

# Matematika B4

## CHT feladatok

2005. november 9.

*Feladatok:*

1. Mennyi annak a valószínűsége, hogy 12000 kockadobás során előforduló hatosok száma 1900 és 2150 közé esik?
2. Határozzuk meg azt a  $k$  egész számot, amelyre igaz, hogy annak a valószínűsége, hogy 1000 érmédobás során a fejek száma 490 és  $k$  közé esik, kb. 0.5!

*Megoldás:* A fejdobás valószínűsége  $1/2$ . Keressük azt a  $k$  számot, amelyre  $P(490 < \text{fej dobások száma} < k) \approx 0.5$ . Normális eloszlással fogunk közelíteni. Vegyük észre, hogy a fejdobások számát felírhatjuk  $\sum_{i=1}^{1000} X_i$  alakban, ahol  $X_i$  legyen 1, ha az  $i$ . dobás fej volt, különben 0 (így pont a fejdobásoknál veszünk egyet, ezek összege pedig az összes fejdobások száma). Mit tudunk  $X_i$ -kről?  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{1000}$  független valószínűségi változók, és eloszlásuk azonos:  $P(X_i = 1) = p$  és  $P(X_i = 0) = q$ , ahol esetünkben  $p = q = 1/2$ .  $X_i$  szórása:  $\sigma(X_i) = \sqrt{pq} = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ . Mennyi  $\sum_{i=1}^{1000} X_i$  szórása? Független valószínűségi változók esetén a szórásnégyzet adódik össze, így a szórás  $\sqrt{n}$ -szeresére változik, azaz  $\sigma(\sum_{i=1}^{1000} X_i) = \sqrt{n} \sqrt{pq} = \sqrt{1000 \frac{1}{2} \frac{1}{2}} = 5\sqrt{10}$ .

$\sum_{i=1}^{1000} X_i$  500 várható értékű  $5\sqrt{10}$  szórású valószínűségi változó

$(\sum_{i=1}^{1000} X_i) - 500$  0 várható értékű  $5\sqrt{10}$  szórású valószínűségi változó

$\frac{(\sum_{i=1}^{1000} X_i) - 500}{5\sqrt{10}}$  0 várható értékű 1 szórású valószínűségi változó, ezt közelíthetjük standard normálissal.

Oldjuk meg a feladatot!

$$P(490 < \sum_{i=1}^{1000} X_i < k) = P(490 - 500 < (\sum_{i=1}^{1000} X_i) - 500 < k - 500) =$$

$$P\left(\frac{490 - 500}{5\sqrt{10}} < \frac{(\sum_{i=1}^{1000} X_i) - 500}{5\sqrt{10}} < \frac{k - 500}{5\sqrt{10}}\right) = \Phi\left(\frac{k - 500}{5\sqrt{10}}\right) - \Phi\left(\frac{490 - 500}{5\sqrt{10}}\right) \approx$$

$$\Phi\left(\frac{k - 500}{5\sqrt{10}}\right) - \Phi(-0.632) \approx \Phi\left(\frac{k - 500}{5\sqrt{10}}\right) - 0.263 \approx 0.5$$

A táblázatot fordítva használva kikereshetjük, hogy mely értékhez tartozik  $0.5 + 0.263 = 0.763$  körüli érték. Ez a 0.716 körül fog előfordulni. Így:

$$\frac{k - 500}{5\sqrt{10}} \approx 0.716 \Rightarrow k \approx 511$$

3. Hányszor kell egy érmevel dobnunk ahhoz, hogy 0.99-nál nagyobb valószínűséggel a fej eredmények száma a dobások számának 49%-a és 51%-a közé essen?

*Megoldás:* Feltehetően sokszor, ezért normális eloszlással közelítünk. Mint gyakorlaton láttuk, az érmédobás

szórása:  $\sqrt{pq}$ , ahol mind a fej, mind az írás valószínűsége  $1/2$ ,  $1/2$ , azaz  $\sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ . Tegyük fel, hogy  $k$ -szor kell dobunk. A fejdobásokra gondolhatunk úgy, mint ha vennénk egy  $k$  tagú összeget, amelynek minden tagja vagy 0, vagy 1. Az 1-eseknek feleltessük meg a fejeket, a 0-ásoknak az írásokat. Ekkor  $P(X_i = 0) = P(X_i = 1) = 1/2$  minden  $i$ -re (ekkor az összeg pont a fejek száma).  $\sum_{t=1}^k X_i$  szórása, mivel  $X_i$ -k függetlenek, ezért az összeg szórása  $\sqrt{n}$ -szerese  $X_i$  szórásának.

$$\sum_{t=1}^k X_i \quad k/2 \text{ várható értékű, } \sqrt{k \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{k}/2 \text{ szórású}$$

$$(\sum_{t=1}^k X_i) - k/2 \quad 0 \text{ várható értékű, } \sqrt{k}/2 \text{ szórású}$$

$$\frac{(\sum_{t=1}^k X_i) - k/2}{\sqrt{k}/2} \quad 0 \text{ várható értékű, } 1 \text{ szórású}$$

Osszuk le az összeget  $k$ -val, hogy az átlagot kapjuk. Alakítsuk át a képletet úgy, hogy 0 várható értékű, 1 szórású valószínűségű változót kapjunk, és utána becslünk normálissal:

$$P(0.49 < \frac{\sum_{t=1}^k X_i}{k} < 0.51) = P(0.49 - 0.5 < \frac{(\sum_{t=1}^k X_i) - k/2}{k} < 0.51 - 0.5)$$

$$P(-2 * 0.01 < \frac{(\sum_{t=1}^k X_i) - k/2}{k/2} < 2 * 0.01) = P(-0.02 < \frac{(\sum_{t=1}^k X_i) - k/2}{k/2} < 0.02) =$$

$$P(-0.02\sqrt{k} < \frac{(\sum_{t=1}^k X_i) - k/2}{\sqrt{k}/2} < 0.02\sqrt{k}) \approx \Phi(0.02\sqrt{k}) - \Phi(-0.02\sqrt{k}) = 0.99$$

Az utolsó egyenlőség a feladat szövege miatt van, az utolsó előttinél használunk normális eloszlással való közelítést, a többi elemi átalakítás. Vegyük észre, hogy:

$$\Phi(0.02\sqrt{k}) - \Phi(-0.02\sqrt{k}) = 2 * \Phi(0.02\sqrt{k}) - 1 = 0.99 \Rightarrow \Phi(0.02\sqrt{k}) = 0.995$$

Táblázatból kiolvasható, hogy a  $\Phi$  függvény körül-belül 2.576-nél lesz 0.995. Innen:  $0.02\sqrt{k} = 2.576$ , ahonnan kifejezhető  $k$ , azaz a feladatban leírt pontosság eléréséhez dobjunk legalább 16590-szer.

4. Dömötör ruletkezik a kaszinóban. Minden egyes körben 10 petákat tesz 'piros'-ra. 100 játék után 300 peták a vesztesége. Jogos-e a gyanúja, hogy svindliz a croupier? (A rulett-körön összesen 37 mező van 0-tól 36-ig számozva. Ezek közül egy (a 0 jelű) zöld, a fennmaradó 36-ból pedig 18 piros és 18 fekete.)

*Megjegyzés:* Azt válaszoljuk meg, hogy mennyi arra a valószínűség, hogy legalább 300 peták a vesztesége. Ha ezen valószínűség is kicsi, akkor abból intuitíven következik, hogy csal a croupier?