyó van, visszatevés nélkül kihúzok 3 golyót. Jelölje X a kihúzott piros golyók számát! Mennyi X szórása?

7. Legyen $X_i(i = 1 \dots 4)$ valószínűségi változó p valószínűséggel 1, $1 - p$ valószínűséggel 0! Legyen $Y_j = \sum_{i=1}^{j} X_i (i = 1 \dots 4)$! Mennyi $Y_j(j = 1 \dots 4)$ szórása, illetve második momentuma $p = \frac{1}{2}$, $p = \frac{1}{4}$, illetve általános esetben?

8. Egy pontosnak tekinthető ismerősünkkel 7 órakor van találkozónk. Érkezése egyenletes eloszlású, öt perc szórással. Melyik az a legkorábbi időpont, amikor ismerősünk biztosan megérkezik?

9. Mennyi az alábbi integrálok értéke, mit jelentenek?

   a) $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx$

   b) $\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \varphi(x)dx$

   c) $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot \varphi(x)dx$

   d) $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \varphi(x)dx$

10. Bizonyítsuk be, hogy $\Phi(-x) + \Phi(x) \equiv 1$

11. Számítsuk ki a következő valószínűségeket, ha X standard normális eloszlású valószínűségi változó!

    a) $\mathbb{P}(-1 < X < 1)$

    b) $\mathbb{P}(-2 < X < 2)$

    c) $\mathbb{P}(-3 < X < 3)$

12. Számítsuk ki a standard normális eloszlás 0.9 és 0.2-kvantilisét!

13. Egy nagy populációban az emberek átlagos testmagassága 178 cm, a magasságok szórása 9 cm (normális eloszlásnak tekinthető). Mennyi ekkor annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott személy testmagassága 169 és 187 cm közé esik? Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezen személy magasabb 2 méternél? Most mennyi a 0.9 és 0.2-kvantilis?

14. Megfigyelték, hogy egy napszakban egy metrókocsiban az átlagos utaslétszám 80 fő, a szórás 20 fő. Mekkora a valószínűsége, hogy az utaslétszám egy kocsiban

    a) 50 fő alatt

    b) 80 és 100 fő között lesz, ha mindkét esetben feltételezzük, hogy az utaslétszám közelíthető normális eloszlással?

15. Egy X valószínűségi változó várható értéke 0, szórása 1. Melyik esetben valószínűbb, hogy $X > \frac{1}{2}$; akkor, ha X eloszlása normális, vagy akkor, ha egyenletes?

16. Mennyi annak a valószínűsége, hogy 12000 kockadobás során előforduló hatosok száma 1900 és 2150 közé esik? (Közelítsünk normális eloszlással!)

17. Határozzuk meg azt a k egész számot, amelyre igaz, hogy annak a valószínűsége, hogy 1000 érmedobás során a fejek száma 490 és k közé esik kb. 0.5! (Közelítsünk normális eloszlással!)