Gyakorlatok

2010. tavasz

Tartalomjegyzék

1. Közönséges differenciálegyenletek

1.1. Bevezető

Néhány egyszerű példa az alapfogalmak megértéséhez:

1. Feladat: Mutassuk meg, hogy

$$y = \mathrm{e}^x \int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t + 3\,\mathrm{e}^x$$

megoldása az alábbi differenciálegyenletnek!

$$y' - y = \mathrm{e}^{x+x^2}$$

Megoldás.
(Ez egy elsőrendű differenciálegyenlet. Azt, hogy a függvény megoldása a differenciálegyenletnek, mondjuk úgy is, hogy kielégíti a differenciálegyenletet.)
A megadott függvény deriválható, mert deriválható függvények összetétele. (Felhívjuk a figyelmet az integrálfüggvényre, emlékezzünk az integrálszámítás II. alaptételére is, az integrandusz folytonos!)

$$y' = (\mathrm{e}^x)' \cdot \int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^x \cdot \left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)' + (3\,\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x \cdot \int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{x^2} + 3\,\mathrm{e}^x$$

Behelyettesítve a differenciálegyenlet bal oldalába y-t és y'-öt:

$$y' - y = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{x^2} = \mathrm{e}^{x+x^2}$$

Tehát valóban a jobb oldalt kaptuk.

2. Feladat:

$$y'' = \mathrm{e}^{-3x} + 2x$$

a) Adjuk meg a differenciálegyenlet általános megoldását!
b) Adjuk meg azt a partikuláris megoldást, mely eleget tesz az $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ kezdeti feltételeknek!

Megoldás.

a) A differenciálegyenletből: $\quad y' = -\dfrac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-3x} + x^2 + C_1$

Ebből az általános megoldás: $\quad y = \dfrac{1}{9}\,\mathrm{e}^{-3x} + \dfrac{x^3}{3} + C_1\,x + C_2\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

b) $y(0) = 1$: a megoldásban x helyére 0-át, y helyére 1-et helyettesítve:

$$1 = \frac{1}{9} + C_2 \quad \Longrightarrow \quad C_2 = \frac{8}{9}$$

$y'(0) = 2$: az y'-re kapott egyenletben elvégezve a helyettesítést $(x = 0,\ y' = 2)$

$$2 = -\frac{1}{3} + C_1 \quad \Longrightarrow \quad C_1 = \frac{7}{3}$$

Így a keresett partikuláris megoldás:

$$y = \frac{1}{9}\,\mathrm{e}^{-3x} + \frac{x^3}{3} + \frac{7}{3}\,x + \frac{8}{9}$$

1.2. Szétválasztható változójú differenciálegyenletek

Foglaljuk össze a lényeget a példamegoldás előtt!

3. Feladat:

> Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet!
>
> $$y' = \frac{x}{y}\ e^{2x-3y^2}, \qquad y \neq 0$$

Megoldás.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-3y^2}}{y}\ x\,e^{2x}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\int \frac{y}{e^{-3y^2}}\ dy}_{\frac{1}{6}\int 6y\ e^{3y^2}\ dy} = \underbrace{\int x\,e^{2x}\ dx}_{\text{parciális integrálás}}$$

$$\ldots$$

Így a megoldás:

$$\frac{1}{6}\ e^{3y^2} = \frac{x}{2}\ e^{2x} - \frac{1}{4}\ e^{2x} + C\,, \qquad C \in \mathbb{R}$$

Nem kell erőltetni az y-ra való kifejezést. De, ha kifejezzük, akkor ne felejtsük el a $\pm$-t! Adott $y(x_0) = y_0$ kezdeti érték probléma megoldásánál természetesen csak az egyik előjel szerepel majd, hiszen a megoldás egyértelmű, mert $y_0 > 0$, vagy $y_0 < 0$.

4. Feladat:

> $$y' = \frac{y-2}{x\,y}\,, \qquad x \neq 0\,, \qquad y \neq 0$$
>
> a) Oldja meg a differenciálegyenletet!
> b) Oldja meg az $y(1) = 2$, $y(1) = 3$, illetve az $y(-1) = -3$ kezdeti érték problémákat!

Megoldás.

a) $y \equiv 2$ megoldás. (Persze az $x > 0$, vagy $x < 0$ része!)
(Jó lenne felrajzolni azokat a síkrészeket, ahova eső kezdeti érték probléma egyértelműen megoldható)
Ha $y \neq 2$:

$$\int \underbrace{\frac{y}{y-2}}_{1+\frac{2}{y-2}}\ dy = \int \frac{1}{x}\ dx$$

Innen a megoldás:

$$y + 2\ln|y-2| = \ln|x| + C$$

b) $y(1) = 2\ :\quad y \equiv 2$

$y(1) = 3\ :\quad \cdots\quad y + 2\,\ln(y-2) \;=\; \ln x + 3$

$y(-1) = -3\ :\quad \cdots\quad y + 2\,\ln(2-y) \;=\; \ln(-x) - 3 + 2\,\ln 5$

Hívjuk fel a figyelmet az abszolút érték jelek elhagyására!

5. Feladat:

Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y' \;=\; \frac{y^2 + 4y + 9}{(x-1)\,(x+5)}\,, \qquad x \neq 1\,,\quad x \neq -5$$

Megoldás.

$$\int \frac{1}{(y+2)^2 + 5}\;\mathrm{d}y \;=\; \int \frac{1}{(x-1)\,(x+5)}\;\mathrm{d}x$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{5}\,\sqrt{5}\;\mathrm{arctg}\,\frac{y+2}{\sqrt{5}} \;=\; \frac{1}{6}\,\left(\ln|x-1| - \ln|x+5|\right) \;+\; C$$

6. Feladat:

A rádium bomlási sebessége arányos a pillanatnyi rádiummennyiséggel.
Tudjuk, hogy a rádium felezési ideje 1600 év.
A kiindulási anyag mennyiségének hány százaléka bomlik fel 100 év alatt?

Megoldás.
Jelöljük $R(t)$-vel a rádium mennyiségét a t időpontban, k-val az arányossági tényezőt (pozitívnak választjuk).
A kapott differenciálegyenlet:

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} \;=\; -k\;R$$

(A negatív előjel mutatja, hogy a bomlás következtében a rádium mennyisége csökken.) A szétválasztható változójú differenciálegyenlet megoldása: $\quad\cdots\quad R \;=\; C\,\mathrm{e}^{-k\,t}$
Ha a $t = 0$ időpontban a kiindulási anyag mennyisége R_0, tehát az $R(0) = R_0$ kezdeti érték problémánk van:

$$R_0 = C\,\mathrm{e}^{-k\cdot 0} \quad\Longrightarrow\quad C = R_0$$

Tehát a keresett partikuláris megoldás: $\quad R \;=\; R_0\,\mathrm{e}^{-k\,t}$.
Mivel ismerjük a felezési időt, meghatározható a k arányossági tényező:

$$\frac{1}{2}\,R_0 \;=\; R_0\,\mathrm{e}^{-k\cdot 1600} \quad\Longrightarrow\quad k \;=\; \frac{\ln 2}{1600}$$

Tehát a rádium mennyisége az idő függvényében:

$$R(t) \;=\; R_0\,\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{1600}\,t}$$

Így a 100 év múlva megmaradt mennyiség:

$$R(100) = R_0\, \mathrm{e}^{-\dfrac{\ln 2}{16}} = R_0\, \mathrm{e}^{-0{,}0433} \quad \Longrightarrow \quad \frac{R(100)}{R_0} = \mathrm{e}^{-0{,}0433} = 0,958$$

Vagyis $95,8\,\%$, tehát az eredeti mennyiség $4,2\,\%$- a bomlott el.

További feladatok:

Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket!

7. Feladat: $\boxed{y' = (3x-1)^5\,(y^2-4y)}$

Megoldás.
$y \equiv 0$ és $y \equiv 4$ megoldás. Egyébként:

$$\int \frac{1}{y\,(y-4)}\ \mathrm{d}y = \int (3x-1)^5\ \mathrm{d}x$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{4}\ (-\ln|y| + \ln|y-4|) = \frac{1}{3}\ \frac{(3x-1)^6}{6} + C$$

Keresse meg az $y(0) = 2$, illetve az $y(0) = 4$ kezdeti feltételeket kielégítő megoldásokat!

$$\ldots$$

8. Feladat: $\boxed{y' = \dfrac{\operatorname{sh} y}{\operatorname{ch} y}\ x\,(2x^2+1)^6}$

Megoldás.
$y \equiv 0$ megoldás. Ha $y \neq 0$:

$$\int \frac{\operatorname{ch} y}{\operatorname{sh} y}\ \mathrm{d}y = \int x\,(2x^2+1)^6\ \mathrm{d}x$$

$$\ln|\operatorname{sh} y| = \frac{1}{4}\ \frac{(2x^2+1)^7}{7} + C$$

9. Feladat: $\boxed{y' = (\operatorname{ctg} y)\ \ln(x-2)\,, \qquad y(3) = \pi/3\,,\ \text{illetve}\ \ y(3) = \pi/2}$

Megoldás.

$x > 2\,, \quad y \neq k\,\pi$

$y \equiv \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi$ megoldás. Egyébként:

$$\int \frac{\sin y}{\cos y}\ \mathrm{d}y \;=\; \int \ln(x-2)\ \mathrm{d}x$$

$\dfrac{f'}{f}$ alakú parciális integrálás

$\dots$

$$-\ln|\cos y| \;=\; x\ \ln(x-2) \;-\; x \;-\; 2\,\ln(x-2) \;+\; C$$

$y(3) = \pi/3\ :\quad \dots\qquad C = 3 + \ln 2\,,$ így

$$-\ln(\cos y) \;=\; x\ \ln(x-2) \;-\; x \;-\; 2\,\ln(x-2) \;+\; 3 + \ln 2\,,$$

$$y \in (0, \frac{\pi}{2}) \ \text{ és }\ x > 2$$

$y(3) = \pi/2\ :\qquad y \equiv \dfrac{\pi}{2} \qquad x > 2$ része

10. Feladat: $\boxed{y' \;=\; \dfrac{2y^2+3}{y}\ \ 2x\,\mathrm{e}^{-4x^2}\ , \qquad y \neq 0}$

Megoldás.

$$\int \frac{y}{2y^2+3}\ \mathrm{d}y \;=\; \int\ 2x\,\mathrm{e}^{-4x^2}\mathrm{d}x$$

$$f'/f \qquad\qquad f'\,\mathrm{e}^f$$

$$\frac{1}{4}\int \frac{4y}{2y^2+3}\ \mathrm{d}y \;=\; -\frac{1}{4}\int\ -4\cdot 2\,x\,\mathrm{e}^{-4x^2}\mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{4}\ln(2y^2+3) \;=\; -\frac{1}{4}\ \mathrm{e}^{-4x^2} \;+\; C$$

Vagyis

$$\ln(2y^2+3) \;=\; -\mathrm{e}^{-4x^2} \;+\; C$$

11. Feladat: $\boxed{y' \;=\; (y+3)^2\ \ \arcsin x\ , \qquad |x| < 1}$

Megoldás.

$y \equiv -3\,,\ |x| < 1$ része megoldás. Ha $y \neq -3$:

$$\int \frac{1}{(y+3)^2}\ \mathrm{d}y \;=\; \int 1\cdot\arcsin x\ \mathrm{d}x$$

parc. int.

$$\dots$$

$$\frac{(y+3)^{-1}}{-1} = x \ \arcsin x + \frac{1}{2} \ \frac{\sqrt{1-x^2}}{\frac{1}{2}} + C$$

12. Feladat: $\boxed{y' = \dfrac{y^2+3}{y^2+1} \quad 2x \ \mathrm{arctg}\, 2x}$

Megoldás.

$$\int \frac{y^2+1}{y^2+3} \ \mathrm{d}y = \int 2x \ \mathrm{arctg}\, 2x \ \mathrm{d}x$$

áltört parc. int.

$$y - \frac{2}{3} \ \frac{\mathrm{arctg}\, \frac{y}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = x^2 \ \mathrm{arctg}\, 2x - \frac{1}{2} \left(x - \frac{\mathrm{arctg}\, 2x}{2} \right) + C$$

13. Feladat:

$$y' = \frac{(2y^2-8) \ \mathrm{arctg}\, x}{y\,(1+x^2)} \ , \quad y \neq 0$$

a) Határozza meg az $x_0 = 0$, $y_0 = -1$ ponton áthaladó megoldást!
b) Határozza meg az $x_0 = 0$, $y_0 = -2$ ponton áthaladó megoldást!

Megoldás.
$y \equiv \pm 2$ megoldás. Ha $|y| \neq 2$:

$$\frac{1}{4} \int \frac{4y}{2y^2-8} \ \mathrm{d}y = \int \frac{1}{1+x^2} \ \mathrm{arctg}\, x \ \mathrm{d}x$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{4} \ \ln|2y^2-8| = \frac{\mathrm{arctg}^2\, x}{2} + C \ , \quad C \in \mathbb{R}$$

a) $y(0) = -1$: $\quad \dots \quad C = \dfrac{1}{4} \ \ln 6$

$$\frac{1}{4} \ \ln|2y^2-8| = \frac{\mathrm{arctg}^2\, x}{2} + \frac{1}{4} \ \ln 6 \ , \ y < 0$$

b) $y(0) = -1$: $\quad y \equiv -2$

14. Feladat: $\boxed{y' = \dfrac{y^2 - 9}{x^2 + 25}}$

Megoldás.

...

15. Feladat: $\boxed{y' = y \ \ln^2 y \ \ \ln x \,, \quad x > 0 \,, \quad y > 0}$

Megoldás.

...

16. Feladat:

Írjuk fel azoknak az első negyedbe eső síkgörbéknek az egyenletét, melyekre teljesül,hogy bármely pontjában húzott érintőjének a koordinátatengelyek közötti szakaszát az érintési pont felezi.

Megoldás.

...

1.3. Lineáris elsőrendű differenciálegyenlet

Beszéljük meg először a megoldás menetét!
($y_{iá} = y_H + y_{ip}$, y_H : szétválasztható változójú , y_{ip} : állandó variálásával)
A homogén egyenlet megoldásánál nem alkalmazható a képlet, minden esetben végig kell csinálni az alábbi két példában mutatott módszerek valamelyikével.

17. Feladat:

Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y' - \frac{x}{x^2 + 4} \ y = 6x \,, \qquad y(0) = 4$$

Megoldás. $y_{iá} = y_H + y_{ip}$

(H): $\quad y' - \dfrac{x}{x^2+4}\, y = 0 \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x}{x^2+4}\, y \,, \qquad y \equiv 0$ megoldás

Ha $y \neq 0$:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+4}\, \mathrm{d}x$$

$$\Longrightarrow \quad \ln|y| = \frac{1}{2} \ln(x^2+4) + C_1 \Longrightarrow \quad |y| = \mathrm{e}^{C_1}\, \mathrm{e}^{\ln\sqrt{x^2+4}}$$

$$\Longrightarrow \quad y = \pm \mathrm{e}^{C_1} \sqrt{x^2+4}\,, \text{ illetve } y \equiv 0$$

Tehát a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_{H\text{ált}} = C\sqrt{x^2+4}\,, \qquad C \in \mathbb{R}$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának keresése:

$$y_p = c(x)\sqrt{x^2+4}\,, \qquad y_p' = c'(x)\sqrt{x^2+4} + c(x)\, \frac{1}{2\sqrt{x^2+4}}\, 2x$$

Behelyettesítve (I)-be: $\quad \cdots$

$$c'(x) = \frac{6x}{\sqrt{x^2+4}} \qquad \Longrightarrow \quad c(x) = 3\int 2x \cdot (x^2+4)^{-1/2}\, \mathrm{d}x = 6\sqrt{x^2+4} + K$$

Mivel egyetlen y_p megoldást keresünk, $K = 0$ választható, így

$$y_p = 6\,(x^2+4)\,.$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$y_{I\text{ált}} = C\sqrt{x^2+4} + 6\,(x^2+4) \qquad (C \in \mathbb{R})$$

Az y(0)=4 kezdetiérték probléma megoldása:

$$4 = C \cdot 2 + 24 \quad \Longrightarrow \quad C = -10 \quad \Longrightarrow \quad y = -10\sqrt{x^2+4} + 6\,(x^2+4)$$

18. Feladat:

> $y' - \dfrac{2}{x}\, y = x\,, \qquad x \neq 0$
>
> a) Általános megoldás?
> b) $y(1) = 3$ kezdeti feltételt kielégítő megoldás?
> c) $y(-\mathrm{e}) = 3\,\mathrm{e}^2$ kezdeti feltételt kielégítő megoldás?

Megoldás.

a) Minden olyan tartományban, melyben $x \neq 0$ a differenciálegyenlet egyértelműen megoldható.

(H): $\quad y' - \dfrac{2}{x}\, y = 0 \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2}{x}\, y$

Az előadásból tudjuk, hogy $y_{H\text{ált}} = C \cdot Y(x)$ alakú, ahol Y a homogén egyenlet egy megoldása, mely seholse nulla. Ezt kihasználva a megoldás kevesebb munkával is megkapható.

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \ln y = 2\,\ln x\,, \qquad \text{így} \;\; y = x^2 \quad (Y = x^2)$$

Tehát a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_{H\text{ált}} = C\,x^2\,, \quad C \in \mathbb{R}$$

Kérdés:
$Y(x) = x^2$ vesz fel 0 értéket, márpedig a bizonyításban $\mathrm{e}^{\cdots}$ alakúra jött ki (a jegyzetben $Y(x)$ helyett $\varphi(x)$ jelölés van), tehát nem lehetne 0. Hol az ellentmondás?
Válasz:
Az elején beszéltünk róla, hogy az $x > 0$, vagy az $x < 0$ félsíkon dolgozunk és ekkor már valóban teljesül, hogy $Y(x) \neq 0$ a vizsgált tartományban.

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának keresése:

$$y_p = c(x)\,x^2\,, \qquad y_p' = c'(x)\,x^2 \,+\, c(x)\,2x$$

Behelyettesítve (I)-be: $\cdots$

$$c'(x) = \frac{1}{x} \quad \Longrightarrow \quad c(x) = \ln|x|$$

$$y_p = x^2\,\ln|x| \quad \Longrightarrow \quad y_{I\text{ált}} = C\,x^2 + x^2\,\ln|x|$$

b) $y(1) = 3$ kezdeti érték probléma megoldása: $3 = C + \ln 1$, tehát $C = 3$.
Így a keresett megoldás: $y = 3\,x^2 + x^2\,\ln x$

c) $y(-\mathrm{e}) = 3\,\mathrm{e}^2$ kezdeti érték probléma megoldása: $3\,\mathrm{e}^2 = C\,\mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^2 \cdot 1$, tehát $C = 2$.
Így a keresett megoldás: $y = 2\,x^2 + x^2\,\ln(-x)$
(Itt már ne szerepeljen abszolút érték a megoldásban!)

19. Feladat:

Írja fel az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y' \,-\, 3x^2\,y \,=\, 6x^2$$

Megoldás.

A differenciálegyenlet lineáris elsőrendű, de ugyanakkor szeparábilis is. Így rövidebb a megoldás, ezért most így oldjuk meg:

$$y' \,=\, 3x^2\,y \,+\, 6x^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \,=\, 3x^2\,(y+2)$$

$y \equiv -2$ megoldás. Ha $y \neq -2$:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y+2} = \int 3x^2\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \ln|y+2| \,=\, x^3 + C_1$$

$$\ldots$$

$$y+2 = \pm e^{C_1}\, e^{x^3}\ , \text{ illetve } y \equiv -2 \quad \Longrightarrow \quad y = -2 + C\, e^{x^3}\ , \quad C \in \mathbb{R}$$

M Oldja meg a differenciálegyenletet lineáris elsőrendűként is és hasonlítsa össze az eredményeket!

20. Feladat:

Írja fel az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y' + 2\,e^x\, y = 3\,e^{-2\,e^x}$$

Megoldás.

$$\text{(H)} \quad y' + 2\,e^x\, y = 0 \qquad \ldots \qquad y_H = C\, e^{-2\,e^x}\ , \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\text{(I)} \quad y_p = c(x)\, e^{-2\,e^x} \qquad \ldots \qquad c(x) = 3x$$

$$\Longrightarrow \quad y_{I\text{ált}} = y_H + y_p = C\, e^{-2\,e^x} + 3x\, e^{-2\,e^x}$$

21. Feladat:

Írja fel az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y' = -\frac{2}{x}\, y + \frac{1}{1+x^2}\ , \qquad x \neq 0$$

Megoldás.

$$\text{(H)} \quad y' + \frac{2}{x}\, y = 0 \qquad \ldots \qquad y_H = \frac{C}{x^2}\ , \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\text{(I)} \quad y_p = \frac{c(x)}{x^2} \quad \ldots \quad c'(x) = \frac{x^2}{1+x^2} \quad \Longrightarrow \quad c(x) = x - \operatorname{arctg} x$$

$$\Longrightarrow \quad y_{I\text{ált}} = y_H + y_p = \frac{C}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$$

22. Feladat:

Írja fel az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y' + \frac{5}{x}\, y = e^x\, x^{-4}\ , \qquad x \neq 0$$

Megoldás.

$$\text{(H)} \quad y' + \frac{5}{x}\, y = 0 \qquad \ldots \qquad y_H = \frac{C}{x^5}\ , \quad C \in \mathbb{R}$$

(I) $y_p = \dfrac{c(x)}{x^5}$ $\quad \ldots \quad c'(x) = x\,\mathrm{e}^x \quad \Longrightarrow \quad c(x) = (x-1)\,\mathrm{e}^x$ (parc. integrálással)

$$\Longrightarrow \quad y_{I\text{ált}} = y_H + y_p = \frac{C}{x^5} + \frac{(x-1)\,\mathrm{e}^x}{x^5}$$

1.4. Új változó bevezetése

Mi mindig megadjuk, hogy milyen helyettesítést alkalmazzunk.

23. Feladat:

$u = \dfrac{y}{x}$ helyettesítéssel oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!
$x\,y' = y\,(1 + \ln y - \ln x)\,, \qquad x > 0\,, \quad y > 0$

Megoldás.
$y(x) = u(x) \cdot x \quad \Longrightarrow \quad y' = u' \cdot x + u \cdot 1$

Behelyettesítve a $\quad y' = \dfrac{y}{x}\left(1 + \ln \dfrac{y}{x}\right)$ differenciálegyenletbe:

$$u'\,x + u = u(1 + \ln u) \quad \Longrightarrow \quad u'\,x = u\,\ln u \text{ (szeparábilis)}$$

$x > 0\,,\ y > 0$ miatt $u > 0\,.$

$u \equiv 1$ egyensúlyi helyzet , tehát $y = x$ megoldás.

Ha $u \neq 1$:

$$\int \underbrace{\frac{1}{u \cdot \ln u}}_{f'/f \text{ alakú}}\, \mathrm{d}u = \int \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x$$

Innen a megoldás:

$$\ln|\ln u| = \ln|x| + C_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R}) \quad \Longrightarrow \quad |\ln u| = \mathrm{e}^{C_1}\,|x| = K\,|x| \quad (K > 0)$$

$$\Longrightarrow \quad \ln u = \pm K\,x \quad \Longrightarrow \quad u = \mathrm{e}^{\pm K\,x}\,, \quad \text{illetve} \quad u \equiv 1$$

Így írhatjuk a következő alakban is: $\quad u = \mathrm{e}^{C\,x}\,,\ C \in \mathbb{R}$

A visszahelyettesítést elvégezve kapjuk a végeredményt:

$$y = x\,\mathrm{e}^{Cx}\,,\ C \in \mathbb{R}$$

24. Feladat:

Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket! Szükség esetén alkalmazza az $u = x + y$ helyettesítést!
a) $\quad y' = x + y$
b) $\quad y' = \dfrac{1}{x+y}$

Megoldás.

a) Ez lineáris elsőrendű differenciálegyenlet. (Hf.)

b) Ez csak helyettesítéssel oldható meg: $(x + y \neq 0)$
$u(x) := x + y(x) \implies y = u - x \implies y' = u' - 1$
Behelyettesítve:
$u' - 1 = \frac{1}{u} \implies u' = 1 + \frac{1}{u} \implies \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{u+1}{u}$
Ez szeparálható differenciálegyenlet.
$u \equiv -1$ megoldás, tehát $y = -1 - x$ megoldja a differenciálegyenletet.
Ha $u \neq -1$:

$$\int \underbrace{\frac{u}{u+1}}_{\frac{u+1-1}{u+1} = 1 - \frac{1}{u+1}} \mathrm{d}u = \int \mathrm{d}x \implies u - \ln|u+1| = x + C$$

A visszahelyettesítést elvégezve kapjuk a végeredményt:

$$x + y - \ln|x + y + 1| = x + C ,$$

azaz $$y - \ln|x + y + 1| = C , \quad \text{illetve} \quad y = -1 - x$$

25. Feladat:

$u = y^4$ helyettesítéssel oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$x\,y' + y = \frac{\ln x}{y^3} , \qquad y \neq 0 \quad , \quad x > 0$$

Adja meg az $y(1) = -1$ kezdeti feltételnek eleget tevő megoldást!

Megoldás.
$u' = 4\,y^3\,y'$
Ezért átrendezzük a differenciálegyenletet: $x\,y^3\,y' + y^4 = \ln x$
Behelyettesítünk:
$\frac{1}{4}\,x\,u' + u = \ln x \implies u' + \frac{4}{x}\,u = \frac{4}{x}\,\ln x$
Lineáris elsőrendű differenciálegyenletet kaptunk.
(H): $u' + \frac{4}{x}\,u = 0 \quad \cdots \quad u_H = \frac{C}{x^4}\ ; \quad C \in \mathbb{R}$
(I): $u_{ip} = \frac{c(x)}{x^4} \quad \cdots \quad c' = 4x^3\ \ln x$
Innen parciális integrálással kapjuk:
$c(x) = x^4\ \ln x - \frac{x^4}{4} \implies u_{ip} = \ln x - \frac{1}{4} \implies u_{iá} = u_H + u_{ip} = \frac{C}{x^4} + \ln x - \frac{1}{4}$
Visszahelyettesítéssel az eredeti differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y^4 = \frac{C}{x^4} + \ln x - \frac{1}{4} , \quad C \in \mathbb{R}$$

$y(1) = -1\ : \quad 1 = C + 0 - \frac{1}{4} \implies C = \frac{5}{4}$

Így a keresett partikuláris megoldás:

$$y = -\sqrt[4]{\frac{5}{4\,x^4} + \ln x - \frac{1}{4}}$$

26. Feladat:

$u(x) = y^3(x) + x^2$ helyettesítéssel oldja meg az alábbi kezdeti érték problémát!

$$3\,y^2\,y' = -2x + \frac{\cos x}{\sin\left(y^3 + x^2\right)}\ , \qquad y(0) = \sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}$$

Megoldás.

$u' = 3\,y^2\,y' + 2x \quad\Longrightarrow\quad 3\,y^2\,y' = u' - 2x$

Elvégezve a behelyettesítést:

$u' - 2x \;=\; -2x + \dfrac{\cos x}{\sin u} \quad\Longrightarrow\quad \displaystyle\int \sin u\ \mathrm{d}u \;=\; \int \cos x\ \mathrm{d}x$

A megoldás:

$$-\cos u = \sin x + C \quad\Longrightarrow\quad -\cos\left(y^3 + x^2\right) = \sin x + C$$

$y(0) = \sqrt[3]{\dfrac{\pi}{4}}$:

$$-\cos\left(y^3 + x^2\right) = \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\ , \quad \text{vagyis}$$

$$y = \sqrt[3]{\arccos\left(-\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - x^2}$$

27. Feladat:

Az $u = x + y$ új változó bevezetésével oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y' \;=\; \frac{2}{x+y}\ , \qquad x > 0 \quad , \quad y > 0$$

Megoldás.

$y = u - x \quad\Longrightarrow\quad y' = u' - 1$

Behelyettesítve:

$u' - 1 = \dfrac{2}{u} \quad\Longrightarrow\quad u' \;=\; \dfrac{u+2}{u}$: szeparábilis differenciálegyenlet.

Ezt megoldja:

$u \equiv -2$ (egyensúlyi helyzet) $\quad\Longrightarrow\quad x + y = -2$: ez nem felel meg a kikötéseknek.

$u \neq -2$:

$$\int \frac{u}{u+2}\,\mathrm{d}u \;=\; \int \mathrm{d}x \qquad \ldots \qquad u \;-\; \ln\left(u+2\right)^2 \;=\; x + C$$

Így a megoldás:

$$x + y \;-\; \ln\left(x + y + 2\right)^2 \;=\; x + C\ , \qquad C \in \mathbb{R}$$

28. Feladat:

Vezesse be az $u = y^3$ új változót az alábbi differenciálegyenletbe, majd határozza meg az $y(0) = \dfrac{1}{2}$ kezdeti értékhez tartozó megoldását:

$$3y^2y' - 2y^3 = e^{2x} + x$$

Megoldás.

$u' = 3\,y^2\,y'$

Behelyettesítve:

$$u' - 2u = \mathrm{e}^{2x} + x \ \text{ : lineáris elsőrendű differenciálegyenlet.}$$

$$\ldots$$

$$u_{I\text{ált}} = C\,\mathrm{e}^{2x} + x\,\mathrm{e}^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$$

Így az eredeti differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y^3 = C\,\mathrm{e}^{2x} + x\,\mathrm{e}^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$$

$y(0) = \dfrac{1}{2}$: $\quad \dfrac{1}{8} = C - \dfrac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad C = \dfrac{3}{8}$

Tehát a keresett partikuláris megoldás:

$$y^3 = \frac{3}{8}\,\mathrm{e}^{2x} + x\,\mathrm{e}^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$$

$$\left(y = \sqrt[3]{\frac{3}{8}\,\mathrm{e}^{2x} + x\,\mathrm{e}^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}} \right)$$

29. Feladat:

Hajtsa végre az $u = y^3 + 2x$ helyettesítést az alábbi kezdetiérték problémánál!

$$3y^2\,y' = (y^3 + 2x + 1)^3\,\cos(\pi x) - 2\,, \qquad y(1) = -1$$

Milyen differenciálegyenlethez jutott?
Ne oldja meg a kapott differenciálegyenletet!

Megoldás.

$$u' = 3y^2\,y' + 2 \quad \Longrightarrow \quad 3y^2\,y' = u' - 2$$

Elvégezve a behelyettesítést:

$$u' - 2 = (u+1)^3\,\cos(\pi\,x) - 2 \quad \Longrightarrow \quad u' = (u+1)^3\,\cos(\pi\,x)$$

Szétválasztható változójú differenciálegyenletet kaptunk.

$y(1) = -1$: $\qquad u(1) = y^3 + 2x\big|_{x=1\,,\,y=-1} = -1 + 2 = 1$

1.5. Iránymező, izoklinák

30. Feladat:

a) Írja fel az

$$y' = \mathrm{e}^{y+2} - x$$

differenciálegyenlet izoklínáinak egyenletét! Rajzoljon fel kettőt!

b) Van-e lokális szélsőértéke a $P_0\,(\mathrm{e}, -1)$ ponton áthaladó megoldásnak P_0-ban?

Megoldás.

a) $y' = \boxed{\mathrm{e}^{y+2} - x = K} \implies y = \ln(x+K) - 2$ az izoklínák egyenlete

Pl. $K := 0 : y = \ln x - 2$ (Vonalelemek vízszintesek)

$K := -1 : y = \ln(x-1) - 2$ (Vonalelemek hajlásszöge: $-\dfrac{\pi}{4}$)

1. ábra

2. ábra

b) $y'(\mathrm{e}) = \mathrm{e}^{y+2} - x\big|_{x=\mathrm{e}\,,\,y=-1} = \mathrm{e} - \mathrm{e} = 0$: <u>lehet</u> lokális szélsőérték

$y'' = \mathrm{e}^{y+2}\,y' - 1\,; \quad y''(\mathrm{e}) = \mathrm{e}^1 \cdot 0 - 1 = -1 < 0 \implies$ lok. max.

31. Feladat:

$$y' = (y^2 - 4)\,x + x - 1$$

a) A sík mely pontjaiban párhuzamos az iránymező az $y = -x$ egyenessel? Vázoljuk ezeket a pontokat és jelöljünk be néhány vonalelemet!

b) Van-e lokális szélsőértéke vagy inflexiós pontja az $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ ponton átmenő megoldásnak a szóbanforgó pontban? (Feltéve, hogy van ilyen megoldás.)

Megoldás.

a) $y = -x$ meredeksége: -1

Az izoklínák egyenlete: $(y^2 - 4)\,x + x - 1 = K$

Most $K = -1$ érdekel bennünket:

$(y^2 - 4)\,x + x - 1 = -1 \implies (y^2 - 4 + 1)\,x = 0$

Ennek megoldása: $y^2 = 3$, tehát $y = \pm\sqrt{3}$, illetve $x = 0$.

3. ábra

b) $y(1) = 2$

$y'(1) = (y^2 - 4)\, x + x - 1|_{x=1\,,\, y=2} \;=\; 0\,,$ tehát lokális szélsőérték lehet itt.

$y'' \;=\; 2y \cdot y' \cdot x \;+\; (y^2 - 4) \cdot 1 \;+\; 1$

$y''(1) \;=\; 2y(1) \cdot y'(1) \cdot 1 \;+\; (y(1)^2 - 4) \cdot 1 \;+\; 1 \;=\; 1$

Tehát az adott pontban lokális minimuma van a megoldásfüggvénynek.
(Inflexiós pont nem lehet, mert $y''(1) \neq 0\,$.)

32. Feladat:

Az akárhányszor deriválható $y = y(x)\,,\ x \in \mathbb{R}$ megoldása az

$$y' \;=\; y^3 \;-\; x^2$$

differenciálegyenletnek és átmegy az $(1, 1)$ ponton.

a) Van-e ennek a megoldásnak lokális szélsőértéke az $x = 1$ helyen?

b) Írja fel ennek a megoldásnak az $x_0 = 1$ pont körüli harmadfokú $T_3(x)$ Taylor polinomját!

Megoldás.

a) $y(1) = 1$

$y'(1) = 1 - 1 \;=\; 0\,,$ tehát lokális szélsőérték lehet itt.

$y'' \;=\; 3\,y^2\,y' \;-\; 2x \quad\Longrightarrow\quad y''(1) \;= 0 - 2 \;=\; -2 < 0$

Tehát az adott pontban lokális maximuma van a megoldásfüggvénynek.
($y(1) \;=\; 1$ értékkel.)

b) Az $x_0 = 1$ bázispontú harmadrendű Taylor polinom:

$$T_3(x) \;=\; y(1) \;+\; \frac{y'(1)}{1!}\,(x-1) \;+\; \frac{y''(1)}{2!}\,(x-1)^2 \;+\; \frac{y'''(1)}{3!}\,(x-1)^3$$

(Még nem tanultuk, majd hamarosan tanuljuk. Az évközi zárthelyikben nem lesz ilyen példa, de vizsgán lehet.)

Még $y'''(1)$ hiányzik a behelyettesítéshez.

$y''' \;=\; 3\,(2\,y\,y')\,y' \;+\; 3\,y^2\,y'' \;-\; 2 \quad\Longrightarrow\quad y'''(1) \;=\; -8$

Elvégezve a behelyettesítést, kapjuk a keresett Taylor polinomot:

$$T_3(x) \;=\; 1 \;-\; \frac{2}{2}\,(x-1)^2 \;-\; \frac{8}{6}\,(x-1)^3$$

1.5.1. További gyakorló feladatok a témához:

33. Feladat: A Feladatgyűjteményből:

1.4.3. b), c) (Feltéve, hogy minden kezdeti érték problémának van megoldása.)
1.4.4.

34. Feladat:

$$y' = 3x^2 + 6y^2 - 18$$

a) Írja fel az $x_0 = 3$, $y_0 = 1$ ponton áthaladó megoldás adott pontbeli érintőegyenesének egyenletét!
b) Írja fel a differenciálegyenlet izoklínáinak egyenletét!
c) Hol lehet lokális szélsőértéke a megoldásfüggvényeknek? Rajzolja fel ezeket a pontokat!

35. Feladat:

$$y' = x^2 - y^2 , \qquad y(x_0) = y_0$$

a) Jelölje ki azokat a pontokat, melyeken a megoldásgörbe
- lokálisan növekedően,
- lokálisan csökkenően

halad át.
b) $^{++}$ Mely pontokban van lokális szélsőértéke a megoldásgörbéknek? Milyen jellegű?

36. Feladat: Tudjuk, hogy az

$$y' = y^2 - 2y + x^2$$

differenciálegyenletnek minden $y(x_0) = y_0$ kezdeti értékhez létezik pontosan egy megoldása, amely akárhányszor differenciálható.
a) Milyen lokális tulajdonsága van a $P_0(-1\,,\,1)$ ponton átmenő megoldásgörbének ebben a pontban?
b) Írja fel az izoklinák egyenletét! Rajzoljon fel néhányat!
Hol lehet lokális szélsőértéke a megoldásfüggvényeknek?
c) Vannak-e olyan megoldások, amelyeknek az $x = 0$ helyen inflexiós pontjuk van?

1.6. Magasabbrendű, homogén, lineáris, állandó együtthatós differenciálegyenletek

Oldja meg az alábbi homogén differenciálegyenleteket!

37. Feladat:

$$\boxed{y''' + 2y'' + y' = 0}$$

Megoldás.

$\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = \lambda\,(\lambda+1)^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 0\,,\ \lambda_{2,3} = -1 \quad$ (belső rezonancia)

$$y_H = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{-x} + C_3\,x\,\mathrm{e}^{-x}\,, \qquad C_1\,,\ C_2\,,\ C_3 \in \mathbb{R}$$

38. Feladat:

$$\boxed{y''' + 4\,y'' + 13\,y' = 0}$$

Megoldás.

$\lambda^3 + 4\,\lambda^2 + 13\,\lambda = \lambda\,(\lambda^2 + 4\,\lambda + 13) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 0\,,\ \lambda_{2,3} = -2 \pm j\,3$

$$y_H = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{-2x}\,\cos 3x + C_3\,\mathrm{e}^{-2x}\,\sin 3x\,, \qquad C_1\,,\ C_2\,,\ C_3 \in \mathbb{R}$$

39. Feladat:

Írjon fel egy olyan legalacsonyabbrendű valós konstans együtthatós homogén lineáris differenciálegyenletet, melynek megoldásai az alábbi függvények! Írja fel az adott differenciálegyenlet általános megoldását is!

a) $2\,\mathrm{e}^{5x} - \mathrm{e}^{-3x}$

b) $6x^2 + 5\,\mathrm{e}^{2x}$

c) $7x\,,\quad \sin 5x$

d) $3\,x^2\,\mathrm{e}^{2x}\,,\quad \mathrm{e}^{3x}$

e) $6 + \mathrm{e}^{3x}\,\sin x$

Megoldás.

a) e^{5x} miatt $\lambda_1 = 5$, e^{-3x} miatt $\lambda_2 = -3$
Így a karakterisztikus egyenlet:
$(\lambda - 5)\,(\lambda + 3) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda^2 - 2\lambda - 15 = 0$
A differenciálegyenlet:
$$y'' - 2y - 15 = 0$$
A differenciálegyenlet általános megoldása:
$$y_H = C_1\,\mathrm{e}^{5x} + C_2\,\mathrm{e}^{-3x}\,, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

b) x^2 miatt $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, e^{2x} miatt $\lambda_4 = 2$
Így a karakterisztikus egyenlet:
$(\lambda - 0)^3\,(\lambda - 2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda^4 - 2\lambda^3 = 0$
A differenciálegyenlet:
$$y^{IV} - 2y''' = 0$$
A differenciálegyenlet általános megoldása:
$$y_H = C_1 + C_2\,x + C_3\,x^2 + C_4\,\mathrm{e}^{2x}\,, \qquad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$$

c) a karakterisztikus egyenlet:
$(\lambda - 0)^2\,(\lambda - j\,5)\,(\lambda + j\,5) = \lambda^2\,(\lambda^2 + 25) = \lambda^4 + 25\,\lambda^2 = 0$
A differenciálegyenlet: $\quad y^{IV} + 25\,y'' = 0$
A differenciálegyenlet általános megoldása:
$$y_H = C_1 + C_2\,x + C_3\,\sin 5x + C_4\,\cos 5x\,, \qquad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$$

d) $(\lambda-2)^3\,(\lambda-3)=0\cdots$

e) $(\lambda-0)\,(\lambda-(3+j))\,(\lambda-(3-j))=\lambda\,((\lambda-3)-j)\,((\lambda-3)+j)=\lambda\,((\lambda-3)^2+1)=$
$=\lambda^3-6\lambda^2+10\,\lambda=0 \quad \cdots$

1.7. Magasabbrendű, inhomogén, lineáris, állandó együtthatós differenciálegyenletek

40. Feladat: $\boxed{y''-5y'+6y=2\,\sin 2x}$

Megoldás.

$\lambda^2-5\lambda+6=0 \quad\Longrightarrow\quad \lambda_1=2\,,\ \lambda_2=3$

A homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_H=C_1\,\mathrm{e}^{2x}+C_2\,\mathrm{e}^{3x}$$

$$\begin{array}{r|l} 6\cdot & y_{ip}:=A\,\sin 2x\,+\,B\,\cos 2x \\ -5\cdot & y'_{ip}=2A\,\cos 2x\,-\,2B\,\sin 2x \\ 1\cdot & y''_{ip}=-4A\,\sin 2x\,-\,4B\,\cos 2x \end{array}$$

$\cdots \quad A=\dfrac{1}{26}\,,\quad B=\dfrac{5}{26}$

$$y_{iá}=C_1\,\mathrm{e}^{2x}+C_2\,\mathrm{e}^{3x}+\frac{1}{26}\,\sin 2x\,+\,\frac{5}{26}\,\cos 2x\,,\qquad C_1\,,\ C_2\in\mathbb{R}$$

41. Feladat: $\boxed{y''\,-\,6\,y'\,+\,13y\,=\,39}$

Megoldás.

$$\lambda^2-6\lambda+13=0 \quad\Longrightarrow\quad \lambda_{1,2}=3\pm j\,2$$

Mivel $\mathrm{e}^{(3+j\,2)x}=\mathrm{e}^{3x}\,(\cos 2x\,+\,j\,\sin 2x)$, a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_H=C_1\,\mathrm{e}^{3x}\,\cos 2x\,+\,C_2\,\mathrm{e}^{3x}\,\sin 2x$$

$y_{ip}:=A\,,\qquad 13\,A=39\quad\Longrightarrow\quad A=3$

$$y_{iá}=C_1\,\mathrm{e}^{3x}\,\cos 2x\,+\,C_2\,\mathrm{e}^{3x}\,\sin 2x+3\,,\qquad C_1\,,\ C_2\in\mathbb{R}$$

42. Feladat:

$$\boxed{y''-5y'+6y\,=\,2\,x\,\mathrm{e}^{x}\,,\qquad y(x)\,=?}$$

Megoldás.

$\lambda^2-5\lambda+6=0 \quad\Longrightarrow\quad \lambda_1=2\,,\quad \lambda_2=3 \quad\Longrightarrow\quad y_H=C_1\,\mathrm{e}^{2x}+C_2\,\mathrm{e}^{3x}$

$y_{ip} = (Ax+B)\,\mathrm{e}^x$ alakban keressük.

$\cdots \quad A = 1\,,\ B = \dfrac{3}{2} \quad \Longrightarrow \quad y_{ip} = \left(x + \dfrac{3}{2}\right)\,\mathrm{e}^x$

Így a keresett általános megoldás:

$y_{iá} = y_H + y_{ip} = C_1\,\mathrm{e}^{2x} + C_2\,\mathrm{e}^{3x} + \left(x + \dfrac{3}{2}\right)\,\mathrm{e}^x$

43. Feladat:

$$\boxed{y'' - y' - 2y = 3\,\mathrm{e}^{2x}\,, \qquad y(0) = 3\,, \quad y'(0) = 1\,, \quad y(x) = ?}$$

Megoldás.

$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 2\,, \quad \lambda_2 = -1 \quad \Longrightarrow \quad y_H = C_1\,\mathrm{e}^{2x} + C_2\,\mathrm{e}^{-x}$

$$\begin{array}{r|l} -2\,\cdot & y_{ip} := A\,x\,\mathrm{e}^{2x} \quad \text{(külső rezonancia)} \\ -1\,\cdot & y'_{ip} = A\,\mathrm{e}^{2x} + 2A\,x\,\mathrm{e}^{2x} \\ 1\,\cdot & y''_{ip} = 2A\,\mathrm{e}^{2x} + 2A\,\mathrm{e}^{2x} + 4A\,x\,\mathrm{e}^{2x} \end{array}$$

$x\,\mathrm{e}^{2x}\cdot(-2A - 2A + 4A) + \mathrm{e}^{2x}\cdot(-A + 4A) = 3\,\mathrm{e}^{2x} \quad \Longrightarrow \quad 3A = 3\,,$ tehát $A = 1$.

$\Longrightarrow \quad y_{ip} = x\,\mathrm{e}^{2x}$

Így a keresett általános megoldás:

$y_{iá} = C_1\,\mathrm{e}^{2x} + C_2\,\mathrm{e}^{-x} + x\,\mathrm{e}^{2x}$

Mivel $y'_{iá} = 2\,C_1\,\mathrm{e}^{2x} - C_2\,\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{2x} + 2x\,\mathrm{e}^{2x}$

A keresett partikuláris megoldás:

$y(0) = 3: \quad 3 = C_1 + C_2$

$y'(0) = 1: \quad 1 = 2C_1 - C_2 + 1$

$\Longrightarrow \quad C_1 = 1\,,\ C_2 = 2$

Vagyis a keresett partikuláris megoldás: $y = \mathrm{e}^{2x} + 2\,\mathrm{e}^{-x} + x\,\mathrm{e}^{2x}$

Írjuk fel a példát, írjuk fel a homogén általános megoldását! Beszéljük meg a kísérletező függvényt és csak a felvett konstansokra kapott értékeket írjuk fel, legyen házi feladat a meghatározásuk!

44. Feladat:

$$\boxed{y^{(4)} - 8\,y''' + 16\,y'' = 2\,x - 9\,, \qquad y(x) = ?}$$

Megoldás.

$\lambda^4 - 8\lambda^3 + 16\lambda^2 = \lambda^2\,(\lambda - 4)^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{1,2} = 0\,, \quad \lambda_{3,4} = 4$ (belső rezonancia)

$\Longrightarrow \quad y_H = C_1 + C_2\,x + C_3\,\mathrm{e}^{4x} + C_4\,x\,\mathrm{e}^{4x}$

$y_{ip} = (Ax+B)\,x^2 = Ax^3 + Bx^2$ alakban keressük. (Külső rezonancia)

$\cdots \quad A = \dfrac{1}{48}\,,\ B = -\dfrac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad y_{ip} = \left(\dfrac{1}{48}\,x - \dfrac{1}{4}\right)\,x^2$

Így a keresett általános megoldás:

$$y_{iá} = y_H + y_{ip} = C_1 + C_2\,x + C_3\,\mathrm{e}^{4x} + C_4\,x\,\mathrm{e}^{4x} \; + \; \left(\frac{1}{48}\,x - \frac{1}{4}\right)\,x^2$$

45. Feladat:

$$\boxed{\;y'' + y \;=\; 2\,\sin x\;\cos x\;,\quad y(0) = 1\;,\;\; y'(0) = 1\;,\qquad\qquad y(x)\;=?\;}$$

Megoldás.
$\lambda^2 + 1 = 0 \quad\Longrightarrow\quad \lambda_{1,2} = \pm\mathrm{j} \quad\Longrightarrow\quad y_H = C_1\,\cos x + C_2\,\sin x$

Mivel $\quad f(x) = \sin 2x$, ezért a próbafüggvény:

$$y_{ip} = A\,\sin 2x \;+\; B\,\cos 2x$$

$\cdots \quad A = -\dfrac{1}{3}\;,\;\; B = 0 \quad\Longrightarrow\quad y_{ip} = -\dfrac{1}{3}\,\sin 2x$

Így a keresett általános megoldás:

$$y_{iá} = y_H + y_{ip} = C_1\,\cos x + C_2\,\sin x \;-\; \frac{1}{3}\,\sin 2x$$

Mivel $\quad y'_{iá} = -\,C_1\,\sin x + C_2\,\cos x \;-\; \dfrac{2}{3}\,\cos 2x$

A keresett partikuláris megoldás:

$y(0) = 1\;: \quad 1 = C_1 + 0 - 0 \quad\Longrightarrow\quad C_1 = 1$

$y'(0) = 1\;: \quad 1 = 0 + C_2 - \dfrac{2}{3} \quad\Longrightarrow\quad C_2 = \dfrac{5}{3}$

Vagyis: $\qquad y = \cos x + \dfrac{5}{3}\,\sin x - \dfrac{1}{3}\,\sin 2x$

46. Feladat:

$$\boxed{\;y''' - 2y'' - y' + 2y \;=\; \mathrm{ch}\,2x\;,\qquad\qquad y(x)\;=?\;}$$

Megoldás.
$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \quad\Longrightarrow\quad \lambda^2\,(\lambda - 2) \,-\, (\lambda - 2) = 0 \quad\Longrightarrow\quad (\lambda - 2)\,(\lambda^2 - 1) = 0$

$\Longrightarrow\quad \lambda_1 = 2\,,\; \lambda_2 = 1\,,\; \lambda_3 = -1 \quad\Longrightarrow\quad y_H = C_1\,\mathrm{e}^{2x} + C_2\,\mathrm{e}^{x} + C_3\,\mathrm{e}^{-x}$

Mivel $\quad f(x) = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x} \;+\; \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2x}$, ezért a próbafüggvény:

$$A\,\mathrm{e}^{2x} \;+\; B\,\mathrm{e}^{-2x} \quad \text{helyett} \quad y_{ip} = A\,x\,\mathrm{e}^{2x} \;+\; B\,\mathrm{e}^{-2x} \qquad \text{(külső rezonancia)}$$

$\cdots \quad A = \dfrac{1}{6}\;,\;\; B = -\dfrac{1}{24} \quad\Longrightarrow\quad y_{ip} = \dfrac{1}{6}\,x\,\mathrm{e}^{2x} \;-\; \dfrac{1}{24}\,\mathrm{e}^{-2x}$

Így a keresett általános megoldás:

$$y_{iá} = y_H + y_{ip} = C_1\,\mathrm{e}^{2x} + C_2\,\mathrm{e}^{x} + C_3\,\mathrm{e}^{-x} \;+\; \frac{1}{6}\,x\,\mathrm{e}^{2x} \;-\; \frac{1}{24}\,\mathrm{e}^{-2x}$$

47. Feladat: A Feladatgyűjteményből: $\qquad$ 1.5.1. - 1.5.11.

1.8. Lineáris rekurzió

48. Feladat:

$$f(n) = 4\,f(n-1) \;-\; 3\,f(n-2)$$

a) Adja meg a lineáris rekurziót kielégítő összes számsorozatot!
b) Adja meg az $f(0) = 2,\ f(1) = 6$ kezdeti feltételt kielégítő megoldást!
c) Írja fel az összes $O(1)$ típusú megoldást!

Megoldás.

a) Tudjuk, hogy van $f(n) = q^n \ (q \neq 0)$ alakú megoldás:

$$q^n \;=\; 4\,q^{n-1} \;-\; 3\,q^{n-2}\,,\ q \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad q^2 = 4q - 3$$
$$\Longrightarrow \quad q^2 - 4q + 3 = (q-1)\,(q-3) = 0 \quad \Longrightarrow \quad q_1 = 1\,,\ \ q_2 = 3$$

Az általános megoldás: $\quad f(n) = C_1 \,+\, C_2\, 3^n\,, \quad C_1\,,\ C_2 \,\in\, \mathbb{R}$

b)
$$f(0) = 2\ : \qquad C_1 \,+\, C_2 = 2$$
$$f(1) = 6\ : \qquad C_1 \,+\, 3C_2 = 6$$
$$\Longrightarrow \quad C_1 = 0\,,\ C_2 = 2$$

Tehát $\quad f(n) = 2 \cdot 3^n$

c) $f(n) = O(1)$ jelentése:
$\exists\ K: \quad |f(n)| \leq K \cdot 1, \quad n > N$ (legfeljebb véges sok kivétellel)
Tehát $f(n)$ - nek korlátosnak kell lennie, ehhez $C_2 = 0$ választás kell.

49. Feladat:

a) Adja meg az $f(n+1) = \dfrac{5}{2}\, f(n) \;-\; f(n-1)$ lineáris rekurziót kielégítő összes számsorozatot!
b) Van-e $f(n) = O(1)$ tulajdonságú megoldás?
c) Adja meg az $f(0) = 1\,,\ f(1) = 5$ kezdeti feltételt kielégítő megoldást?

Megoldás.

a) $f(n) = q^n$ alakú megoldást keresünk. Helyettesítsünk be az egyenletbe!

$$q^{n+1} = \frac{5}{2}\,q^n \;-\; q^{n-1} \quad \underset{q\neq 0}{\Longrightarrow} \quad q^2 - \frac{5}{2}\,q + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad q_1 = 2\,,\ \ q_2 = \frac{1}{2}$$

Így az összes megoldás: $\quad f(n) = C_1\, 2^n \,+\, C_2 \left(\dfrac{1}{2}\right)^n, \qquad C_1\,,\ C_2 \in \mathbb{R}$

b) $f(n) = O(1)$ jelentése: $\quad f(n)$ korlátos.

Ez $C_1 = 0\,,\ C_2 \in \mathbb{R}$ esetén teljesül.

c)
$$\left.\begin{array}{ll} n = 0: & C_1 \,+\, C_2 = 1 \\ n = 1: & 2\,C_1 \,+\, \dfrac{1}{2}\,C_2 = 1 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad C_1 = 3\,,\ \ C_2 = -2$$

Így a keresett megoldás: $\quad f(n) = 3 \cdot 2^n \,-\, 2 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

50. Feladat:
Adja meg a lineáris rekurziót kielégítő összes számsorozatot!
Írja fel az összes $O(1)$, $O(n)$, illetve $O(3^n)$, típusú megoldást!

a) $f(n) = \frac{10}{3} f(n-1) - f(n-2)$

b) $f(n) = 5\,f(n-1) - 4\,f(n-2)$

c) $f(n) = 5\,f(n-1) - 6\,f(n-2)$

51. Feladat:
Írja fel a rekurzió adott kezdő értékhez tartozó megoldását!

a) $f(n) = \frac{10}{3} f(n-1) - f(n-2)$, $\quad f(0) = 3, \quad f(1) = \frac{11}{3}$

b) $f(n) = -f(n-1) + 12\,f(n-2)$, $\quad f(0) = 3, \quad f(1) = 2$

c) $f(n) = -3\,f(n-1) + 10\,f(n-2)$, $\quad f(0) = 3, \quad f(1) = 6$

d) $f(n) = 5\,f(n-1) + 6\,f(n-2)$, $\quad f(0) = 0, \quad f(1) = 1$

1.9. Alkalmazások

52. Feladat: Harmonikus rezgőmozgás
Az ideális rugó által kifejtett F erő arányos, és ellentétes irányú a rugó x megnyúlásával, $F(x) = -Dx$. Hogyan mozog (egydimenzióban) az a test, amelyre egyetlen rugó hat?
Megoldás.
Newton II. törvénye értelmében $F(x) = m\ddot{x}$. Beírva a rugóerő alakját, a

$$-Dx(t) = m\ddot{x}(t)$$

másodrendű differenciálegyenlethez jutunk, melynek általános megoldása

$$x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t),$$

ahol $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$.
(Az egyenletet visszavezethetjük elsőrendűre, ha megszorozzuk $\dot{x}(t)$-vel, és felhasználjuk, hogy $2\dot{x}(t)x(t) = \frac{d}{dt}\big(x^2(t)\big)$, valamint $2\ddot{x}(t)\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}\big(\dot{x}^2(t)\big)$.)

53. Feladat: Kondenzátor kisülése
A C kapacitású, Q_0 kezdeti töltéssel feltöltött kondenzátort az R ellenálláson keresztül kisütjük. Határozzuk meg a kondenzátor $Q(t)$ töltésének időfüggését, az áramkörben folyó $I(t)$ áramot, valamint a kondenzátor kapcsain mérhető $U(t)$ feszültséget az idő függvényében!
Megoldás.
A szükséges fizikai ismeretek: A kondenzátor $U(t)$ feszültsége, $Q(t)$ töltése és C kapacitása között minden pillanatban fennáll, hogy $C = \frac{Q}{U}$. Az ellenálláson folyó áram és a sarkai

közt mérhető feszültség kapcsolata: $R = \frac{U}{I}$. Végül a kondenzátor töltése és az áram közti kapcsolat: $Q(t) = Q_0 + \int_{\tau=t_0}^{t} I(\tau)d\tau$, azaz $\dot{Q}(t) = I(t)$.
Az áramkörben nincsen telep, tehát az ellenálláson és a kondenzátoron eső feszültségek összege minden pillanatban zérus, $U_C(t) + U_R(t) = 0$. Az $U_C(t)$ feszültség a kondenzátor töltésével kifejezve: $U_C(t) = \frac{Q(t)}{C}$. Az áramkörben folyó áram $I(t) = \dot{Q}(t)$, tehát az ellenálláson eső feszültség $U_R(t) = RI(t) = R\dot{Q}(t)$. De e két feszültség összege zérus, tehát a

$$\frac{Q(t)}{C} + R\dot{Q}(t) = 0, \qquad Q(0) = Q_0$$

differenciálegyenletet kapjuk, aminek a kezdeti feltételt kielégítő megoldása:

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{C}{R}t}.$$

54. Feladat: Radioaktív bomlás
Radioaktív bomlás során az időegység alatt elbomlott atomok száma arányos a még el nem bomlott atomok számával. Határozzuk meg, hogyan változik az idő függvényében a még el nem bomlott atomok száma, valamint a minta aktivitása (időegységre jutó bomlások száma)!
Megoldás.
Legyen a még el nem bomlott atomok száma $N(t)$. Rövid dt idő alatt elbomlott atomok száma arányos (N(t)-vel és dt-vel, azaz $N(t) - N(t+dt) = N(t)\lambda dt$, ahonnan $\dot{N}(t) = -\lambda N(t)$ differenciálegyenlethez jutunk. Ennek megoldása: $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$; a minta aktivitásának időfüggése pedig $A(t) = -\dot{N}(t) = N_0 \lambda e^{-\lambda t}$.

55. Feladat: Oszlopra tekert kötél
A matrózok úgy tartják a nagy hajókat a partnál, hogy a kikötőkötelet előbb néhányszor a kikötőhöz betonozott függőleges oszlopra csavarják, és a felcsavart kötél másik végét húzzák. Vajon miért teszik ezt? Mennyivel tudnak így nagyobb erőt kifejteni, mintha a kötelet közvetlenül húznák?
Megoldás.
Az oszlopra csavart kötél ráfeszül az oszlopra, és az oszlop és a kötél közt ébredő súrlódási erő segít megtartani a hajót.
Jelölje az oszlop sugarát R. Legyen φ az oszlopra csavart kötél pontjait jellemző szög ($\varphi = 0$ a hajó felé eső kötélpont, $\varphi = \varphi_0$ pedig a matróz felé eső kötélpont), és legyen $K(\varphi)$ a kötelet a φ szöggel jellemzett pontban feszítő erő. (Tehát K iránya az oszlop érintőjébe esik.) Szemeljünk ki egy φ-nél elhelyezkedő, kis $d\varphi$ kötéldarabot. E kis kötéldarabra a két végénél $K(\varphi)$, ill. $K(\varphi + d\varphi \approx K(\varphi)$ erő hat. A két erő iránya közel ellentétes, a hatásvonalaik szöge $d\varphi$. Egyszerű geometriai megfontolásból adódik, hogy ($d\varphi \ll 1$ esetében) a két erő eredője közel sugár irányú, és nagysága $dN(\varphi) \approx K(\varphi)d\varphi$. Ekkora nyomóerőnél a tapadási súrlódási erő maximuma $dS(\varphi) = \mu_0 dN(\varphi) \approx \mu_0 K(\varphi)d\varphi$. A kiszemelt $d\varphi$ szögű kötéldarab nyugalomban van, tehát a rá ható érintő irányú erők eredője zérus, azaz $K(\varphi) = K(\varphi+d\varphi)+dS(\varphi)$. Innen a kötélet feszítő erőre, mint a felcsavarodási szög függvényére a következő differenciálegyenletet kapjuk:

$$\frac{d}{d\varphi}K(\varphi) = -\mu_0 K(\varphi); \qquad K(0) = K_0,$$

aminek a megoldása:

$$K(\varphi) = K_0 e^{-\mu_0 \varphi}.$$

Tehát ha a matróz φ_0 szögben csavarja rá a kötelet az oszlopra, és a kötél és az oszlop között a tapadási súrlódási együttható μ_0, akkor a matróz $e^{-\mu_0\varphi}$-szer kisebb erő kifejtésével képes megtartani a hajót.

56. Feladat: Esés nagy magasságból a világűrben +++

Tegyük föl, hogy egy gonosz varázsló megállítaná a Holdat, és az kezdősebesség nélkül szabadon esne a Föld felé. Hogyan változna a Föld–Hold távolság az idő függvényében?

Megoldás.

Legyen a Föld tömege M, a Hold tömege m, kezdeti távolságuk h_0, és tegyük föl –az egyszerűség kedvéért–, hogy a Föld nem mozdul el a Hold felé. (Ez a közelítés akkor jogos, ha $M \gg m$.) A gravitációs állandót jelölje γ.

Amikor a Föld és a Hold távolsága $r(t)$, akkor a Föld által a Holdra kifejtett gravitációs vonzóerő $F(r) = \gamma \frac{mM}{r^2}$, így a Hold mozgásegyenlete:

$$m\ddot{r}(t) = -\gamma \frac{mM}{r^2(t)}.$$

(A negatív előjel utal arra, hogy az erő vonzó.) A kapott egyenlet másodrendű differenciálegyenlet az $r(t)$ függvényre nézve, azonban egy ügyes trükkel elsőrendűvé alakíthatjuk. Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát $\dot{r}(t)$-vel, és vegyük észre, hogy $\ddot{r}(t)\dot{r}(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\dot{r}^2(t)\big)$, valamint $\frac{\dot{r}(t)}{r^2(t)} = -\frac{d}{dt}\big(\frac{1}{r(t)}\big)$. Tehát

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\dot{r}^2(t)\big) = \gamma M \frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{r(t)}\Big),$$

ahonnan

$$\dot{r}^2(t) = \frac{2\gamma M}{r(t)} + C.$$

A kapott egyenlet a Holdra felírt mechanikai energiamegmaradás törvényének átrendezett alakja. Autonóm, szeparálható differenciálegyenlet...

57. Feladat: Láncgörbe +++

Milyen alakú egy két végpontjában felfüggesztett lánc?

Megoldás.

Írjuk le a lánc alakját az $y(x)$ függvénnyel, mely a lánc x vízszintes koordinátájú pontjának magasságát adja meg. A láncban ébredő erő vízszintes, ill. függőleges komponensét jelölje $K_x(x)$, ill. $K_y(x)$. Vizsgáljuk a láncnak az x helyen levő kis dl hosszúságú, $dm = \rho dl$ tömegű darabját! (ρ a lánc hosszegységre vonatkoztatott „sűrűsége”.) Ez a kis láncdarab nyugalomban van, tehát a rá ható erők eredője (vízszintes és függőleges irányban egyaránt) zérus. Vízszintes irányban a láncra nem hat külső erő, tehát $K_x(x) = K_x(x+dx)$, így a láncot feszítő erő vízszintes komponense állandó, $K_x(x) \equiv K_x$. Függőleges irányban a láncdarabra hat a $(dm)g$ nehézségi erő, tehát $K_y(x+dx) - K_y(x) = g\rho dl$. Ezen kívül tudjuk még, hogy a lánc meredeksége az x pontban $y'(x)$, tehát $dl = \sqrt{1 + y'^2(x)}dx$, valamint a láncban ébredő erő érintő irányú, azaz $K_y(x) = y'(x)K_x$. Ezeket felhasználva a

$$K_x y''(x) = \rho g \sqrt{1 + y'^2(x)}.$$

differenciálegyenletet kapjuk a lánc alakjára, ami az $y'(x)$ függvényre nézve elsőrendű, autonóm, szeparálható egyenlet. A megoldása:

$$y'(x) = \operatorname{sh}\Big(\frac{\rho g x}{K_x} + C\Big), \qquad y(x) = \frac{K_x}{\rho g}\operatorname{ch}\Big(\frac{\rho g x}{K_x} + C\Big).$$

Ezért hívják sokszor a koszinusz-hiperbolikusz függvényt „láncgörbének”.

58. Feladat: Mozgás közegellenállással – nagy sebességnél

Légnemű vagy folyékony közegben nagy sebességgel mozgó testre a sebesség négyzetével arányos közegellenállási erő hat. Meg tudjuk mondani például, hogy leszállás után hogyan mozog a kifutópályán az a repülőgép, amelyet csak a fékező ernyője fékez. A gép mozgásegyenlete:

$$m\ddot{x}(t) = -\kappa\dot{x}^2(t),$$

ami $\dot{x}(t)$-re elsőrendű, autonóm, szeparábilis differenciálegyenlet.
Például a Föld légkörében szabadon eső test mozgásegyenlete

$$m\ddot{h}(t) = \kappa\dot{h}^2(t) - mg.$$

59. Feladat: Mozgás közegellenállással – kis sebességnél

Talán egyszerűbben megoldható a feladat akkor, ha a közegellenállási erő a sebességgel arányos. Egy sűrű, viszkózus folyadékban lassan süllyedő kis golyó mozgásegyenlete például

$$m\ddot{y}(t) = mg - F_{\text{felh}} - \alpha\dot{y}(t),$$

ami $\dot{x}(t)$-re elsőrendű, lineáris, inhomogén, állandó együtthatós egyenlet. (Az egyenletben F_{felh} a felhajtóerőt jelöli, ami csak a test térfogatától és a folyadék fajsúlyától függő állandó.)

2. Függvénysorok

2.1. Hányados- és gyökkritérium (numerikus sorok)

Átismételtük a numerikus sorokról a múlt félévben tanultakat (majoráns, minoráns kritériumot is). Most a két új kritériumot gyakoroljuk (a limeszes alakot használjuk, de mindkét alakot elevenítsük fel).

1. Feladat: Vizsgálja meg az alábbi sorokat konvergencia szempontjából!

a) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^{n-2}}{n!}}$

Megoldás. $a_n := \dfrac{9^{n-2}}{n!}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{9^{(n+1)-2}\ n!}{(n+1)!\ 9^{n-2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{9}{n+1} = 0 < 1$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{konvergens}$$

b) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{3n}}{n^4}}$

Megoldás. $a_n := \dfrac{5^{3n}}{n^4}$

Lehet hányados kritérium , de jobb a gyökkritérium:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^3}{\sqrt[n]{n^4}} = 5^3 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^4} = 5^3 > 1$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{divergens}$$

c) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n}}$

Megoldás. $a_n := \dfrac{(n+1)!}{n^n}$

A hányados kritériumot alkalmazzuk:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)!\ n^n}{(n+1)^{n+1}\ (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)\ n^n}{(n+1)^{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\mathrm{e}} < 1$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{konvergens}$$

2. Feladat: $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+5)\ 3^{n-1}}{5^{n+1}}}$

Megoldás.

$a_n := \dfrac{(n+5)\ 3^{n-1}}{5^{n+1}}$

Hányadoskritériummal célszerű dolgozni, mert a gyökkritériumnál az $\sqrt[n]{n+5}$ konvergenciáját a rendőrelvvel kellene megmutatni.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+6)\ 3^n\ 5^{n+1}}{5^{n+2}\ (n+5)\ 3^{n-1}} = \frac{3}{5}\ \frac{n+6}{n+5} = \frac{3}{5}\ \frac{1+\frac{6}{n}}{1+\frac{5}{n}} \to \frac{3}{5} < 1$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{konvergens}$$

3. Feladat: $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4\ (3n+3)^{n^2}}{(3n+1)^{n^2}}}$

Megoldás.

Gyökkritériummal:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ldots = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^4 \frac{\left(1+\frac{3/3}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1/3}{n}\right)^n} \to 1^4\ \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^{1/3}} = \mathrm{e}^{2/3} > 1$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{divergens}$$

4. Feladat: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3+n^2}{2+n^2}\right)^{n^3} \frac{n^5}{2^{2n+1}}$

Megoldás.

Gyökkritériummal:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ldots = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{n^2}}\ \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^5}{4\cdot\sqrt[n]{2}} \to \frac{\mathrm{e}^3}{\mathrm{e}^2}\ \frac{1^5}{4\cdot 1} = \frac{\mathrm{e}}{4} < 1$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{konvergens}$$

---

5. Feladat:

Vizsgálja konvergencia szempontjából az alábbi sorokat!

$$a1)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n^2-2}{n^2+5}\right)^{n^2} \qquad a2)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n^2-2}{n^2+5}\right)^{n} \qquad a3)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n^2-2}{n^2+5}\right)^{n^3}$$

Megoldás. $a_n := \left(\frac{n^2-2}{n^2+5}\right)^{n^2}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = e^{-7}$, mert ...

$a1)$ A sor divergens, mivel az általános tag nem tart nullához, tehát a konvergencia szükséges feltétele nem teljesül.

$a2)$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$, ahol $b_n = \sqrt[n]{a_n}$. Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$ (ezt meg kell beszélni, hogy rendőrelvvel látható be, de nem kell megcsinálni), így ez a sor is divergens.

$a3)$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, ahol $c_n = {a_n}^n$

A gyökkritérium alkalmazásával:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} = \lim_{n\to\infty} a_n = e^{-7} < 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} c_n \ \text{ konvergens}$$

6. Feladat: $\boxed{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^{n+2} + (\frac{1}{2})^n}{(2n)! + 3n^2}}$ +++

Megoldás. $c_n := \frac{2^n + 3^{n+2} + (\frac{1}{2})^n}{(2n)! + 3n^2} < \frac{3^n + 9\cdot 3^n + 3^n}{(2n)!} = 11\,\frac{3^n}{(2n)!} := d_n$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n$ konvergens, mert $\cdots$ (hányadoskritériummal)

Ezért a majoráns kritérium miatt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ is konvergens.

7. Feladat: Bizonyítsa be, hogy az alábbi sor konvergens! Adjon becslést az elkövetett hibára, ha a sor összegét a 100. részletösszeggel közelítjük! +++

a) $\boxed{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)\,3^{n-1}}{(n+5)\,n!}}$

Megoldás. $a_n := \frac{(n+2)\,3^{n-1}}{(n+5)\,n!}$

$a_n < \frac{3^{n-1}}{n!} := b_n$ $\quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergens, mert a hányadoskritérium alkalmazásával:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n\, n!}{(n+1)!\,3^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1$$

$$\implies \sum_{n=0}^{\infty} b_n \ \text{ konvergens} \underbrace{\implies}_{\text{maj. kr.}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \ \text{ konvergens}$$

Az elkövetett hiba:

$$0 < H = \sum_{n=101}^{\infty} \frac{(n+2)\, 3^{n-1}}{(n+5)\, n!} < \sum_{n=101}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{n!} = \frac{3^{100}}{101!} + \frac{3^{101}}{102!} + \frac{3^{102}}{103!} + \cdots =$$

$$= \frac{3^{100}}{101!} \left(1 + \frac{3}{102} + \frac{3^2}{102 \cdot 103} + \cdots\right) < \frac{3^{100}}{101!} \, (1 + \frac{3}{102} + \frac{3^2}{102^2} + \cdots) =$$

$$= \frac{3^{100}}{101!} \quad \frac{1}{1 - \dfrac{3}{102}}$$

b) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{6n-1}\right)^{3n}}$

Megoldás. $a_n := \left(\dfrac{n+2}{6n-1}\right)^{3n}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{6n-1}\right)^3 = \cdots = \frac{1}{6^3} < 1$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{konvergens}$$

Az elkövetett hiba:

$$0 < H = \sum_{n=101}^{\infty} \left(\frac{n+2}{6n-1}\right)^{3n} < \sum_{n=101}^{\infty} \left(\frac{n+2n}{6n-n}\right)^{3n} = \sum_{n=101}^{\infty} \left(\left(\frac{3}{5}\right)^3\right)^n =$$

$$= \left(\frac{3}{5}\right)^{303} \frac{1}{1 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^3} \qquad \left(q = \left(\frac{3}{5}\right)^3\right)$$

8. Feladat: További gyakorló feladatok

Vizsgálja az alábbi sorokat konvergencia szempontjából!

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n^2+3n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\ 6^{n-1}}{(2n)!}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\binom{2n}{n}}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n\ (n+3)}{(n)!}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^{n+2}}$

f) Bizonyítsa be, hogy az alábbi sor konvergens! Adjon becslést az elkövetett hibára, ha a sor összegét a 200. részletösszeggel közelítjük!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n+1}}{(n)!}$$

g) Bizonyítsa be, hogy az alábbi sor konvergens! Adjon becslést az elkövetett hibára, ha a sor összegét a 100. részletösszeggel közelítjük!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+3)\ 6^{n+1}}$$

Megoldás.

...

2.2. Weierstrass-kritérium függvénysorok egyenletes konvergenciájára

9. Feladat:

Egyenletesen konvergens-e a $(-\infty, \infty)$ intervallumon az alábbi függvénysor?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^4 x^2 + 1)}{n^3 + 2}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(n^5 x^3)}{n\sqrt{n} + 5}$

Megoldás.

a)

$$|f_n(x)| = \frac{|\cos(n^4 x^2 + 1)|}{n^3 + 2} < \frac{1}{n^3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \ \text{konv.} \quad \overset{\text{Weierstrass kr.}}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \ \text{ egyenletesen konvergens } (-\infty, \infty)\text{-en.}$$

b)

$$|f_n(x)| = \frac{|\operatorname{arctg}(n^5 x^3)|}{n\sqrt{n} + 5} < \frac{\frac{\pi}{2}}{n\sqrt{n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{\pi}{2}}{n\sqrt{n}} = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \quad \text{konvergens}$$

$$\overset{\text{Weierstrass kr.}}{\Longrightarrow} \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \ \text{ egyenletesen konvergens } (-\infty, \infty)\text{-en.}$$

2.3. Hatványsorok konvergencia sugara, konvergenciatartománya

10. Feladat:

Állapítsa meg az alábbi sor konvergenciatartományát!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ 2^n}\ (x-1)^n$$

Megoldás.

Jelenleg: $\quad a_n = \dfrac{(-1)^n}{n\ 2^n}\ , \qquad x_0 = 1$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|(-1)^n|}{n\ 2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}\ 2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{R} \qquad \Longrightarrow \qquad R = 2$$

$x = 3: \quad \displaystyle\sum^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n} \cdot 2^n = \sum^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ $\quad$ konvergens (de nem abszolút konvergens)

$x = -1: \quad \displaystyle\sum^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n} \cdot (-2)^n = \sum^{\infty} \frac{1}{n}\,(-1)^{2n} = \sum^{\infty} \frac{1}{n}$ $\quad$ divergens

KT (konvergenciatartomány): $(-1, 3]$

11. Feladat:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\ \frac{2n+1}{(2n)!}\ (x+7)^n \qquad\qquad R = ?$$

Megoldás.

Jelenleg: $\quad a_n = (-1)^n\ \dfrac{2n+1}{(2n)!}\ , \qquad x_0 = -7$ (ez most nem fontos)

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)\ (2n)!}{(2n+2)!\ (2n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{2n+1}\ \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} = 0$$

$$\Longrightarrow \qquad R = \infty$$

12. Feladat:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^{n^2}}{(n+6)^{n^2+1}}\ x^n \qquad\qquad R = ?$$

Megoldás.

Jelenleg: $\quad a_n = \dfrac{(n+2)^{n^2}}{(n+6)^{n^2+1}}\ , \qquad x_0 = 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+6}\right)^n \frac{1}{\sqrt[n]{n+6}} = \quad \cdots \quad = \frac{1}{\mathrm{e}^4}$$

$$\Longrightarrow \qquad R = \mathrm{e}^4\ ,$$

(mert $\ 1 < \sqrt[n]{n+6} < \sqrt[n]{7}\ \sqrt[n]{n}\ $ és rendőrelv $\cdots$)

13. Feladat:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n!}\ x^n \qquad\qquad R=?$$

Megoldás.

Jelenleg: $\quad a_n = \dfrac{(n+1)^n}{n!}\ , \qquad x_0 = 0$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)^{n+1}\ n!}{(n+1)!\ (n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}\ \frac{1+\dfrac{2}{n}}{1+\dfrac{1}{n}} = \frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}} = \mathrm{e}$$

$$\Longrightarrow \quad R = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

14. Feladat:

Állapítsa meg az alábbi sor konvergenciatartományát!
Hol abszolút konvergens a sor?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n\ (n+3)}{n^2+3}\ x^n$$

Megoldás.

$R = \dfrac{1}{2}$, mert ...

$x = -\dfrac{1}{2}\ : \quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^2+3}$ divergens, mert ...

$x = \dfrac{1}{2}\ : \quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+3}{n^2+3}$ konvergens, de nem abszolút konvergens, mert ...

K.T. = A.K.T. = $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

15. Feladat:

Állapítsa meg az alábbi sor konvergenciatartományát!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+4)^n}{n^2\ 3^n}$$

Megoldás.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2\ 3^n}\ (x+2)^n\ , \qquad x_0 = -2.$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2\ 3^n}} = \frac{2}{3} = \frac{1}{R} \quad \Longrightarrow \quad R = \frac{3}{2}$$

$x = -\frac{7}{2}$: $\sum^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$: konvergens

$x = -\frac{1}{2}$: $\sum^{\infty} \frac{1}{n^2}$: konvergens

Konvergenciatartomány: $\left[-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right]$

16. Feladat:

Állapítsa meg az alábbi sor konvergenciatartományát!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\ (2x)^n}{\sqrt{n}\ 5^n}$$

Megoldás.

...

17. Feladat:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}\ x^{3n} = \frac{1}{2}\, x^3 + \frac{2}{2^2}\ x^6 + \cdots \qquad R = ?$$

Megoldás.

$$a_n = \begin{cases} 0\,, & \text{ha } n \text{ nem osztható 3-mal} \\ \dfrac{n/3}{2^{n/3}}\,, & \text{ha } n \text{ osztható 3-mal} \end{cases}$$

Ezért $\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 0\,, & \text{ha } n \text{ nem osztható 3-mal} \\ \sqrt[n]{\dfrac{n/3}{2^{n/3}}} = \dfrac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{3}\ \sqrt[3]{2}}\,, & \text{ha } n \text{ osztható 3-mal} \end{cases}$

$\Longrightarrow$ Torlódási pontok: $t_1 = 0\,,\ t_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$$\Longrightarrow \quad \overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{R} \quad \longrightarrow \quad R = \sqrt[3]{2}$$

Egy ügyesebb megoldás: $u = x^3$ helyettesítéssel egy egyszerűbb feladatra vezetjük vissza.

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\ u^n := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}\ u^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{1}{2} = \frac{1}{R_b} \quad \longrightarrow \quad R_b = 2$$

Tehát $|u| < 2 \quad \Longrightarrow \quad |x|^3 < 2 \quad \Longrightarrow \quad |x| < \sqrt[3]{2} \quad \Longrightarrow \quad R = \sqrt[3]{2}$

18. Feladat:

Állapítsa meg az alábbi sor konvergenciatartományát!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{9^n}\ (x-2)^{2n}$$

Megoldás.

$u := (x-2)^2$ helyettesítéssel a sor alakja: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{9^n}\ u^n$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)\ 9^n}{9^{n+1}\ (n+1)} = \cdots = \frac{1}{9} \quad\Longrightarrow\quad R_1 = 9$$

A végpontokat itt is lehet vizsgálni, de az eredeti sorban is vizsgálhatjuk majd. Most az utóbbi módon járunk el.

Tehát

$$|u| < 9 \quad\Longrightarrow\quad |(x-2)^2| < 9 \quad\Longrightarrow\quad |x-2| < 3 \quad\Longrightarrow\quad R = 3 \quad (-1 < x < 5)$$

A végpontokban:

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)$ divergens, hiszen nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele.

Konvergenciatartomány: $(-1\,,\,5)$

2.4. Hatványsorok összegfüggvénye

19. Feladat:

Írja fel az alábbi sor összegfüggvényét!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

Megoldás.

$f(x) := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$, $\quad f(0) = 0$. Ha $x \neq 0$:

$$f_1(x) := x \cdot f(x) = x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}\ , = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$f_1'(x) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$, $\quad x \in (-R, R)$ esetén szabad tagonként deriválni:

$$f_1'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

$R = 1$, és az eredeti sornak is ugyanennyi, mert tagonkénti deriválásnál nem változik.

$$f_1(x) = \int_0^x f_1'(x)\ \mathrm{d}x (= f_1(x) - f_1(0)) = \int_0^x \frac{x}{1-x}\ \mathrm{d}x = -\int_0^x \frac{(1-x)-1}{1-x}\ \mathrm{d}x =$$

$$= -\left(x + ln(1-x)\right)\Big|_0^x = -x - \ln(1-x)$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x - \ln(1-x)}{x} = -1 - \dfrac{\ln(1-x)}{x} \quad , & \text{ha } |x| < 1\,,\ x \neq 0 \\ 0\,, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

(Hf.: Tudjuk, hogy f folytonos $|x| < 1$-ben.
Ellenőrizzük le, hogy igaz-e: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)(=0)$?)

20. Feladat:

> Írja fel az alábbi sor összegfüggvényét!
> $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+1}\; x^n$$

Megoldás.

$R = 1$, mert $\cdots$
(Vagy itt mutatjuk meg, vagy az előző gondolatmenettel később indokoljuk.)

$$g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+1}\, x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\,+\,1}{n+1}\, x^n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{x}{1-x} + f(x) = \cdots \quad \text{(L. előző példa!)}$$

21. Feladat:

> Írja fel az alábbi sor összegfüggvényét!
> $$\sum_{n=1}^{\infty} (n+3)\; x^n$$

Megoldás.

$R = 1$, mert $\cdots$

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} (n+3)\; x^n\,, \qquad f_1(x) := x^2 \cdot f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+3)\; x^{n+2} =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_0^x f_1(x)\,\mathrm{d}x = \cdots = \left(\frac{x^4}{1-x}\right)'$$

22. Feladat:

> Határozza meg az alábbi sor összegfüggvényét és konvergenciasugarát!
> $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{4^{k+1}}\; x^k$$
> $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{4^{k+1}} = ?$$

Megoldás.

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{4^{k+1}}\ x^k$$

$$\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{4^{k+1}}\ x^k\ \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x \frac{k+1}{4^{k+1}}\ x^k\ \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{4^{k+1}}\ \left.\frac{x^{k+1}}{k+1}\right|_0^x =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{4}\right)^{k+1} = \frac{\frac{x}{4}}{1-\frac{x}{4}} = \frac{x}{4-x}\,, \qquad \left|\frac{x}{4}\right| < 1 \implies |x| < 4$$

Tehát $R = 4$

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x}{4-x}\right)' = \frac{4-x-x(-1)}{(4-x)^2} = \frac{4}{(4-x)^2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{4^{k+1}} = f(1) = \frac{4}{9}$$

2.5. Taylor-polinom

23. Feladat:

a) Definiálja az n-edrendű Taylor polinomot!

b) Írja fel a definíció segítségével az

$$f(x) = x^3 - 3 + \cos 3x$$

függvény $x_0 = 0$ pontbeli negyedrendű Taylor polinomját és a Lagrange-féle hibatagot!

c) Legfeljebb mekkora hibát követünk el, ha $f(0,1)$ értékét $T_4(0,1)$ értékével közelítjük?

Megoldás.

a) az f függvény x_0 bázispontú n-edrendű Taylor polinomja:

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Ha f legalább $(n+1)$-szer differenciálható $[x_0, x)$-ben (ill. $(x, x_0]$-ban), akkor $\exists\ \xi \in (x_0, x)$ (ill. $\xi \in (x, x_0)$), hogy

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\ (x-x_0)^{n+1}.$$

b) $f(x) = x^3 - 3 + \cos 3x$ $\qquad f(0) = -2$

$f'(x) = 3x^2 - 3\sin 3x$ $\qquad f'(0) = 0$

$f''(x) = 6x - 9\cos 3x \qquad f''(0) = -9$
$f'''(x) = 6 + 27\sin 3x \qquad f'''(0) = 6$
$f^{IV}(x) = 81\cos 3x \qquad f^{IV}(0) = 81$
$f^{V}(x) = -243\,\sin 3x$

$$T_4(x) = -2 + \frac{-9}{2!}\,x^2 + \frac{6}{3!}\,x^3 + \frac{81}{4!}\,x^4$$

$$H = \frac{f^V(\xi)}{5!}\,x^5 = \frac{-243\;\sin 3\xi}{5!}\;0,1^5\,, \qquad \xi \in (0\,,\,0.1)$$

$|\sin x| \le |x|$ miatt $|\sin 3\xi| \le 3\cdot 0,1$, ezért

$$|H| = \frac{243\;|\sin 3\xi|}{5!}\;0,1^5 < \frac{243\cdot 3\cdot 0,1}{5!}\;0,1^5$$

24. Feladat:

$$y' = 2y^2 + 3x^2 - 6x$$

a) Rajzolja fel a $P(-1,1)$ ponthoz tartozó vonalelemet!
b) Van-e lokális maximuma vagy minimuma az origón áthaladó megoldásgörbének az origóban?
(Ne próbálja megoldani a differenciálegyenletet, de feltételezheti, hogy van ilyen megoldás!)
c) Írja fel az origón áthaladó megoldás $x_0 = 0$ bázispontú harmadrendű Taylor polinomját!

Megoldás. ...

25. Feladat:

$$y' = xy^3 - y^2 + 2$$

a) Van-e lokális maximuma vagy minimuma az $x_0 = 1$, $y_0 = -1$ ponton áthaladó megoldásgörbének ebben a pontban?
(Ne próbálja megoldani a differenciálegyenletet, de feltételezheti, hogy van ilyen megoldás!)
b) Írja fel az $x_0 = 1$, $y_0 = -1$ ponton áthaladó megoldás $x_0 = 1$ bázispontú harmadrendű Taylor polinomját!
(Ne próbálja megoldani a differenciálegyenletet!)

Megoldás.

a) $y(1) = -1\,,\quad y'(1) = -1 - 1 + 2 = 0 \quad\Longrightarrow$ lehet itt lokális szélsőérték.
$y'' = y^3 + x\cdot 3y^2y' - 2yy'\,,\quad y''(1) = -1$
Tehát $y'(1) = 0$ és $y''(1) = -1 < 0$: a megoldásnak lokális maximuma van ebben a pontban.

b) $y''' = 3y^2y' + 3y^2y' + x\,6yy'^2 + x\,3y^2y'' - 2y'^2 - 2y'y''$

$$y'''(1) = -3-2 = -5$$

$$T_3(x) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3 =$$

$$= -1 - \frac{1}{2!}(x-1)^2 - \frac{5}{3!}(x-1)^3$$

2.6. Taylor-sor

26. Feladat:

Adja meg az $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ függvény $x_0 = 0$, illetve $x_0 = 5$ bázispontú Taylor sorfejtéseit és azok konvergenciatartományát!

Megoldás.

$x_0 = 0$ esete:

$$f(x) = -\frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\frac{x}{3}} = -\frac{1}{3}\left(1 + \frac{x}{3} + \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{x}{3}\right)^3 + \left(\frac{x}{3}\right)^4 + \cdots\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{3^{n+1}}\,x^n$$

$$\left(\text{Geometriai sor:}\quad a = -\frac{1}{3}\,,\quad q = \frac{x}{3}\right)$$

$$\text{Konvergenciatartomány:}\qquad |q| = \left|\frac{x}{3}\right| = \frac{|x|}{3} < 1 \quad\Longrightarrow\quad |x| < 3\,,\quad R_1 = 3$$

$x_0 = 5$ esete:

$$f(x) = \frac{1}{(x-5)+2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{-(x-5)}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-(x-5)}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-5)^n$$

Konvergenciatartomány:

$$|q| = \left|\frac{-(x-5)}{2}\right| = \frac{|x-5|}{2} < 1 \quad\Longrightarrow\quad |x-5| < 2\,,\quad R_2 = 2$$

27. Feladat:

Adja meg az alábbi függvények $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorfejtését és annak konvergenciatartományát!

$$f(x) = \frac{1}{x^2+3}\,,\qquad\qquad g(x) = \frac{x^5}{x^2+3}$$

Megoldás.

$$f(x) = \frac{1}{3}\ \frac{1}{1-\dfrac{-x^2}{3}} = \frac{1}{3}\ \left(1 - \frac{x^2}{3} + \left(\frac{x^2}{3}\right)^2 - \left(\frac{x^2}{3}\right)^3 + \left(\frac{x^2}{3}\right)^4 - \ \cdots\ \right) =$$

$$= \frac{1}{3}\ \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x^2}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\ x^{2n}$$

$$\left(\text{Geometriai sor:} \quad a = \frac{1}{3}\,, \quad q = -\frac{x^2}{3}\right)$$

Konvergenciatartomány: $\quad |q| = \left|-\dfrac{x^2}{3}\right| = \dfrac{|x|^2}{3} < 1 \quad \Longrightarrow \quad |x| < \sqrt{3}\,, \quad R_f = \sqrt{3}$

$$g(x) = \frac{x^5}{x^2+3} = x^5 \cdot f(x) = x^5\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\ x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\ x^{2n+5}$$

Konvergenciatartomány: $\quad |x| < \sqrt{3}\,, \quad R_g = \sqrt{3} \qquad$ (ugyanaz)

28. Feladat:

> Adja meg az alábbi függvények $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorfejtését és annak konvergenciatartományát!
> $$f(x) = \frac{1}{x+7}\,, \qquad g(x) = \frac{x+2}{x+7}\,, \qquad h(x) = \frac{3x^4}{x+7}$$

Megoldás.

$$f(x) = \frac{1}{7}\ \frac{1}{1-\dfrac{-x}{7}} = \frac{1}{7}\ \left(1 - \frac{x}{7} + \left(\frac{x}{7}\right)^2 - \left(\frac{x}{7}\right)^3 + \left(\frac{x}{7}\right)^4 - \ \cdots\ \right) =$$

$$= \frac{1}{7}\ \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{7}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{7^{n+1}}\ x^{n}$$

$$\left(\text{Geometriai sor:} \quad a = \frac{1}{7}\,, \quad q = -\frac{x}{7}\right)$$

Konvergenciatartomány: $\quad |q| = \left|-\dfrac{x}{7}\right| = \dfrac{|x|}{7} < 1 \quad \Longrightarrow \quad |x| < 7\,, \quad R_f = 7$

$$g(x) = \frac{x+7-5}{x+7} = 1 - \frac{5}{x+7} = 1 - 5 \cdot f(x) = 1 - 5\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{7^{n+1}}\ x^{n}$$

Konvergenciatartomány: $\quad |x| < 7\,, \quad R_g = 7 \qquad$ (ugyanaz)

$$h(x) = \frac{3x^4}{x+7} = 3x^4 \cdot f(x) = 3x^4\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{7^{n+1}}\ x^{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3\,(-1)^n}{7^{n+1}}\ x^{n+4}$$

Konvergenciatartomány: $\quad |x| < 7\,, \quad R_h = 7 \qquad$ (ugyanaz)

29. Feladat:

Írja fel az f függvény x_0 bázispontú Taylor sorát és adja meg a sor konvergenciatartományát!

$$f(x) = \frac{1}{x+2} \qquad a)\ x_0 = 2 \qquad b)\ x_0 = -5$$

Megoldás.

$x_0 = 2$:

$$f(x) = \frac{1}{x+2} = \frac{1}{(x-2)+4} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{1-\dfrac{-(x-2)}{4}} \left(= \frac{a}{1-q}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 - \left(\frac{x-2}{4}\right) + \left(\frac{x-2}{4}\right)^2 - \left(\frac{x-2}{4}\right)^3 + \cdots\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-2}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}\,(x-2)^n$$

Konvergenciatartomány:

$$|q| = \left|-\frac{x-2}{4}\right| = \frac{|x-2|}{4} < 1 \quad\Longrightarrow\quad |x-2| < 4\,, \quad (-2 < x < 6\,,\ \ R_1 = 4)$$

$x_0 = -5$:

$$f(x) = \frac{1}{x+2} = \frac{1}{(x+5)-3} = -\frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\dfrac{x+5}{3}}$$

$$= -\frac{1}{3}\left(1 + \left(\frac{x+5}{3}\right) + \left(\frac{x+5}{3}\right)^2 + \left(\frac{x+5}{3}\right)^3 + \cdots\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+5}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{3^{n+1}}\,(x+5)^n$$

Konvergenciatartomány:

$$|q| = \left|\frac{x+5}{3}\right| = \frac{|x+5|}{3} < 1 \quad\Longrightarrow\quad |x+5| < 3\,, \quad (-8 < x < -2\,,\ \ R_2 = 3)$$

30. Feladat:

a) Írja fel az

$$f_1(x) = \frac{1}{x+3}$$

függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorfejtését! $R_1 = ?$

b) f_1 sorfejtésére támaszkodva írja fel az alábbi függvények $x_0 = 0$ bázispontú sorfejtését!

$$f_2(x) = \ln(x+3) \ , \qquad R_2 = ?$$

$$f_3(x) = \frac{1}{(x+3)^3} \ , \qquad R_3 = ?$$

Megoldás.

a) $$f_1(x) = \frac{1}{x+3} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\dfrac{-x}{3}} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{x}{3} + \left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{x}{3}\right)^3 + \left(\frac{x}{3}\right)^4 - \cdots\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\,x^n$$

Konvergenciatartomány: $|q| = \left|-\frac{x}{3}\right| = \frac{|x|}{3} < 1 \implies |x| < 3\ , \quad R_1 = 3$

b) $$f_2'(x) = f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\,x^n$$

$$\int_0^x f_2'(t)\ \mathrm{d}t = f_2(x) - \underbrace{f_2(0)}_{=\ln 3} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\,t^n\ \mathrm{d}t$$

$[0\,,\,x] \subset (-3\,,\,3)\ ,$ szabad tagonként integrálni:

$$f_2(x) = \ln 3 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\int_0^x t^n\ \mathrm{d}t = \ln 3 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\left.\frac{t^{n+1}}{n+1}\right|_0^x =$$

$$= \ln 3 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\,\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\implies \quad f_2(x) = \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^n}\,\frac{x^n}{n}\ , \qquad R_2 = R_1$$

(Tagonkénti integrálásnál nem változik a konvergenciasugár.)

$$f_1''(x) = \left(\frac{1}{x+3}\right)'' = \left(\frac{-1}{(x+3)^2}\right)' = \frac{2}{(x+3)^3} \implies f_3(x) = \frac{1}{2}\,f_1''(x)$$

Tehát

$$f_3(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\,x^n\right)'' = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\,n\,(n-1)}{3^{n+1}}\,x^{n-2}$$

$R_3 = R_1$ (Tagonkénti deriválásnál nem változik a konvergenciasugár.)

31. Feladat:

Tudjuk, hogy

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \ , \qquad R = 1$$

a) Írja fel az
$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{x^2}{3}\right)$$
függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorát és adja meg annak konvergencia sugarát!

b) Az a)-beli sorfejtést felhasználva adja meg az
$$\int_0^1 \ln\left(1 + \frac{x^2}{3}\right) \mathrm{d}x$$
integrál értékét az f függvény negyedfokú Taylor polinomjának felhasználásával és becsülje meg a hibát!

Megoldás.

a) $\ln(1+u) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} u^n \ , \qquad R = 1$

$u = \dfrac{x^2}{3}$ helyettesítéssel:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{x^2}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 3^n} x^{2n}$$

Konvergenciasugár: $\left|\dfrac{x^2}{3}\right| < 1 \implies |x| < \sqrt{3} \implies R_f = \sqrt{3}$

b) $[0\,,\,1] \subset (-\sqrt{3}\,,\,\sqrt{3})$, szabad tagonként integrálni:

$$\int_0^1 \ln\left(1 + \frac{x^2}{3}\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\underbrace{\frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{2 \cdot 3^2}}_{T_4(x)} + \frac{x^6}{3 \cdot 3^3} - + \cdots \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^3}{3 \cdot 3} - \frac{x^5}{2 \cdot 3^2 \cdot 5} + \frac{x^7}{3 \cdot 3^3 \cdot 7} - + \cdots \Bigg|_0^1 = \frac{1}{3 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 3^2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 3^3 \cdot 7} - + \cdots \approx$$

$$\approx \frac{1}{3 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 3^2 \cdot 5} = 0,1 \ , \qquad |H| < \frac{1}{3 \cdot 3^3 \cdot 7} \text{ (Leibniz sor)}$$

32. Feladat:

Tudjuk, hogy

$$\operatorname{arctg} u = u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{2n+1}, \quad |u| \le 1$$

a) Írja fel az

$$f(x) = x^3 \operatorname{arctg} \frac{x^2}{2}$$

függvény $x_0 = 0$ pontra támaszkodó Taylor sorát! $R = ?$

b) $f^{(20)}(0) = ?$, $f^{(21)}(0) = ?$ (A sorfejtésből adjon választ!)

c) Adjon becslést az $\int_0^1 f(x)\, dx$ integrál értékére az integranduszt kilencedfokú Taylor polinomjával közelítve!

Megoldás.

a) $$\operatorname{arctg} \frac{x^2}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{x^2}{2}\right)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\; 2^{2n+1}}\, x^{4n+2}$$

Konvergenciatartomány: $\left|\frac{x^2}{2}\right| \le 1 \implies |x| \le \sqrt{2}$

$$f(x) = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\; 2^{2n+1}}\, x^{4n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\; 2^{2n+1}}\, x^{4n+5} =$$

$$= \underbrace{\frac{x^5}{2} - \frac{x^9}{3 \cdot 2^3}}_{T_9(x)} + \frac{x^{13}}{5 \cdot 2^5} - \frac{x^{17}}{7 \cdot 2^7} + \cdots \qquad R = \sqrt{2}$$

b) $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ miatt $f^{(n)}(0) = n! \cdot a_n$

$f^{(20)}(0) = 20! \cdot a_{20} = 0$, mert $a_{20} = 0$ (x^{20} -os tag nincs a sorban)

$f^{(21)}(0) = 21! \cdot a_{21} = 21! \cdot \dfrac{(-1)^4}{9 \cdot 2^9}$

(a_{21} : x^{21} együtthatója, ezért $4n + 5 = 21 \implies n = 4$)

c) Mivel $[0\,,\,1] \subset (-\sqrt{2}\,,\,\sqrt{2})$, ezért szabad tagonként integrálni:

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\; 2^{2n+1}}\, x^{4n+2}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\; 2^{2n+1}} \int_0^1 x^{4n+2}\, dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\; 2^{2n+1}} \left.\frac{x^{4n+6}}{4n+6}\right|_0^1 = \left.\frac{x^6}{2 \cdot 6} - \frac{x^{10}}{3 \cdot 2^3 \cdot 10} + \frac{x^{13}}{5 \cdot 2^5 \cdot 13} - \cdots \right|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 6} - \frac{1}{3 \cdot 2^3 \cdot 10} + \frac{1}{5 \cdot 2^5 \cdot 13} - \cdots \approx \frac{1}{12} - \frac{1}{240}, \qquad |H| < \frac{1}{5 \cdot 2^5 \cdot 13}$$

(Leibniz sort kaptunk.)

33. Feladat:
Írjuk fel e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$ Taylor-sorát és konvergenciatartományát!

34. Feladat:

Írja fel az alábbi függvények x_0 pontbeli Taylor sorát és annak konvergenciatartományát!

a) $f_1(x) = \sin 3x^2$, $x_0 = 0$

b) $f_2(x) = e^{4x}$, $x_0 = 0$, ill. $x_0 = 3$

c) $f_3(x) = \operatorname{sh} 2x^4$, $x_0 = 0$

d) $f_4(x) = e^{-2x} \operatorname{ch} 5x$, $x_0 = 0$

Megoldás.

a) $f_1(x) = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \cdots \Big|_{u=3x^2} = 3x^2 - \frac{3^3}{3!}x^6 + \frac{3^5}{5!}x^{10} - \cdots , \qquad x \in \mathbb{R}$

b) $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \cdots , \qquad u \in \mathbb{R}$

$x_0 = 0$: $u = 4x$ helyettesítéssel:

$$f_2(x) = e^{4x} = 1 + 4x + \frac{4^2}{2!}x^2 + \frac{4^3}{3!}x^3 + \frac{4^4}{4!}x^4 + \cdots , \qquad x \in \mathbb{R}$$

$x_0 = 3$:

$$f_2(x) = e^{4(x-3)+12} = e^{12}\, e^{4(x-3)} =$$

$$= e^{12}\left(1 + 4(x-3) + \frac{4^2}{2!}(x-3)^2 + \frac{4^3}{3!}(x-3)^3 + \frac{4^4}{4!}(x-3)^4 + \cdots\right) , \quad x \in \mathbb{R}$$

c) $f_3(x) = \operatorname{sh} 2x^4 = u + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} + \frac{u^7}{7!} + \cdots \Big|_{u=2x^4} =$

$$= 2x^4 + \frac{2^3}{3!}x^{12} + \frac{2^5}{5!}x^{20} + \cdots , \qquad x \in \mathbb{R}$$

d) $f_4(x) = e^{-2x} \operatorname{ch} 5x = e^{-2x}\, \frac{e^{5x} + e^{-5x}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{3x} + e^{-7x}\right) = \cdots$

35. Feladat:

$$f(x) = 5x^3 e^{-3x^2} , \qquad x_0 = 0$$

Írja fel a függvény Taylor sorát! Konvergenciatartomány?
$f^{(100)}(0) = ?$, $f^{(101)}(0) = ?$ (A sorfejtésből adjon választ!)

Megoldás.

$$f(x) = 5x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}\Big|_{u=-3x^2} = 5\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n!} x^{2n+3} , \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad \Longrightarrow \quad f^{(n)}(0) = n!\, a_n$$

Így $f^{(100)}(0) = 100!\, a_{100}$, ahol a_{100} : x^{100} együtthatója:

$2n+3 = 100 \quad \Longrightarrow \quad \nexists\, n \in \mathbb{N}$, melyre ez teljesülne $\Longrightarrow \quad a_{100} = 0 \quad \Longrightarrow \quad f^{(100)}(0) = 0$

$f^{(101)}(0) = 101!\, a_{101}$, ahol a_{101} : x^{101} együtthatója:

$$2n+3 = 101 \quad \Longrightarrow \quad n = 49 \quad \Longrightarrow \quad f^{(101)}(0) = 101!\ 5\,\frac{(-3)^{49}}{49!}$$

36. Feladat:

Határozza meg a következő számsorok pontos összegét!

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k}{k!}$ $(= e^4)$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k \cdot k!}$ $(= e^{-1/2})$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$ $(= \sin 1)$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}$ $(= \operatorname{ch} 1 - 1)$

Megoldás. ...

37. Feladat:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^2 \sin x} = ?$$

Megoldás.

L'Hospital szabállyal hosszadalmas, ezért Taylor sorfejtéssel dolgozunk:

...

38. Feladat:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-x^4} + x^4 - 1}{x^5 \cdot \sin 2x^3} = ?$$

A számláló és a nevező megfelelő Taylor sorfejtésével oldja meg a feladatot!

Megoldás. ...

39. Feladat:

Szemléltessük, hogy $e^{j\varphi} = \cos\varphi + j \sin\varphi$

Megoldás.

$$e^{j\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(j\varphi)^n}{n!} = 1 + j\,\varphi + \frac{j^2\,\varphi^2}{2!} + \frac{j^3\,\varphi^3}{3!} + \frac{j^4\,\varphi^4}{4!} + \frac{j^5\,\varphi^5}{5!} + \cdots =$$

$$= \cdots = \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - + \cdots\right) + j\,\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - + \cdots\right) = \cos\varphi + j\,\sin\varphi$$

2.7. Binomiális sorfejtés

40. Feladat:

Írja fel az

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x}}\,, \qquad\qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

függvények $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorát és a sor konvergenciasugarát!
$a_4 = ?$ (Elemi műveletekkel adja meg!)

Megoldás.

Tudjuk, hogy $\quad (1+u)^\alpha = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} u^k\,, \qquad R = 1\,.\quad$ Ezt használjuk fel:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4}}\,\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x}{4}}} = \frac{1}{2}\left(1+\left(-\frac{x}{4}\right)\right)^{-1/2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1/2}{k}\left(-\frac{x}{4}\right)^k =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1/2}{k}\frac{(-1)^k}{4^k}\,x^k$$

$$\left|-\frac{x}{4}\right| < 1 \quad\Longrightarrow\quad |x| < 4 \quad\Longrightarrow\quad R_f = 4$$

$$a_4 = \frac{1}{2}\binom{-1/2}{4}\frac{(-1)^4}{4^4} = \frac{1}{2}\,\frac{\left(\dfrac{-1}{2}\right)\left(\dfrac{-3}{2}\right)\left(\dfrac{-5}{2}\right)\left(\dfrac{-7}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\,\frac{1}{4^4}$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{4}}\,\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}} = \frac{1}{2}\left(1+\left(-\frac{x^2}{4}\right)\right)^{-1/2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1/2}{k}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^k =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1/2}{k}\frac{(-1)^k}{4^k}\,x^{2k}$$

$$\left|-\frac{x^2}{4}\right| < 1 \quad\Longrightarrow\quad |x| < 2 \quad\Longrightarrow\quad R_g = 2$$

$$a_4 = \frac{1}{2}\binom{-1/2}{2}\frac{(-1)^2}{4^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\left(\dfrac{-1}{2}\right)\left(\dfrac{-3}{2}\right)}{1\cdot 2}\,\frac{1}{4^2}$$

41. Feladat:

> Írja fel az
> $$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{32 - 2\,x^2}}\,, \qquad x_0 = 0$$
> bázispontú Taylor sorát és a sor konvergenciasugarát!
> $a_8 = ?$ (Elemi műveletekkel adja meg!)
> $f^{(26)}(0) \; = ?\;, \qquad f^{(25)}(0) \; = ?$

Megoldás.

Tudjuk, hogy $\quad (1+u)^\alpha \; = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} u^k\;, \qquad R = 1\,.\quad$ Ezt használjuk fel:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{32}}\,\frac{1}{\left(1+(-\frac{x^2}{16})\right)^{1/5}} = \frac{1}{2}\left(1+\left(-\frac{x^2}{16}\right)\right)^{-1/5} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{5}}{k}\left(-\frac{x^2}{16}\right)^k =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}\binom{-\frac{1}{5}}{k}\frac{(-1)^k}{16^k}\,x^{2k}$$

Konvergenciasugár: $\left|-\dfrac{x^2}{16}\right| < 1 \quad\Longrightarrow\quad |x| < 4\,, \qquad R = 4$

$$a_8 \;=\; \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{6}{5}\right)\left(-\frac{11}{5}\right)\left(-\frac{16}{5}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\,\frac{1}{16^4} \qquad (x^8 \text{ együtthatója, } \; k=4)$$

$$f(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n \quad \text{és} \quad a_n \;=\; \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \qquad \text{miatt} \qquad f^{(n)}(0) = n!\cdot a_n$$

$$f^{(26)}(0) \;=\; 26!\cdot a_{26} \;=\; 26!\cdot\frac{1}{2}\binom{-\frac{1}{5}}{13}\frac{(-1)^{13}}{16^{13}}$$

(a_{26} : x^{26} együtthatója, ezért $2k = 26 \quad\Longrightarrow\quad k = 13$)

$f^{(25)}(0) \;=\; 25!\cdot a_{25} \;=\; 0\;,\quad$ mert $\; a_{25} = 0$

(x^{25} -es tag nincs a sorban, tehát 0 együtthatója van.)

42. Feladat:

> Írja fel az
> $$g(x) = \frac{2x^3}{\sqrt[5]{32 - 2\,x^2}}\,, \qquad x_0 = 0$$
> bázispontú Taylor sorát és a sor konvergenciasugarát!
> $g^{(102)}(0) \; = ?\;, \qquad g^{(103)}(0) \; = ?$

Megoldás.

Mivel $g(x) = 2x^3 \cdot f(x)$, felhasználhatjuk az előző példa eredményét:

$g(x) = 2x^3 \; \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{5}}{k} \frac{(-1)^k}{16^k} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{5}}{k} \frac{(-1)^k}{16^k} x^{2k+3}$, $R = 4$ (u.a.) $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ és $a_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!}$ miatt $g^{(n)}(0) = n! \cdot a_n$

$g^{(102)}(0) = 102! \cdot a_{102} = 0$, mert $a_{102} = 0$ (x^{102} -es tag nincs a sorban)

$g^{(103)}(0) = 103! \cdot a_{103} = 103! \cdot \binom{-\frac{1}{5}}{50} \frac{(-1)^{50}}{16^{50}}$

(a_{103} : x^{103} együtthatója, ezért $2k + 3 = 103 \implies k = 50$)

43. Feladat:

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \, \mathrm{d}x \approx ?$$

Az integranduszt nyolcadfokú Taylor polinomjával közelítse és becsülje meg a hibát!

Megoldás.

$$(1+x^4)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} x^{4k} = \underbrace{1 - \frac{1}{2} x^4 + \frac{3}{8} x^8}_{T_8(x)} - \frac{5}{16} x^{12} + - \cdots \qquad R = 1$$

$$\int_0^{1/2} \left(1+x^4\right)^{-1/2} \mathrm{d}x = x - \frac{1}{2\cdot 5} x^5 + \frac{3}{8 \cdot 9} x^9 - \frac{5}{16 \cdot 13} x^{13} + - \cdots \Big|_0^{1/2} \approx$$

$$\approx \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 2^5} + \frac{3}{8 \cdot 9 \cdot 2^9}, \qquad |H| < \frac{5}{16 \cdot 13 \cdot 2^{13}} \quad \text{(Leibniz sor)}$$

2.8. Fourier-sor

Bevezető:

Ha f 2π szerint periodikus és $f \in R_{[0,2\pi]}$, akkor f Fourier sora

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

ahol

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \cos kx \, \mathrm{d}x \, , \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \sin kx \, \mathrm{d}x \, , \quad k = 1, 2, \ldots$$

a_k, b_k neve: Fourier együtthatók. Itt $a \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

A konvergenciára vonatkozó általunk használt elégséges tétel:

Dirichlet tétel: (egy elégséges tétel a Fourier sor konvergenciájára)

Ha az f függvény 2π szerint periodikus, $f \in R_{[0,2\pi]}$, a periodus felbontható véges sok (α, β) intervallumra, hogy itt f monoton és a végpontokban $\exists$ a véges határérték, akkor f Fourier sora minden x-re konvergens, és

$$\Phi(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$$

44. Feladat:

Határozza meg az alábbi függvény Fourier sorát (összegfüggvénye legyen ϕ) !

$$f(x) = \begin{cases} 5\,, & \text{ha } x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0\,, & \text{ha } x \in \left[-\pi\,, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}\,, \pi\right) \end{cases} \qquad f(x) = f(x+2\pi)\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Írja fel a sor első négy nem nulla tagját! $\phi\left(-\frac{\pi}{2}\right) = ?\,, \quad \phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = ?$

Megoldás.

Rajzoljuk fel a függvényt!

Most $a = -\pi$ választás célszerű.

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \; \mathrm{d}x \;; \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-pi}^{\pi} f(x) \sin kx \; \mathrm{d}x$$

$b_k = 0$, mert a függvény páros. (Indokoljuk meg, hogy miért!)

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)}_{\text{páros}} \; \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \; \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \left(\int_{0}^{\pi/2} 5 \; \mathrm{d}x + \int_{\pi/2}^{\pi} 0 \; \mathrm{d}x \right) = \cdots = 5$$

$k \geq 1$ esete:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x) \; \cos kx}_{\text{páros}} \; \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \; \cos kx \; \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\int_{0}^{\pi/2} 5 \; \cos kx \; \mathrm{d}x + \int_{\pi/2}^{\pi} 0 \; \mathrm{d}x \right) = \frac{2}{\pi}\, 5 \left. \frac{\sin kx}{k} \right|_{0}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{10}{\pi} \, \frac{1}{k} \, \left(\sin k \, \frac{\pi}{2} - 0 \right)$$

Tehát:

$$a_k = \frac{10}{\pi}\,\frac{1}{k}\cdot\begin{cases} 0\,, & \text{ha } k=2l \\ 1\,, & \text{ha } k=4l+1 \\ -1\,, & \text{ha } k=4l+3 \end{cases}$$

Így a Fourier sor:

$$\phi(x) = \frac{5}{2} + \frac{10}{\pi}\left(\frac{1}{1}\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{7}\cos 7x + - \cdots\right)$$

$$\phi(x) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} \qquad \text{miatt} \qquad \phi\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{0+5}{2}$$

45. Feladat:

$$f(x) = x\,, \qquad \text{ha} \quad 0 < x \le 2\pi \qquad \text{és} \qquad f(x+2k\pi) = f(x) \quad (k\in\mathbb{Z})$$

a) Határozza meg f Fourier sorát!
Jelölje a Fourier sor összegfüggvényét $\phi(x)$! $f(x)=\phi(x)$ milyen x-ekre igaz?
Egyenletesen konvergens-e a Fourier sor?

b) A Fourier sor segítségével határozza meg a $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$ numerikus sor összegét!

Megoldás.

a) Rajzoljuk fel a függvényt!

Most $a=0$ választás célszerű.

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\ \mathrm{d}x\ ; \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\ \mathrm{d}x$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\ \mathrm{d}x = \cdots = 2\,\pi$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{x}_{u}\ \underbrace{\cos kx}_{v'}\ \mathrm{d}x = \cdots = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{x}_{u}\ \underbrace{\sin kx}_{v'}\ \mathrm{d}x = \cdots = -\frac{2}{k}$$

$$\phi(x) = \pi - 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}$$

Dirichlet tétele alapján: $f(x)=\phi(x)$, ha $x\neq 2k\pi$ és $\phi(2k\pi)=\pi$.

A konvergencia nem egyenletes, mert bár az f_n függvények folytonosak, de az összegfüggvény (ϕ) nem folytonos.

b) $\phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ alapján:

$$\frac{\pi}{2} = \pi - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\,\frac{\pi}{2}}{k}$$

$$\frac{\pi}{2} = \pi - 2\left(1 + 0 - \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{5} + 0 - \frac{1}{7} + \cdots\right)$$

$$\frac{\pi}{2} = \pi - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

Megjegyzés: A Fourier sort ügyesebben is felírhattuk volna az alábbi ötlettel: $g_1(x) := f(x) - \pi$. Ez már majdnem páratlan függvény. Ha a szakadási pontokban megváltoztatjuk a függvényértéket 0- ra, akkor az így kapott, mondjuk g függvény már páratlan, így a sorfejtése sokkal rövidebb. Mivel g és g_1 függvény Fourier sora megegyezik, így ebből már f Fourier sora π hozzáadásával megkapható.

46. Feladat:

Határozza meg az alábbi függvény Fourier sorát (összegfüggvénye legyen ϕ)!

$$f(x) = \begin{cases} 3\,, & \text{ha } x \in [-\pi, -\pi/2] \cup [\pi/2, \pi] \\ 0\,, & \text{ha } x \in (-\pi/2, \pi/2) \end{cases} \qquad f(x) = f(x + 2\pi)\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

$\phi(x) = ?$

Megoldás.

...

3. Többváltozós függvények

Ábrázolással csak előadáson foglalkozunk. Az alábbi felületekről beszélünk:
$ax + by + cz = d$
$z = x^2 + y^2\,; \quad z = -x^2 - y^2\,; \quad z = 6 + x^2 + y^2\,; \quad z = 6 - x^2 - y^2$
$z = \sqrt{x^2 + y^2}\,; \quad z^2 = x^2 + y^2$
$x^2 + y^2 + z^2 = R^2\,; \quad z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,; \quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$
$z = xy\,; \quad z = y^2 - x^2$

3.1. Határérték, folytonosság

1. Feladat:

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy+3}{x^2y+4} = ?}$$

Megoldás.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy+3}{x^2y+4} = \frac{0+3}{0+4} = \frac{3}{4}$$

(Csak behelyettesítenünk kellett.)

2. Feladat:

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2\,y)}{x^2\ \cos y^2} = ?}$$

Megoldás.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2\,y)}{x^2\ \cos y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2\,y)}{x^2y}\ \frac{y}{\cos y^2} = 1\cdot\frac{0}{1} = 0$$

3. Feladat:

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \operatorname{arctg}(xy)\cdot\sin\frac{1}{x^2+y^2} = ?}$$

Megoldás.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \operatorname{arctg}(xy)\cdot\sin\frac{1}{x^2+y^2} = 0\,,\ \text{mert } (0\cdot \text{korlátos}) \text{ alakú.}$$

4. Feladat:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{2x^2+2y^2} = ?$$

Megoldás.

Az $y = mx$ egyenesek mentén:

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{m\,x^2}{2x^2+2m^2\,x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2}\,\frac{m}{2+2m^2} = \frac{m}{2+2m^2} \quad \text{függ } m\text{-től}$$

$\Longrightarrow \quad \nexists$ a határérték.

5. Feladat:

Hol folytonos az alábbi függvény?

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y^2}{4x^4+7y^4}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Megoldás.

Ha $(x,y) \neq (0,0)$, akkor a függvény folytonos, mert folytonos függvények összetétele. Vizsgálandó a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ határérték! Az $y = mx$ egyenesek mentén:

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{3m^2x^4}{4x^4+7m^4x^4} = \frac{3m^2}{4+7m^4} \quad \text{függ } m\text{-től}$$

$\Longrightarrow \quad \nexists$ a határérték. Így a függvény az origóban nem folytonos.

6. Feladat:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3\,x\,y^3}{2x^2+2y^2} = ?$$

Megoldás.

$x_n = \varrho_n \cos\varphi_n$, $y_n = \varrho_n \sin\varphi_n$, φ_n tetsz., $\varrho_n \to 0$ egy tetszőleges $(0,0)$-hoz tartó pontsorozat. E mentén vizsgáljuk $f(x_n,y_n)$ konvergenciáját:

$$\lim_{\substack{\varrho_n \to 0 \\ \varphi_n \text{ tetsz.}}} \frac{3\varrho_n^4 \cos\varphi_n \sin^3\varphi_n}{2\varrho_n^2} = \lim_{\substack{\varrho_n \to 0 \\ \varphi_n \text{ tetsz.}}} \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\varrho_n^2}\; \underbrace{\frac{3}{2}\cos\varphi_n \sin^3\varphi_n}_{\text{korlátos}} = 0$$

Tehát a keresett határérték 0.

7. Feladat:
$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,y^2}{2x^2+3y^2} = ?}$$

Megoldás.
Az előző megoldás mintájára:
$x_n = \varrho_n \cos\varphi_n$, $y_n = \varrho_n \sin\varphi_n$, φ_n tetsz., $\varrho_n \to 0$ tetszőleges $(0,0)$-hoz tartó pontsorozattal vizsgálva:

$$\lim_{\substack{\varrho_n \to 0 \\ \varphi_n \text{ tetsz.}}} \frac{\varrho_n^3 \cos\varphi_n \sin^2\varphi_n}{2\varrho_n^2 \cos^2\varphi_n + 3\varrho_n^2 \sin^2\varphi_n} = \lim_{\substack{\varrho_n \to 0 \\ \varphi_n \text{ tetsz.}}} \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\varrho_n} \underbrace{\frac{\cos\varphi_n \sin^2\varphi_n}{2+\sin^2\varphi_n}}_{\text{korlátos}} = 0$$

Tehát a keresett határérték 0.

8. Feladat:
$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2+5y^2}{2x^2+y^2} = ?}$$

Megoldás.
Koordinátánkénti (másszóval iterált) limeszekkel dolgozunk:
$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0} \frac{3x^2+5y^2}{2x^2+y^2} = \lim_{x\to0} \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2}$$
$$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0} \frac{3x^2+5y^2}{2x^2+y^2} = \lim_{y\to0} \frac{5y^2}{y^2} = 5 \neq \frac{3}{2}$$
Tehát a keresett határérték nem létezik.

9. Feladat:
$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x+3y}{2x+8y} = ?}$$

Megoldás. ...
(Az előző módszer most is eredményre vezet.)

10. Feladat:
$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{e^{x^2-3y}}{1+2x^2+3y^2} = ?}$$

Megoldás.

f folytonos mindenütt, így a határérték mindenütt a helyettesítési érték:

$$\Longrightarrow \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\mathrm{e}^{x^2-3y}}{1+2x^2+3y^2} = f(2,1) = \frac{\mathrm{e}}{12}$$

11. Feladat: $\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} (3x^2+4y^2)\ \mathrm{arctg}\,\frac{x}{y} = ?}$

Megoldás. $0\,\cdot$ korlátos $\quad\longrightarrow\quad 0$

3.2. Parciális deriváltak, totális derivált

12. Feladat:

$$f(x,y) = \frac{x^2\,\mathrm{e}^{x+y^2}}{2x^2+1}$$

$f'_x(x,y) = ?\,;\quad f'_y(x,y) = ?$

Megoldás. ...

13. Feladat:

$$f(x,y) = x^3 - 3x\,y^2 + 2x - 5y + \ln 2$$

a) $f'_x(x,y) = ?\,;\quad f'_y(x,y) = ?$
b) Számítsa ki a másodrendű parciális deriváltfüggvényeket!
c) $\Delta f = f''_{xx} + f''_{yy} = ?$

Megoldás.

a) $f'_x(x,y) = 3x^2 - 3y^2 + 2\,,\qquad f'_y(x,y) = -6xy - 5$

b) $f''_{xx} = 6x$

$f''_{xy} = f''_{yx} = -6y$

$f''_{yy} = -6x$

c) $\Delta f = 6x - 6x \equiv 0$

Az ilyen tulajdonságú függvényt harmonikus függvénynek nevezzük.

14. Feladat:

$$f(x,y) = \sqrt{5\,(x-1)^4 + 4\,y^2}$$

Írja fel az elsőrendű parciális deriváltfüggvényeket!
(Az $(1,0)$ pontban a definícióval dolgozzon!)

Megoldás.

Ha $(x,y) \neq (1,0)$:

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{2\,\sqrt{5\,(x-1)^4 + 4\,y^2}}\ 20\,(x-1)^3$$

$$f'_x(1,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h\,,\,0) - f(1\,,\,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{5h^4} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{5}\,h^2}{h} = 0$$

Ha $(x,y) \neq (1,0)$:

$$f'_y(x,y) = \frac{1}{2\,\sqrt{5\,(x-1)^4 + 4\,y^2}}\ 8\,y$$

$$f'_y(1,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(1\,,\,0+k) - f(1\,,\,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\sqrt{4k^2} - 0}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{2\,|k|}{k} = \nexists$$

Ha $(x,y) \neq (1,0)$, akkor az f függvény totálisan deriválható, mert a parciálisok léteznek és folytonosak. Ha $(x,y) = (1,0)$, akkor az f függvény nem deriválható, mert $f'_y(1,0)$ nem létezik, tehát nem teljesül a totális deriválhatóság egyik szükséges feltétele.

15. Feladat: $f(x,y,z) = \mathrm{e}^{x^2+2y} + \sin(x\,z)$, $\quad$ $\mathrm{grad} f = ?$ $\quad$ Miért létezik?

16. Feladat: $f(x,y) = \mathrm{arctg}\,(x^2 + y^4 + 1)$, $\quad$ $\mathrm{grad} f(0,1) = ?$ $\quad$ Miért létezik?

17. Feladat:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x^2+2y^2}\ , & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 1\ , & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) $f'_x(x,y) = ?$; $\quad f'_y(x,y) = ?$
b) Hol differenciálható f ?

18. Feladat:

$$f(x,y) = (2x-y)^4 + 4x^3 - 8y^2$$

a) $f'_x(x,y) = ?\,;\quad f'_y(x,y) = ?$
b) Hol deriválható (totálisan) a függvény? (Indokoljon!)
$\operatorname{grad} f(1,2) = ?$
c) Számítsa ki a másodrendű parciális deriváltfüggvényeket!

Megoldás.

a) $f'_x(x,y) = 4\,(2x-y)^3 \cdot 2 + 12\,x^2$, $\qquad f'_y(x,y) = 4\,(2x-y)^3 \cdot (-1) - 16\,y$

b) Mivel a parciálisok mindenütt folytonosak, a függvény mindenütt totálisan deriválható (létezik mindenütt a gradiens).

$\operatorname{grad} f(1,2) = f'_x(1,2)\,\underline{i} + f'_y(1,2)\,\underline{j} = 12\,\underline{i} - 32\,\underline{j}$

c) $f''_{xx} = 8 \cdot 3\,(2x-y)^2 \cdot 2 + 24\,x$

$f''_{xy} = f''_{yx} = 8 \cdot 3\,(2x-y)^2 \cdot (-1)$

$f''_{yy} = -4 \cdot 3\,(2x-y)^2 \cdot (-1) - 16$

19. Feladat:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-2)\,y^2}{x^2+y^2} + 6x + 3y\,, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) $f'_x(x,y) = ?\,;\quad f'_y(x,y) = ?$
b) Hol differenciálható f ?

Megoldás.

a) Ha $(x,y) \neq (0,0)$: $\quad f'_x(x,y) = \dfrac{y^2\,(x^2+y^2) - (x-2)\,y^2\,2x}{(x^2+y^2)^2} + 6$

Ha $(x,y) = (0,0)$, akkor a definícióval kell dolgozni:

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{6h - 0}{h} = 6$$

Ha $(x,y) \neq (0,0)$: $\quad f'_y(x,y) = \dfrac{(x-2)\,2y\,(x^2+y^2) - (x-2)\,y^2\,2y}{(x^2+y^2)^2} + 3$

Ha $(x,y) = (0,0)$, akkor most is a definícióval kell dolgozni:

$$f'_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\dfrac{-2k^2}{k^2} + 3k - 0}{k} = \lim_{k\to 0} \left(-\frac{2}{k} + 3\right) \nexists$$

b) Az origóban nem deriválható totálisan a függvény, mert $f'_y(0,0) \nexists$.
(Egyébként a függvény nem is folytonos itt, tehát ezért sem deriválható.)
Másutt deriválható, mert a parciálisok léteznek és folytonosak.

20. Feladat:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(y^2+2x^2)}{\sqrt{y^2+2x^2}}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$ Folytonos-e f az origóban?

b) $f'_x(0,0) = ?$ (A definícióval dolgozzon!)

c) Totálisan deriválható-e f az origóban?

Megoldás.

a) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(y^2+2x^2)}{\sqrt{y^2+2x^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(y^2+2x^2)}{y^2+2x^2}\sqrt{y^2+2x^2} =$$

$$= 1 \cdot 0 = 0 = f(0,0)$$

Tehát f folytonos $(0,0)$-ban.

b) $$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{\sin 2h^2}{\sqrt{2h^2}} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin 2h^2}{2h^2}\sqrt{2}\,\frac{|h|}{h} = \nexists$$

c) Mivel $f'_x(0,0)\ \nexists$, f nem deriválható az origóban.

21. Feladat:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Folytonos-e f az origóban?
b) Írja fel az f'_x és f'_y függvényeket, ahol azok léteznek!
(Az origóban a definícóval dolgozzon!)

Megoldás.

...

22. Feladat:

$$f(x,y,z) = x^3 + y^4 + x^2\, y\, \mathrm{e}^{2z}$$

a) $\mathrm{grad} f(-1,1,0) = ?$ Miért létezik?

b) $f'''_{xxz} = ?$ $f'''_{xzx} = ?$

Megoldás.

a) $f'_x = 3\,x^2 + 2\,x\,y\,\mathrm{e}^{2z}\,,\qquad f'_y = 4\,y^3 + x^2\,\mathrm{e}^{2z}\,,\qquad f'_z = x^2\,y\,\mathrm{e}^{2z}\,2$

A parciális deriváltak mindenütt léteznek és folytonosak, ezért $\mathrm{grad} f$ mindenütt létezik.

$\mathrm{grad} f(-1,1,0) = f'_x(-1,1,0)\,\underline{i} + f'_y(-1,1,0)\,\underline{j} + f'_z(-1,1,0)\,\underline{k} = \underline{i} + 5\,\underline{j} + 2\,\underline{k}$

b)
$$\begin{aligned} f''_{xx} &= 6x + 2ye^{2z} & \qquad f''_{xz} &= 4xye^{2z} \\ f'''_{xxz} &= 4ye^{2z} & \qquad f'''_{xzx} &= 4ye^{2z} \end{aligned}$$

A parciálisok léteznek és folytonosak, így a "vegyes" parciálisok egyenlőek.

3.3. Érintősík, differenciál, iránymenti derivált

23. Feladat:

$$f(x,y) = (2x-y)^2 + 4x^2 - 8y$$

a) $f'_x(x,y) = ?\,;\quad f'_y(x,y) = ?$
b) Hol deriválható (totálisan) a függvény? (Indokoljon!)
c) Írja fel a függvény $P_0(1,2)$ pontjabeli érintősíkjának egyenletét!

Megoldás.

...

24. Feladat:

$$f(x,y) = \frac{\mathrm{e}^{3y}}{x^4+1}$$

a) $f'_x(x,y) = ?\,,\qquad f'_y(x,y) = ?$

b) $\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{(1,0)} = ?\,,$ ha $\underline{e} \parallel 2\,\underline{i} - 3\,\underline{j}$

c) Írja fel az $(1,0)$ ponthoz tartozó felületi pontban az érintősík egyenletét!

Megoldás.

...

25. Feladat:

$$f(x,y) = 3y + e^{xy^2} - 2y \operatorname{arctg}\frac{x}{y}, \qquad P_0(0,1)$$

a) $f'_x(x,y) = ?\,; \quad f'_y(x,y) = ?\,, \quad$ ha $y \neq 0$

b) Írja fel a függvény P_0 pontjabeli érintősíkjának egyenletét!

c) $df\,(P_0, (h,k)) = ?$

d) $\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0} = ?\,,\quad$ ha $\quad \underline{e} \parallel 2\,\underline{i} - 7\,\underline{j}$

e) $\max \left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0} = ?$ (és adja meg a maximumhoz tartozó irányt!)

$\min \left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0} = ?$ (és adja meg a minimumhoz tartozó irányt!)

Megoldás.

a) $$f'_x = y^2 e^{xy^2} - 2y \frac{1}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2} \frac{1}{y},$$

$$f'_y = 3 + 2xy\, e^{xy^2} - 2 \operatorname{arctg}\frac{x}{y} - 2y \frac{1}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2} \frac{-x}{y^2},$$

b) $f'_x(0,1) = -1\,, \qquad f'_y(0,1) = 3\,, \qquad f(0,1) = 4$

Az érintősík egyenlete:
($y \neq 0$-ra $\exists$ a gradiens, így létezik az érintősík is.)

$$f'_x(x_0,y_0)\,(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)\,(y-y_0) - (z - f(x_0,y_0)) = 0$$

Tehát $\qquad -1(x-0) + 3(y-1) - (z-4) = 0$

c) $df\,((0,1),(h,k)) = f'_x(0,1)\,h + f'_y(0,1)\,k = -h + 3k$

d) Mivel P_0 egy környezetében a függvény totálisan deriválható, ezért

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0} = \operatorname{grad} f(P_0) \cdot \underline{e}$$

$$|2\,\underline{i} - 7\,\underline{j}| = \sqrt{2^2+7^2} = \sqrt{53} \quad\Longrightarrow\quad \underline{e} = \frac{2}{\sqrt{53}}\,\underline{i} - \frac{7}{\sqrt{53}}\,\underline{j}$$

és $\quad \operatorname{grad} f(0,1) = -\underline{i} + 3\underline{j}$

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0} = (-\underline{i} + 3\underline{j}) \left(\frac{2}{\sqrt{53}}\,\underline{i} - \frac{7}{\sqrt{53}}\,\underline{j}\right) = -\frac{2}{\sqrt{53}} - \frac{21}{\sqrt{53}} = -\frac{23}{\sqrt{53}}$$

e) Mivel: $grad\, f(P_0) = (-1, 3)$ tehát

$$\max \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0} = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}, \qquad \text{ha } \underline{e} \text{ a } (-1,3) \text{ vektor irányába mutat}$$

$$\min \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0} = -\sqrt{10}, \qquad \text{ha } \underline{e} \text{ a } (1,-3) \text{ vektor irányába mutat}$$

26. Feladat:

$$f(x,y,z) = x^2y + yz - 5z^2\,, \qquad P_0(0, 10, 1)$$

a) $\mathrm{grad} f = ?$ Miért létezik a gradiens?

b) $\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0} = ?$, ha $\underline{e} \parallel -3\,\underline{j} + 4\,\underline{k}$

Megoldás.

a) $f'_x = 2xy$, $f'_y = x^2 + z$, $f'_z = y - 10z$
A parciálisok mindenütt léteznek és folytonosak $\Longrightarrow$ $\mathrm{grad} f$ mindenütt $\exists$.

b) $\mathrm{grad} f\ \exists\, K_{P_0}$-ban $\Longrightarrow$ $\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0} = \mathrm{grad} f(P_0) \cdot \underline{e} =$

$$= (0\,\underline{i} + \underline{j} + 0\,\underline{k}) \cdot (0\,\underline{i} - \frac{3}{5}\underline{j} + \frac{4}{5}\underline{k}) = -\frac{3}{5}$$

27. Feladat:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3\,y^2}{2\,x^2 + y^2}\,, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ -3\,, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$ Folytonos-e f az origóban?

b) $f'_x(x,y) = ?$, $f'_y(x,y) = ?$ (Az origóban a definícióval dolgozzon!)

c) $\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{(1,-1)} = ?$, ha $\underline{e} \parallel -5\,\underline{i} + \underline{j}$

d) Adja meg $\max \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{(1,-1)}$ és $\min \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{(1,-1)}$ értékét!

e) Írja fel az $(1,-1)$ ponthoz tartozó felületi pontban az érintősík egyenletét!

Megoldás.

a)

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}\frac{x^2\,-\,3\,y^2}{2\,x^2\,+\,y^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0}\frac{x^2\,-\,3\,y^2}{2\,x^2\,+\,y^2}=\lim_{y\to0}\frac{-3y^2}{y^2}=-3\neq\frac{1}{2}$$

Tehát a keresett határérték nem létezik.

$\Longrightarrow$ A függvény nem folytonos az origóban.

b) Ha $(x,y)\neq(0,0)$: $\quad f'_x(x,y)=\dfrac{2x\,(2x^2+y^2)\,-\,(x^2-3y^2)\,4x}{(2x^2+y^2)^2}$

$$f'_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)\,-\,f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\dfrac{h^2}{2\,h^2}+3}{h}=\lim_{h\to0}\frac{7}{2\,h}=\nexists$$

Ha $(x,y)\neq(0,0)$: $\quad f'_y(x,y)=\dfrac{-6y\,(2x^2+y^2)\,-\,(x^2-3y^2)\,2y}{(2x^2+y^2)^2}$

$$f'_y(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f(0,k)\,-\,f(0,0)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{\dfrac{-3k^2}{k^2}+3}{k}=\lim_{k\to0}\frac{0}{k}=0$$

c) A $(0,0)$ kivételével a parciálisok léteznek és folytonosak $\Longrightarrow$ grad$f$ $\exists$ itt.

Mivel grad$f$ $\exists$ K_{P_0}-ban $\Longrightarrow$ $\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0}=\mathrm{grad}f(P_0)\cdot\underline{e}=$

$$=(\frac{14}{9}\,\underline{i}+\frac{14}{9}\underline{j})\cdot(-\frac{5}{\sqrt{26}}\,\underline{i}+\frac{1}{\sqrt{26}}\underline{j})=-\frac{14}{9}\,\frac{5}{\sqrt{26}}+\frac{14}{9}\,\frac{1}{\sqrt{26}}=\frac{-56}{9\cdot\sqrt{26}}$$

d) $\max\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0}=|\mathrm{grad}f(P_0)|=\sqrt{\left(\dfrac{14}{9}\right)^2+\left(\dfrac{14}{9}\right)^2}=\dfrac{14}{9}\,\sqrt{2}\,,$

$$\text{ha}\quad \underline{e}=\frac{\mathrm{grad}f(P_0)}{|\mathrm{grad}f(P_0)|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\,\underline{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\,\underline{j}$$

$\min\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0}=-\,|\mathrm{grad}f(P_0)|=-\dfrac{14}{9}\,\sqrt{2}\,,$

$$\text{ha}\quad \underline{e}=-\frac{\mathrm{grad}f(P_0)}{|\mathrm{grad}f(P_0)|}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\,\underline{i}-\frac{1}{\sqrt{2}}\,\underline{j}$$

e) $f(1,-1)=\dfrac{-2}{3}$

Az érintősík egyenlete így:

$$\frac{14}{9}\,(x-1)\,+\,\frac{14}{9}\,(y+1)\,-\,(z+\frac{2}{3})\,=\,0$$

28. Feladat:

$$f(x,y) = \frac{y^3}{e^{2x+1}} = y^3\, e^{-2x-1}; \qquad P_0(-\tfrac{1}{2}, 1)$$

a) $\max \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0} = ?$ (és adja meg a maximumhoz tartozó irányt!)

b) $\min \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0} = ?$ (és adja meg a minimumhoz tartozó irányt!)

Megoldás.

$f'_x = y^3 e^{-2x-1}(-2), \qquad f'_x(-\tfrac{1}{2}, 1) = -2, \qquad f'_y = 3y^2 e^{-2x-1}, \qquad f'_y(-\tfrac{1}{2}, 1) = 3$

f'_x , f'_y mindenütt folytonos

$\Longrightarrow$ f totálisan deriválható P_0 egy környezetében (sőt mindenütt)

$\Longrightarrow$ P_0-ban $\exists$ minden irányban az iránymenti derivált és:

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0} = \mathit{grad}\, f(P_0)\ \underline{e} = |\mathit{grad}\, f(P_0)| \cdot |\underline{e}| \cdot \cos\varphi, \qquad \text{és} \qquad |\underline{e}| = 1$$

$\max \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0} = |\mathit{grad}\, f(P_0)|$;

ha $\cos\varphi = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{e}$ iránya $\mathit{grad}\, f(P_0)$ irányával egyenlő

$\min \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0} = -|\mathit{grad}\, f(P_0)|$;

ha $\cos\varphi = -1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \pi \quad \Rightarrow \quad \underline{e}$ iránya $\mathit{grad}\, f(P_0)$ irányával ellentétes

Most: $\mathit{grad}\, f(P_0) = (-2, 3)$ tehát

$\max \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{(-\frac{1}{2},1)} = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13},$ ha $\underline{e}$ a $(-2, 3)$ vektor irányába mutat

$\min \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{(-\frac{1}{2},1)} = -\sqrt{13},$ ha $\underline{e}$ a $(2, -3)$ vektor irányába mutat

29. Feladat:

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+3y^4}$$

a) $f'_x(0,0)=?\,;\quad f'_y(0,0)=?$
(A definícióval dolgozzon!)

b) Hol deriválható a függvény?
$\operatorname{grad} f|_{(1,2)}=?$

c) Írja fel az $(1,2)$ ponthoz tartozó felületi pontban az érintősík egyenletét!

d) $\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{(1,2)}=?\,,\quad$ ha $\quad \underline{e}\parallel -5\,\underline{i}$

e) Adja meg $\quad \max \left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{(1,2)}\quad$ értékét!

30. Feladat:

$$f(x,y)=\sqrt[3]{4x^3+3y^2}$$

a) $f'_x(x,y)=?\,;\quad f'_y(x,y)=?$

b) Hol deriválható (totálisan) a függvény? (Indokoljon!)

Megoldás.

. . .

31. Feladat:

$$f(x,y)=\frac{5x-3y}{2x+4y}\qquad\qquad (x_0,y_0)=(0,1)$$

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\;=?$

b) $\operatorname{grad} f(x_0,y_0)=?\qquad \mathrm{d}f\left((x_0,y_0),(h,k)\right)=?$

c) Milyen irányban lesz az (x_0,y_0) pontban az iránymenti derivált maximális? Adja meg ezt a maximális értéket is!

Megoldás.

a) Iterált limeszekkel cáélszerű megoldani.

. . .

3.4. Összetett függvény deriválása

32. Feladat:

$f \in C^2_{\mathbb{R}}; \qquad g(x,y) = f(x^2 - y^3)$
Határozza meg g másodrendű parciális deriváltjait!

Megoldás.

$$
\begin{aligned}
g(x,y) &= f(t)|_{t=x^2-y^3} \qquad \text{összetett függvényről van szó.} \\
g'_x &= f'(t)|_{t=x^2-y^3} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x^2-y^3) \qquad \text{alapján:} \\
g'_x &= f'(x^2-y^3)\cdot 2x \\
g'_y &= f'(x^2-y^3)\cdot(-3y^2) \\
g''_{xx} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} f'(x^2-y^3)\right)\cdot 2x + f'(x^2-y^3)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}2x\right) \qquad \text{alapján:} \\
g''_{xx} &= \big(f''(x^2-y^3)\cdot 2x\big)\cdot 2x + f'(x^2-y^3)\cdot 2 \\
g''_{xy} &= f''(x^2-y^3)\,2x\,(-3y^2) = g''_{yx} \\
g''_{yy} &= f''(x^2-y^3)\,(-3y^2)\,(-3y^2) + f'(x^2-y^3)\,(-6y)
\end{aligned}
$$

33. Feladat:

Igazoljuk, hogy ha F az (x^2-y^2)-nek tetszőleges, folytonosan differenciálható függvénye, akkor az

$$f(x,y) = y\,F(x^2-y^2)$$

kétváltozós függvény eleget tesz az

$$y^2\,f'_x(x,y) + x\,y\,f'_y(x,y) = x\,f(x,y)$$

differenciálegyenletnek!

Megoldás.
$f'_x = y\,F'(x^2-y^2)\,2x \qquad f'_y = F(x^2-y^2) + y\,F'(x^2-y^2)\,(-2y)$
A differenciálegyenlet bal oldalába helyettesítve:

$$
\begin{aligned}
y^2\,y\,F'(x^2-y^2)2x + x\,y\,\big(F(x^2-y^2) + y\,F'(x^2-y^2)(-2y)\big) &\overset{?}{=} x\,y\,F(x^2-y^2) \\
\text{Rendezve:}& \\
xyF(x^2-y^2) &\equiv xyF(x^2-y^2)
\end{aligned}
$$

Ez pedig igaz.

34. Feladat: Számítsa ki az

$$A = g''_{xx}\,(2,1) + g''_{xy}\,(2,1) - 2\,g''_{yx}\,(2,1)$$

kifejezés értékét, ahol $g(x,y) = f(x^2-y)$ és f-nek a $t_0 = 3$ körüli másodrendű Taylor polinomja

$$T_2\,(t) = 1 - (t-3) + 5\,(t-3)^2$$

Megoldás.

$f'(3) = -1 \qquad f''(3) = 10$

$g'_x = f'(x^2-y)\,2x \qquad g''_{xx} = f''(x^2-y)\,2x\,2x + f'(x^2-y)\,2$

$g''_{xy} = f''(x^2-y)\,2x\,(-1) = g''_{yx}$

$g''_{xx}\,(2,1) = f''(3)\cdot 4^2 + f'(3)\cdot 2 = 158$

$g''_{xy}\,(2,1) = f''(3)\,(-4) = -40$

$A = 158 - (-40) = 198$

35. Feladat:

$g_1(x)$ és $g_2(x)$ kétszer folytonosan differenciálható egyváltozós függvény ($g_1(x), g_2(x) \in C^2_{\mathbb{R}}$)

$$h(x,y) = x\cdot g_1(y-x) + y\cdot g_2(x-y), \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

Hozza egyszerübb alakra a $h''_{xx} + 2h''_{xy} + h''_{yy}$ kifejezést!

Megoldás.

$$h'_x = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,x\right)\cdot g_1(y-x) + x\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\,g_1(y-x)\right) + y\,\left(\frac{\partial}{\partial x}\,g_2(x-y)\right)$$

alapján:

$$\begin{aligned}
h'_x &= g_1(y-x) - x\,g_1'(y-x) + y\,g_2'(x-y)\\
h'_y &= x\,g_1'(y-x) + g_2(x-y) - y\,g_2'(x-y)\\
2h''_{xy} &= 2(g_1'(y-x) - x\,g_1''(y-x) + g_2'(x-y) - y\,g_2''(x-y))\\
h''_{xx} &= -g_1'(y-x) - g_1'(y-x) + x\,g_1''(y-x) + y\,g_2''(x-y)\\
h''_{yy} &= x\,g_1''(y-x) - g_2'(x-y) - g_2'(x-y) + y\,g_2''(x-y)\\
&\Longrightarrow\\
h''_{xx} + 2h''_{xy} + h''_{yy} &\equiv 0 \qquad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2
\end{aligned}$$

Esetleg a g_1, g_2 függvények argumentumát ne írjuk ki mindenütt (sok idő), csak jegyezzük meg, hogy g_1-et és deriváltjait az $(y-x)$ helyen, g_2-öt és deriváltjait az $(x-y)$ helyen vesszük. (Így áttekinthetőbb is a deriválás menete.)

36. Feladat:

$g \in C^2_{\mathbb{R}}$ változója helyébe írjunk $\dfrac{x}{2y}$ -t $(y \neq 0)$ és jelöljük az így kapott kétváltozós függvényt $f(x,y)$ -nal!
Adja meg $y \neq 0$ esetére az alábbi parciális deriváltakat!

$$f'_x(x,y) = ?\,, \qquad f'_y(x,y) = ?$$
$$f''_{xy}(x,y) = ?\,, \qquad f''_{yx}(x,y) = ?$$

Megoldás.

...

37. Feladat:

$g \in C^2_{\mathbb{R}}$ változója helyébe írjunk $\dfrac{2x}{y^2+1}$ -et és jelöljük az így kapott kétváltozós függvényt $f(x,y)$ -nal!

$$f'_x(x,y) = ?\,, \qquad f'_y(x,y) = ?\,, \qquad f''_{xy}(x,y) = ?$$

Megoldás.

...

3.5. Szélsőértékszámítás

38. Feladat:

$$f(x,y) = 2x^3 - 6x + 5 + y^3 - 12y$$

Keresse meg az f függvény lokális szélsőértékeit!

Megoldás. ...

39. Feladat:

$$f(x,y) = (x-3y+3)^2 + (x-y-1)^2$$

Keresse meg az f függvény lokális szélsőértékeit!

Megoldás.

$f'_x \;=\; 2(x-3y+3)+2(x-y-1)=0$
$f'_y \;=\; 2(x-3y+3)(-3)+2(x-y-1)(-1)=0$
Egy lineáris egyenletrendszerhez jutottunk most:

$$\left.\begin{array}{rl} 4x-\;\,8y+\;\,4 & =0 \\ -8x+20\,y-16 & =0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \left.\begin{array}{rl} x-\;\,2y & =-1 \\ -2x+5\,y & =4 \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad x=3 \;\text{ és }\; y=2$$

Tehát $P(2,3)$-ban teljesül a szükséges feltétel.

$$D(x,y) \;=\; \begin{vmatrix} 4 & -8 \\ -8 & 20 \end{vmatrix} \;=\; 80-64>0$$

$\Longrightarrow$ van lokális szélsőérték. $f''_{xx}(2,3)=4>0 \quad \Longrightarrow$ lokális minimum van

40. Feladat:

$$f(x,y) \;=\; (x-y+1)^2 \;-\; (x^2-2)^2$$

Keresse meg az f függvény lokális szélsőértékeit!

Megoldás.

$f'_x \;=\; 2(x-y+1)-2(x^2-2)\cdot 2x \;=\; 2+10\,x-4\,x^3-2\,y \;=\; 0$ (1)
$f'_y \;=\; 2(x-y+1)(-1) \;=\; 0$ (2)

(2)-ből: $y=x+1$ Ezt behelyettesítve (1)-be: $4\,x\,(x^2-2)=0$

Így 3 pontot kapunk, melyekben teljesül a szükséges feltétel, így lehet lokális szélsőérték:
$P_1(0,1)\,,\quad P_2(\sqrt{2},1+\sqrt{2})\,,\quad P_3(-\sqrt{2},1-\sqrt{2})$

$$D(x,y) \;=\; \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} \;=\; \begin{vmatrix} 10-12\,x^2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \;=\; 16-24\,x^2$$

$D(0,1)=16>0\,,\quad f''_{xx}=18>0 \quad \Longrightarrow$ lokális minimum van $(0,1)$-ben
$f(0,1)=-4$ értékkel.

$D|_{P_2}<0\,,\; D|_{P_3}<0 \quad \Longrightarrow \quad P_2$-ben és P_3-ban nincs lokális szélsőérték.

41. Feladat:

$$f(x,y)=2x\;+\;y\;+\;\frac{4}{xy}$$

Határozza meg f lokális szélsőértékeit!

Megoldás. ...

42. Feladat:

$$f(x,y) = \frac{1}{x^3} + y^3 - \frac{3y}{x}$$

Határozza meg f lokális szélsőértékeit!

Megoldás. ...

43. Feladat:

$$f(x,y) = (3y-x)^2 - 6y^2 + 8x$$

a) $f'_x(x,y) = ?\,;\quad f'_y(x,y) = ?$
b) Hol deriválható (totálisan) a függvény? (Indokoljon!)
c) Írja fel a függvény $P_0(2,1)$ ponthoz tartozó felületi pontban az érintősík egyenletét!
d) $\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{(2,1)} = ?\,,\quad$ ha $\quad \underline{e} \parallel -5\,\underline{i}$
e) Hol lehet f-nek lokális szélsőértéke?
Van-e lokális szélsőértéke? Ha igen, milyen jellegű?

Megoldás. ...

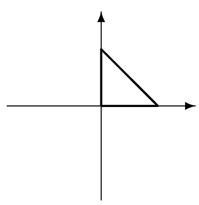
44. Feladat:

$$f(x,y) = x^3\,y^5$$

a) Keresse meg az f függvény abszolút szélsőértékét az $A(0,0)$, $B(1,0)$ $C(0,1)$ pontokkal kijelölt háromszög alakú zárt halmazon!
b) Van-e lokális szélsőértéke f-nek, ha $(x,y) \in \mathbb{R}^2$?

Megoldás.

a)
$$\left.\begin{aligned} f'_x &= 3\,x^2\,y^5 = 0 \\ f'_y &= 5\,x^3\,y^4 = 0 \end{aligned}\right\} \quad x = 0 \ \text{ vagy } \ y = 0\,.$$



Tehát az $(x,0)$ és a $(0,y)$ pontokban lehet lokális szélsőértéke. (Itt teljesül a szükséges feltétel.)

$f(x,y) > 0$ a tartomány belsejében,

$$f(x,y) = 0 \ \text{ a tengelyeken } (f(x,0) = 0\,,\ f(0,y) = 0)$$
$$\Longrightarrow \quad \min f = 0\,.$$

Weierstrass II. tétele alapján f-nek van maximuma is, mert folytonos és a tartomány korlátos és zárt (kompakt halmaz). A maximumot csak a tartomány határán veheti fel. Már csak az $y = 1 - x$ jöhet szóba.

$$g(x) := f(x, 1-x) = x^3\,(1-x)^5\,, \qquad x \in [0,1]$$

$g(0) = g(1) = 0\,,$ így nem lehet maximum.
Valahol az intervallum belsejében kell megtalálnunk a maximumot.

$$g'(x) \;=\; 3x^2\,(1-x)^5 \;+\; x^3\,5\,(1-x)^4\,(-1) \;=\; x^2\,(1-x)^4\,(3-8x) \;=\; 0$$

$$\Longrightarrow \quad x = \frac{3}{8}\,,\; y = \frac{5}{8}$$

Így a keresett maximális függvényérték: $\quad f\left(\dfrac{3}{8}, \dfrac{5}{8}\right) \;=\; \dfrac{3^5\,5^5}{8^8}$

b) Lokális szélsőérték csak a tengelyeken lehetne. A tételünket most nem tudnánk alkalmazni, mert $D(x,0) = 0$ és $D(0,y) = 0$ lenne esetünkben. Vizsgáljuk a függvényértékek előjelét!

$$\left.\begin{array}{ccccccc} - & - & - & \uparrow y & + & + & + \\ - & - & - & 0 & + & + & + \\ - & - & - & 0 & + & + & + \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \to x \\ + & + & + & 0 & - & - & - \\ + & + & + & 0 & - & - & - \\ + & + & + & | & - & - & - \end{array}\right\}\ \text{A függvényérték előjele.}$$

A tengelyeken a függvényérték nulla. De a tengelyek bármely pontjának minden környezetében felvesz a függvény pozitív és negatív értéket is, így a függvénynek sehol sincs lokális szélsőértéke.

45. Feladat:

$$f(x,y) \;=\; y^3 \;-\; 12y \;+\; 2\,(x+y)^2 \;-\; 8\,(x+y)$$

a) Határozza meg a függvény lokális szélsőérték helyeit és azok jellegét!
b) $df\,(\,(5,-1)\,,\,(h,k)\,) \;=\,?$

Megoldás.

...

3.6. Kétszeres integrál téglalap- és normál tartományokon

A tartományokat mindig rajzoljuk fel és jelöljük be, hogy mi szerint integrálunk belül!

46. Feladat:

$$\iint\limits_T x \sin(xy)\, \mathrm{d}T = ?,$$

ha T az $1 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$ téglalaptartomány.

1. ábra

Megoldás.

A függvény folytonos, ezért mindegy, hogy milyen sorrendben integrálunk, az eredmény ugyanaz. De, ha először x szerint integrálunk, akkor parciális integrál lenne, ezért próbáljuk meg a másik sorrendet!

$$\int_1^3 \int_0^{\pi/2} x \sin(xy)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x = \int_1^3 -\cos(xy)\big|_{y=0}^{\pi/2}\, \mathrm{d}x =$$

$$\int_1^3 \left(-\cos\frac{\pi x}{2} + 1\right) \mathrm{d}x = -\frac{\sin\dfrac{\pi x}{2}}{\dfrac{\pi}{2}} + x\Bigg|_1^3 = \cdots = 2 + \frac{4}{\pi}$$

47. Feladat:

$$\iint\limits_T x\, \mathrm{d}T = ?,$$

ha T az $y = x^2$ és az $y = x + 2$ által határolt korlátos tartomány.

2. ábra

Megoldás.

A két görbe metszéspontjai a $(-1, 1)$, $(2, 4)$ pontok és az x tengely felől nézve normáltartományról van szó.

$$\int_{-1}^{2} \int_{y=x^2}^{x+2} x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} -x\, y\big|_{x^2}^{x+2}\, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} \left(x\,(x+2) - x^3\right) \mathrm{d}x = \cdots = \frac{9}{4}$$

48. Feladat:

$$\iint\limits_T \frac{x^2}{y^2}\ \mathrm{d}T = ?,$$

ha az első síknegyedbe eső korlátos T tartomány:

$y \geq \dfrac{1}{x}$, $y \leq x$ és $1 \leq x \leq 2$

3. ábra

Megoldás.

Az x tengely felől nézve normáltartományról van szó.

$$\int\limits_1^2 \int\limits_{y=1/x}^{x} \frac{x^2}{y^2}\ \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 -\frac{x^2}{y}\Big|_{1/x}^{x}\ \mathrm{d}x = \int\limits_1^2 (-x + x^3)\ \mathrm{d}x = \cdots = \frac{9}{4}$$

49. Feladat:

Alakítsa kétféleképpen kétszeres integrállá az alábbi kettősintegrált majd az egyik módon számolja ki:

$$\iint\limits_T (18xy^2 - 9y)\ \mathrm{d}T\ ,$$

ahol T az $O(0,0)$, $A(2,0)$, $B(2,3)$ és a $C(1,3)$ pontok által meghatározott trapéz.

Megoldás.

Nem N_x, csak 2 N_x uniója. Így

$$I = \int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=0}^{3x} f(x,y)\ \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int\limits_{x=1}^{2} \int\limits_{y=0}^{3} f(x,y)\ \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

Viszont N_y:

$$I = \int\limits_{y=0}^{3} \int\limits_{x=y/3}^{2} f(x,y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Az integrál értékét az utóbbival számoljuk ki:

$$I = \int\limits_{y=0}^{3} (9x^2y^2 - 9xy)\,\Big|_{x=y/3}^{2}\ \mathrm{d}y = \int\limits_{y=0}^{3} (36y^2 - 18y - (y^4 - 3y^2))\ \mathrm{d}y =$$

$$= \int\limits_{y=0}^{3} (39y^2 - 18y - y^4)\ \mathrm{d}y = \left(13y^3 - 9y^2 - \frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_{y=0}^{3} = 13\cdot 27 - 81 - \frac{3^5}{5}$$

50. Feladat:

$$\iint_T e^{6x+y}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ ,$$

ahol T az $A(0,0)$, $B(5,0)$, $C(4,6)$ és a $D(3,6)$ pontok által meghatározott trapéz.
Alakítsa kétféleképpen kétszeres integrállá a fenti kettős integrált!
Az egyik segítségével számolja ki a kettős integrál értékét!

Megoldás. ...

51. Feladat:

Cserélje fel az integrálás sorrendjét!

a) $I_1 = \int\limits_{x=-1}^{0} \int\limits_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x + \int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=0}^{1-x} f(x,y)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x$

b) $I_2 = \int\limits_{x=0}^{\sqrt{2}} \int\limits_{y=0}^{x^2} f(x,y)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x + \int\limits_{x=\sqrt{2}}^{2} \int\limits_{y=0}^{2} f(x,y)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x + \int\limits_{x=2}^{4} \int\limits_{y=0}^{4-x} f(x,y)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x$

Megoldás.
A tartományokat feltétlenül rajzoljuk fel!

a) $I_1 = \int\limits_{y=0}^{1} \int\limits_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{x=1-y} f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$

b) $I_2 = \int\limits_{y=0}^{2} \int\limits_{x=\sqrt{y}}^{4-y} f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$

52. Feladat:

$$\int\limits_0^1 \int\limits_{y^2}^1 y\ \sin x^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ = ?$$

Megoldás.
Nem tudunk primitív függvényt felírni x szerint , ezért először y szerint próbálunk integrálni:

A kiindulás: $y^2 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ Ábra:

Felcserélve a sorrendet: $0 \le y \le \sqrt{x}$, $0 \le x \le 1$

$$I = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{\sqrt{x}} y \, \sin x^2 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_{x=0}^{1} \left. \frac{y^2}{2} \right|_0^{\sqrt{x}} \cdot \sin x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{1} x \, \sin x^2 \, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_{x=0}^{1} 2x \, \sin x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4} \left[- \cos x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{4} \left(- \cos 1 + 1 \right)$$

53. Feladat:

Cserélje fel az integrálás sorrendjét, majd számolja ki az alábbi integrált!

$$\int_0^{16} \int_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^{2} \sqrt[5]{1 + x^3} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

Megoldás. ...

54. Feladat:

Cserélje fel az integrálás sorrendjét:

$$\int_0^1 \int_{e^x}^{e^{2x}} f(x, y) \, dy \, dx$$

Megoldás. ...

3.7. Kettős integrálok transzformációja

55. Feladat:

$$\iint_T y^2 \, \mathrm{d}T = ?,$$

ha $T :$ $x^2 + y^2 \le 4$, $0 \le y \le x$

Megoldás.

Polártranszformációval dolgozunk:

$$I = \int_{\varphi=0}^{\pi/4} \int_{r=0}^{2} r^2 \sin^2\varphi \underbrace{r}_{|J|} \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\varphi = \int_{r=0}^{2} r^3 \mathrm{d}r \cdot \int_{\varphi=0}^{\pi/4} \underbrace{\sin^2\varphi}_{\frac{1-\cos 2\varphi}{2}} \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^2 \cdot \left.\left(\frac{1}{2}\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\right|_0^{\pi/4} = 4\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - 1$$

56. Feladat:

$$\iint_T x^2 y \ \mathrm{d}T = ?,$$

$$\text{ha } T: \quad 1 \le x^2 + y^2 \le 4\ ,\ \ y \ge 0\ ,\ \ x \ge 0$$

Megoldás.
Polártranszformációval dolgozunk:

$$I = \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{r=1}^{2} r^2 \cos^2\varphi \ r \sin\varphi \ r \ \ \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\varphi = \int_{r=1}^{2} r^4 \mathrm{d}r \cdot \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \cos^2\varphi \sin\varphi \ \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \left.\frac{r^5}{5}\right|_1^2 \cdot \left.\left(-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right)\right|_0^{\pi/2} = \left(0 + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{2^5}{5} - \frac{1}{5}\right) = \frac{31}{15}$$

57. Feladat:

$$\iint_T 4\,x\,y^3 \ \mathrm{d}T = ?,$$

$$\text{ha } T: \quad 4 \le x^2 + y^2 \le 9\ ,\ \ x \ge 0\ ,\ \ y \ge \frac{x}{\sqrt{3}}$$

Megoldás. ...

58. Feladat:

$$\iint_T \frac{1}{(1 + 2x^2 + 2y^2)^5} \ \mathrm{d}T = ?,$$

$$\text{ha } T: \quad x^2 + y^2 \le 4\ ,\ \ x \le 0$$

Megoldás.

Polártranszformációval dolgozunk:

$$I = \int_{r=0}^{2} \int_{\varphi=\pi/2}^{3\pi/2} \frac{1}{\left(1 + 2r^2 \cos^2\varphi + 2r^2 \sin^2\varphi\right)^5}\, r \;\mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}r = \int_{r=0}^{2} \int_{\varphi=\pi/2}^{3\pi/2} r\,(1 + 2r^2)^{-5}\;\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r =$$

$$= \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \int_{r=0}^{2} \frac{1}{4}\; 4r\;(1 + 2r^2)^{-5}\;\mathrm{d}r = \frac{\pi}{4}\; \frac{(1 + 2r^2)^{-4}}{-4}\Bigg|_0^2 = -\frac{\pi}{16}\left(\frac{1}{9^4} - 1\right)$$

59. Feladat:

$$\iint_T \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}\; dx\, dy \;= ? \qquad \text{ahol}$$

$$T: 4 \;\le\; x^2 + y^2 \;\le\; 25 \quad, \; x \;\le\; 0,\; y \;\ge\; 0.$$

Megoldás. ...

60. Feladat:

Határozza meg annak a síkrésznek a területét, amelyet a következő egyenlőtlenségek írnak le!

$$x^2 + y^2 \ge 4x \;,\;\; x^2 + y^2 \le 8x \;,\;\; y \le \sqrt{3}\, x \;,\;\; y \ge x$$

Megoldás.

Polártranszformációval dolgozunk:

$$\text{terület} = \iint_T 1 \;\mathrm{d}T = \int_{\varphi=\pi/4}^{\pi/3} \int_{r=4\,\cos\varphi}^{8\,\cos\varphi} r \;\;\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_{\varphi=\pi/4}^{\pi/3} \frac{r^2}{2}\Bigg|_{4\,\cos\varphi}^{8\,\cos\varphi} \mathrm{d}\varphi = 24 \int_{\varphi=\pi/4}^{\pi/3} \cos^2\varphi \;\mathrm{d}\varphi = \cdots$$

61. Feladat:

$$\iint_T f \;\; \mathrm{d}T \;= ?,$$

ha $T:\quad x^2 - 4x + y^2 \le 0 \;,\;\; 0 \le y \quad$ és

a) $f(x,y) \;=\; y\,(x^2 + y^2)^3$

b) $f(x,y) \;=\; (x^2 - 4x + y^2)^5$

Megoldás.

a) $x = r\ \cos\varphi\ ,\ \ y = r\ \sin\varphi\ ,\ \ |J| = r\ ,\ \ 0 \le r \le 4\ \cos\varphi\ ,\ \ 0 \le \varphi \le \pi/2$

$$I\ =\int\limits_{\varphi=0}^{\pi/2}\ \int\limits_{r=0}^{4\ \cos\varphi} r\ \sin\varphi\ \ (r^2)^3\ \ r\ \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\varphi\ =\ (\text{ innen HF.})\ =\ \frac{4^9}{90}$$

b) $x = 2 + r\ \cos\varphi\ ,\ \ y = r\ \sin\varphi\ ,\ \ |J| = r\ ,\ \ 0 \le r \le 2\ ,\ \ 0 \le \varphi \le \pi$

$$x^2 - 4x + y^2\ =\ (x-2)^2 + y^2 - 4 = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi - 4\ =\ r^2 - 4$$

$$I\ =\int\limits_{\varphi=0}^{\pi}\ \int\limits_{r=0}^{2}\ (r^2-4)^5\ r\ \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\varphi\ =\ \cdots\ =\ -\frac{4^6\ \pi}{12}$$

62. Feladat:

Számoljuk ki az R sugarú körlap területét!

Megoldás. ...

63. Feladat:

$$\iint\limits_T \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\ \ \mathrm{d}T\ = ?$$

a) $T:\quad 1 \le x^2 + y^2 \le R^2$ b) $T:\quad 1 \le x^2 + y^2$

Megoldás. ...

3.8. Hármas integrál

64. Feladat:

$$I\ =\ \int_V xy^2z^3\ dV\ = ?$$

A V korlátos térrész határai:

$$z = xy\,,\text{(felület)}\quad z = 0\,,\quad x = 1\,,\quad y = 0\,,\quad y = x\ \ \text{(síkok)}$$

Megoldás.

$$I = \iint_{\text{háromszög}} \int_{z=0}^{xy} xy^2 z^3 \, dz \, dy \, dx = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x} \int_{z=0}^{xy} xy^2 z^3 \, dz \, dy \, dx =$$

$$= \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x} xy^2 \left[\frac{z^4}{4} \right]_{z=0}^{z=xy} dy \, dx = \frac{1}{4} \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x} x^5 y^6 \, dy \, dx =$$

$$\frac{1}{4} \int_{x=0}^{1} x^5 \left[\frac{y^7}{7} \right]_{y=0}^{y=x} dx = \frac{1}{4.7} \int_{x=0}^{1} x^{12} \, dx = \frac{1}{364}$$

65. Feladat:

$$I = \int_V \sqrt{x^2+y^2} \, dV = ?$$

A V korlátos térrész határai:

$$z = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{(kúp)} \quad \text{és a} \quad z = 1 \quad \text{(sík)}$$

Megoldás.

A térrész merőleges vetülete az (x, y) síkra az $x^2 + y^2 = 1\,, z = 0$ kör, a térrész hengerben van. Hengerkoordinátákkal dolgozunk.

Hengerkoordináták:

$$x = r\cos\varphi\,, \ y = r\sin\varphi\,, \ z = z\,, \ r \geq 0\,, \ \varphi \in [0, 2\pi)$$

A Jacobi determináns abszolútértéke: $|J| = r$

$$I = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \int_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{z=1} \sqrt{x^2+y^2} \, dz \, dT =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{r=0}^{1} \int_{z=r}^{z=1} r \,.\, |J| \, dz \, dr \, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^{1} \int_{z=r}^{z=1} r^2 \, dz \, dr \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^{1} r^2 \left[z \right]_r^1 dr \, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^{1} r^2 (1-r) \, dr \, d\varphi = \ldots = \frac{\pi}{6}$$

66. Feladat: Számolja ki az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű henger és a $z = 0$ valamint a $z = 2 - x - y$ egyenletű síkok által határolt térrész térfogatát!

Megoldás.

$$V = \iiint_V 1 \, dV = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \int_{z=0}^{z=2-x-y} 1 \, dz \, dT =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{r=0}^{1} \int_{z=0}^{z=2-r\cos\varphi - r\sin\varphi} 1 \cdot |J| \, dz \, dr \, d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\int_{z=0}^{z=2-r\cos\varphi-r\sin\varphi} r\,dz\,dr\,d\varphi \;=$$

$$\int_0^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\big[z\big]_{z=0}^{z=2-r\cos\varphi-r\sin\varphi} r\;dr\,d\varphi \;=$$

$$\int_0^{2\pi}\int_{r=0}^{1}(2-r\cos\varphi-r\sin\varphi)\,r\;dr\,d\varphi \;=\; ... \;=\; 2\pi$$

67. Feladat: Számolja ki a $z=\sqrt{x^2+y^2}$ és a $z=6-x^2-y^2$ egyenletű felületek által határolt térrész térfogatát!

Megoldás.

A kúp és a paraboloid által határolt térrész merőleges vetülete az (x,y) síkra az $x^2+y^2=R^2\,,z=0$ kör, a térrész hengerben van. Hengerkoordinátákkal dolgozunk.
A vetület a metszetgörbe vetülete, ezért az $\sqrt{x^2+y^2}=6-x^2-y^2$, azaz a $\sqrt{R^2}=6-R^2$ egyenletből számoljuk a vetületi kör sugarát: $R=6-R^2$, azaz $R=2$ ($R=-3$ nem lehet a sugár).

$$V \;=\; \iiint_V 1\;dV \;=\; \iint_{x^2+y^2\le 4}\int_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{z=6-x^2-y^2} 1\;dz\,dT \;=$$

$$\int_0^{2\pi}\int_{r=0}^{2}\int_{z=r}^{z=6-r^2} 1\cdot|J|\;dz\,dr\,d\varphi \;=$$

$$\int_0^{2\pi}\int_{r=0}^{2}\int_{z=r}^{z=6-r^2} r\;dz\,dr\,d\varphi \;=$$

$$\int_0^{2\pi}\int_{r=0}^{2}\big[z\big]_{z=r}^{z=6-r^2} r\;dr\,d\varphi \;=$$

$$\int_0^{2\pi}\int_{r=0}^{2}(6-r^2-r)\,r\;dr\,d\varphi \;=\; ... \;=\; 32\pi/3$$

68. Feladat:

$$I \;=\; \int_V xyz\;dV \;=?$$

Ahol a V korlátos térrész az $x^2+y^2+z^2\le 1$ gömb belsejének az $x\ge 0\,,\ y\ge 0\,,\ z\ge 0$ térnyolcadba eső része.

Megoldás.

Gömbi koordinátákkal dolgozunk.
Jelöljük az (x,y,z) pontba mutató helyvektor hosszát r-rel, a z tengely pozitív szárával bezárt szögét ϑ-val! Így $z=r\cos\vartheta$.
Legyen továbbá a helyvektor (x,y) síkra való merőleges vetületének az x tengely pozitív szárával bezárt szöge φ. A helyvektor (x,y) síkra való merőleges vetületének a hossza $r\sin\vartheta$, így $x=r\sin\vartheta\cos\varphi\,,\ y=r\sin\vartheta\sin\varphi\,.$
A geometriai meggondolásból kapjuk, hogy $0\le r\le 1$, $0\le\varphi<\pi/2\,,\ 0\le\vartheta\le\pi/2\,.$
A gömbi koordinátákhoz tartozó Jacobi determináns abszolútértéke $|J|=r^2\sin\vartheta\,.$

$$I = \iiint_V xyz\, dV = \iint_{x^2+y^2\le 1\,,\, x\ge 0\,,\, y\ge 0} \int_{z=0}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz\, dz\, dT =$$

$$\int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{1} \int_{\vartheta=0}^{\pi/2} (r\sin\vartheta\cos\varphi\, r\sin\vartheta\sin\varphi\, r\cos\vartheta) \cdot |J|\, d\vartheta\, dr\, d\varphi =$$

$$\int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{1} \int_{\vartheta=0}^{\pi/2} (r\sin\vartheta\cos\varphi\, r\sin\vartheta\sin\varphi\, r\cos\vartheta)\, r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, dr\, d\varphi =$$

$$\int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{1} \int_{\vartheta=0}^{\pi/2} r^5 \sin^3\vartheta\cos\vartheta\, \cos\varphi\sin\varphi\, d\vartheta\, dr\, d\varphi =$$

$$\int_{\varphi=0}^{\pi/2} \cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi \int_{r=0}^{1} r^5\, dr \int_{\vartheta=0}^{\pi/2} \sin^3\vartheta\cos\vartheta\, d\vartheta =$$

$$= \left[\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_0^{\pi/2} \left[\frac{r^6}{6}\right]_0^1 \left[\frac{\sin^4\vartheta}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{48}$$

69. Feladat: Számolja ki az $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$ és a $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{3}\,\sqrt{x^2+y^2}$ egyenlőtlenségekkel jellemzett térrész térfogatát!

Megoldás. A térrész az egységgömbben van. Gömbkoordinátákkal dolgozunk.
A $z = \sqrt{x^2+y^2}$ kúpfelületnél : $\vartheta = \pi/4$,
a $z = \sqrt{3}\,\sqrt{x^2+y^2}$ kúpfelületnél pedig: $\vartheta = \pi/6$.

$$V = \iiint_V 1\, dV = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} \int_{\vartheta=\pi/6}^{\pi/4} r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, dr\, d\varphi =$$

$$= 2\pi \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 \Big[-\cos\vartheta\Big]_{\pi/6}^{\pi/4} = \frac{2\pi}{3} \quad \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$$

70. Feladat: Számolja ki a $(x-2)^2 + y^2 = 4$ egyenletű henger és a $z = 0$ sík valamint a $z = x^2 + y^2$ egyenletű paraboloid által határolt térrész térfogatát!

71. Feladat:

$$I = \int_V 2z\, dV = ?$$

Ahol a V korlátos térrész az $z \le 3 - \sqrt{x^2+y^2}$ és a $z \ge 2$ egyenlőtlenségekkel jellemzett.

72. Feladat:

$$I = \int_V xy^2z^3\, dV = ?$$

Ahol a V korlátos térrész az $x^2 + y^2 + z^2 \le 9$ és a $z \ge \sqrt{3x^2+3y^2}$ egyenlőtlenségekkel jellemzett. (Gömbi trafo.)

73. Feladat:

$$I = \int_V x^2 z \, dV = ?$$

Ahol a V korlátos térrész az $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ és a $z \geq \dfrac{x^2 + y^2}{3}$ egyenlőtlenségekkel jellemzett. (Henger trafo.)

74. Feladat: Számoljuk ki az R sugarú gömb térfogatát!

75. Feladat: Írjuk föl és számoljuk ki az R sugarú, m tömegű, homogén gömb tehetetlenségi nyomatékát tetszőleges, középpontján átmenő tengelyre vonatkoztatva!

76. Feladat: Írjuk föl és számoljuk ki az R sugarú, m tömegű henger tehetetlenségi nyomatékát az alkotóival párhuzamos szimmetriatengelyére vonatkoztatva!

4. Komplex függvénytan

4.1. Cauchy–Riemann egyenletek, differenciálhatóság, regularitás, harmonikus társ

1. Feladat:

$$v(x,y) = cx^2 + 2xy - 4y^2 + 3$$

a) Adja meg a c paraméter értékét úgy, hogy $v(x,y)$ egy, az egész komplex számsíkon reguláris $f(z)$ komplex-változós függvény képzetes része legyen! ($c \in \mathbb{R}$)
b) $f'(1-2j) = ?$
Megoldás.
a) $\Delta v = v''_{xx} + v''_{yy} = 0$-nak kell teljesülni.

$$v'_x = 2cx + 2y, \qquad v''_{xx} = 2c$$
$$v'_y = 2x - 8y, \qquad v''_{yy} = -8$$

Tehát $\Delta v = 2c - 8 = 0$, ahonnan $c = 4$.
b)

$$f'(z_0) = u'_x(x_0,y_0) + jv'_x(x_0,y_0) = v'_y(x_0,y_0) + jv'_x(x_0,y_0)$$
$$f'(1-2j) = v'_y(1,-2) + jv'_x(1,-2) = \big(2x - 8y + j(8x+2y)\big)\Big|_{(1,-2)} = 18 + 4j$$

2. Feladat: Hol differenciálható, és hol reguláris az $f(z) = z^2 \operatorname{Re}(z)$ függvény?
Megoldás.

$$f(z) = (x^2 - y^2 + 2jxy)x = \underbrace{x^3 - xy^2}_{u(x,y)} + j\underbrace{2x^2y}_{v(x,y)},$$

ahonnan

$$u'_x = 3x^2 - y^2, \qquad v'_x = 4xy,$$
$$u'_y = -2xy, \qquad v'_y = 2x^2.$$

A parciális deriváltak mindenütt folytonosak, tehát az $u(x,y)$, $v(x,y)$ függvények mindenütt totálisan differenciálhatók. A Cauchy–Riemann egyenletek és megoldásuk:

$$3x^2 - y^2 = 2x^2 \quad \text{és} \quad 4xy = 2xy$$
$$x^2 - y^2 = 0 \qquad 2xy = 0$$
$$|x| = |y| \qquad x = 0 \text{ vagy } y = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy a függvény csak az origóban differenciálható, és sehol sem reguláris.

3. Feladat:

$$u(x,y) = 2x^3 - 6xy^2 + 5x - 2y$$

Igazolja, hogy az $u(x,y)$ kétváltozós függvény az egész $\mathbb{R}^2$ síkon harmonikus függvény, és keresse meg a $v(x,y)$ harmonikus társfüggvényét, amellyel együtt az $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ függvény az egész komplex síkon reguláris komplex függvény. ($z = x + jy$)

Megoldás. Az u parciális deriváltjai:

$$\begin{aligned} u'_x &= 6x^2 - 6y^2 + 5, & u''_{xx} &= 12x, \\ u'_y &= -12xy - 2, & u''_{yy} &= -12x, \end{aligned}$$

tehát $\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} = 0$ az egész síkon.
A keresett $v(x,y)$-nek ismerjük a parciális deriváltjait:

$$v'_x = -u'_y = 12xy + 2, \qquad v'_y = u'_x = 6x^2 - 6y^2 + 5.$$

Az első egyenletet x szerint integrálva, majd az eredményt y szerint deriválva:

$$\begin{aligned} v(x,y) &= \int (12xy + 2)dx = 6x^2y + 2x + C(y), \\ v'_y &= 6x^2 + C'(y) \end{aligned}$$

Ezt összevetve v'_y eredeti alakjával,

$$C'(y) = -6y^2 + 5, \qquad \text{ahonnan} \qquad C(y) = \int (-6y^2 + 5)dy = -2y^3 + 5y + c.$$

Tehát

$$\begin{aligned} v(x,y) &= 6x^2y + 2x - 2y^3 + 5y + c, & (c \in \mathbb{R}) \\ f(z) &= 2x^3 - 6xy^2 + 5x - 2y + j(6x^2y + 2x - 2y^3 + 5y + c) & (z = x + jy) \end{aligned}$$

Eljárhatunk fordított sorrendben is, először v'_y-t integráljuk y szerint:

$$\begin{aligned} v(x,y) &= \int (6x^2 - 6y^2 + 5)dy = 6x^2y - 2y^3 + 5y + C(x), \\ v'_x &= 12xy + C'(x) \end{aligned}$$

Ekkor $C'(x) = 2$, tehát $C(x) = 2x + c$ ($c \in \mathbb{R}$).

4. Feladat: Hol differenciálható, és hol reguláris a következő függvény:

$$f(z) = \operatorname{ch}\left(\overline{2z}\right)$$

Megoldás.

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}\left(\overline{2z}\right) &= \operatorname{ch}(2x - j2y) = \operatorname{ch}(2x)\operatorname{ch}(j2y) - \operatorname{sh}(2x)\operatorname{sh}(j2y) = \\ &= \operatorname{ch}(2x)\cos(2y) - j\operatorname{sh}(2x)\sin(2y). \end{aligned}$$

Tehát a függvény valós és képzetes része:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \operatorname{ch}(2x)\cos(2y), \\ v(x,y) &= -\operatorname{sh}(2x)\sin(2y). \end{aligned}$$

Látható, hogy u és v a teljes $\mathbb{R}^2$ síkon totálisan differenciálható, mivel a parciális deriváltjaik léteznek és folytonosak mindenütt. A parciális deriváltak:

$$\begin{aligned} u'_x &= 2\operatorname{sh}(2x)\cos(2y), & v'_x &= -2\operatorname{ch}(2x)\sin(2y), \\ u'_y &= -2\operatorname{ch}(2x)\sin(2y), & v'_y &= -2\operatorname{sh}(2x)\cos(2y). \end{aligned}$$

A Cauchy–Riemann egyenletek:

$$\begin{aligned} u'_x &= v'_y, & 2\,\mathrm{sh}(2x)\cos(2y) &= -2\,\mathrm{sh}(2x)\cos(2y),\\ u'_y &= -v'_x, & -2\,\mathrm{ch}(2x)\sin(2y) &= 2\,\mathrm{ch}(2x)\sin(2y). \end{aligned}$$

A második egyenletből:

$$\mathrm{ch}(2x)\sin(2y) = 0 \quad\Rightarrow\quad \sin(2y) = 0 \quad\Rightarrow\quad y = k\frac{\pi}{2} \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ezt felhasználva az első egyenletből $\mathrm{sh}(2x) = 0$, azaz $x = 0$ adódik.
Tehát az $f(z)$ függvény a $jk\frac{\pi}{2}$ pontokban ($k \in \mathbb{Z}$) differenciálható, és sehol sem reguláris.

4.2. Elemi függvények, egyenletek megoldása

5. Feladat:

$$z = e^{2-3j}, \qquad \mathrm{Re}\, z =?, \qquad \mathrm{Im}\, z =?, \qquad |z| =?, \qquad \mathrm{arc}\, z =?, \qquad \bar{z} =?$$

Megoldás.

$$z = e^2 e^{-3j} = e^2(\cos 3 - j\sin 3) = e^2\cos 3 + j(-e^2\sin 3),$$

tehát

$$\mathrm{Re}\, z = e^2\cos 3, \qquad \mathrm{Im}\, z = -e^2\sin 3, \qquad |z| = e^2, \qquad \mathrm{arc}\, z = -3, \qquad \bar{z} = e^{2+3j}.$$

6. Feladat:

$a)$ $\ln(-\sqrt{3}+j) =?$ $b)$ $\ln(-3j) =?$ $c)$ $\mathrm{Ln}(-3j) =?$

$d)$ $\ln(-e) =?$ $e)$ $(\sqrt{2}-j\sqrt{2})^j =?$

Megoldás. Emlékeztetőül:

$$\begin{aligned} \ln z &= \ln|z| + j\,\mathrm{arc}\, z, & -\pi \le \mathrm{arc}\, z < \pi,\\ \mathrm{Ln}\, z &= \ln|z| + j(\mathrm{arc}\, z + 2k\pi), & k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

a) $\ln(-\sqrt{3}+j) = \ln 2 + j\frac{5\pi}{6}$.
b) $\ln(-3j) = \ln 3 - j\frac{\pi}{2}$.
c) $\mathrm{Ln}(-3j) = \ln 3 + j\big(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\big)$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
d) $\ln(-e) = 1 - j\pi$.
e) $(\sqrt{2}-j\sqrt{2})^j = e^{j\ln(\sqrt{2}-j\sqrt{2})} = e^{j(\ln 2 - j\frac{\pi}{4})} = e^{\frac{\pi}{4}} \cdot e^{j\ln 2} = e^{\frac{\pi}{4}}(\cos\ln 2 + j\sin\ln 2)$.

7. Feladat:

$a)$ $\sin\big(\frac{\pi}{2} + j\pi\big) =?$ $b)$ $\cos(1+2j) =?$ $c)$ $\mathrm{sh}(1+6j) =?$

Megoldás. Emlékeztetőül:

$$\sin(jx) = j\,\mathrm{sh}\,x, \qquad \mathrm{sh}(jx) = j\sin x$$
$$\cos(jx) = \mathrm{ch}\,x, \qquad \mathrm{ch}(jx) = \cos x.$$

a)

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + j\pi\right) = \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1}\underbrace{\cos(j\pi)}_{\mathrm{ch}\,\pi} + \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0}\underbrace{\sin(j\pi)}_{j\,\mathrm{sh}\,\pi} = \mathrm{ch}\,\pi.$$

Tehát

$$\mathrm{Re}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + j\pi\right)\right) = \mathrm{ch}\,\pi, \qquad \mathrm{Im}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + j\pi\right)\right) = 0.$$

b)

$$\cos(1+2j) = \cos 1\underbrace{\cos 2j}_{\mathrm{ch}\,2} - \sin 1\underbrace{\sin 2j}_{j\,\mathrm{sh}\,2} = \cos 1\,\mathrm{ch}\,2 - j\sin 1\,\mathrm{sh}\,2.$$

c)

$$\mathrm{sh}(1+6j) = \mathrm{sh}\,1\underbrace{\mathrm{ch}\,6j}_{\cos 6} + \mathrm{ch}\,1\underbrace{\mathrm{sh}\,6j}_{j\sin 6} = \mathrm{sh}\,1\cos 6 + j\,\mathrm{ch}\,1\sin 6.$$

8. Feladat: Oldjuk meg az $e^{j\bar{z}} + 5 = 0$ egyenletet!

Megoldás.

$$\begin{aligned}
e^{j\bar{z}} &= -5 \\
j\bar{z} &= \mathrm{Ln}(-5) = \ln 5 + j(-\pi + 2k\pi), \qquad (k \in \mathbb{Z}) \\
\bar{z} &= -\pi + 2k\pi - j\ln 5 \\
z &= -\pi + 2k\pi + j\ln 5
\end{aligned}$$

9. Feladat: Keresse meg az

$$f(z) = \frac{1}{\sin(2z) + 3j}$$

izolált szinguláris pontjait!

Megoldás. Mivel a nevező mindenütt reguláris, így a szinguláris pontok a nevező zérushelyei:

$$\begin{aligned}
\sin(2z) + 3j &= 0, && \text{felhasználjuk, hogy } \sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \\
\frac{e^{2jz} - e^{-2jz}}{2j} + 3j &= 0, && /\cdot 2j \\
e^{2jz} - e^{-2jz} - 6 &= 0, && a := e^{2jz} \\
a - \frac{1}{a} - 6 &= 0, && /\cdot a \\
a^2 - 6a - 1 &= 0, && a_{1,2} = 3 \pm \sqrt{10} \\
2jz &= \mathrm{Ln}(3 \pm \sqrt{10}).
\end{aligned}$$

A két gyököt külön kezeljük:

$$
\begin{aligned}
2jz_1 &= \mathrm{Ln}(3+\sqrt{10}) & 2jz_2 &= \mathrm{Ln}(3-\sqrt{10}) & \\
2jz_1 &= \ln(3+\sqrt{10}) + j2k\pi & 2jz_2 &= \ln|3-\sqrt{10}| + j(-\pi+2k\pi) & (k\in\mathbb{Z}) \\
z_1 &= k\pi - \frac{j}{2}\ln(3+\sqrt{10}) & z_2 &= \Big(-\frac{\pi}{2}+k\pi\Big) - \frac{j}{2}\ln(\sqrt{10}-3) &
\end{aligned}
$$

10. Feladat: Keresse meg az $f(z) = \operatorname{sh} z$ függvény nullhelyeit!

1. Megoldás.

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{1}{2}\Big(e^z - \frac{1}{e^z}\Big) = 0,$$

tehát $e^{2z} = 1$, ahonnan

$$
\begin{aligned}
2z &= \mathrm{Ln}\,1 = \ln 1 + j(0+2k\pi) = j2k\pi, \\
z &= jk\pi, \qquad (k\in\mathbb{Z})
\end{aligned}
$$

2. Megoldás.

$$\operatorname{sh} z = \operatorname{sh}(x+jy) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch}(jy) + \operatorname{ch} x \operatorname{sh}(jy) = \operatorname{sh} x\cos y + j\operatorname{ch} x \sin y = 0,$$

ami azt jelenti, hogy külön a valós és a képzetes rész is nulla:

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= \operatorname{sh} x \cos y = 0, \\
v(x,y) &= \operatorname{ch} x \sin y = 0.
\end{aligned}
$$

A második egyenletben $\operatorname{ch} x \neq 0$, így $\sin y = 0$, tehát $y = k\pi$ (ahol $k\in\mathbb{Z}$). Ez pedig azt jelenti, hogy $\cos y \neq 0$, tehát az első egyenletből $\operatorname{sh} x = 0$, azaz $x = 0$ következik. Tehát a megoldás:

$$z = jk\pi, \qquad (k\in\mathbb{Z}).$$

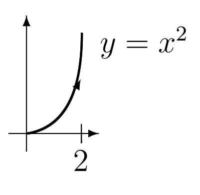
4.3. Komplex vonalintegrál

Zh-n az egyértelműség kedvéért mindig az integrálok valós és képzetes részét szoktuk kérdezni. Ezért az eredményt mindig algebrai alakban adjuk meg!

11. Feladat:

$$\int_L \overline{z}^2 \,\mathrm{d}z = ?$$

$L:$



Megoldás.
A függvény nem reguláris, ezért a következő tétel felhasználásával oldjuk meg a feladatot:

$L:\ z(t)=x(t)+j\,y(t)$ vagy $z(t)=r(t)\,\mathrm{e}^{j\varphi(t)}$, $z\in C^1_{[\alpha,\beta]}$,
f folytonos L-en

$$\int_L f(z)\,\mathrm{d}z=\int_\alpha^\beta f(z(t))\,\dot z(t)\,\mathrm{d}t=\int_\alpha^\beta f(z(t))\,z'(t)\,\mathrm{d}t$$

$x:=t \implies y=t^2$. Tehát

$$z(t)=t+j\,t^2\,,\qquad 0\le t\le 2$$
$$\dot z(t)=1+j\,2t$$

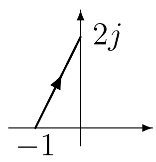
$$\int_L \overline{z}^2\,\mathrm{d}z=\int_L (x-j\,y)^2\,\mathrm{d}z=\int_L (x^2-y^2-j\,2\,xy)\,\mathrm{d}z=$$

$$=\int_0^2 (t^2-t^4-j2t^3)\,(1+j\,2t)\,\mathrm{d}t=\ldots=\int_0^2 (t^2+3t^4-j\,2t^5)\,\mathrm{d}t=$$

$$=\left.\frac{t^3}{3}+\frac{3t^5}{5}-j\frac{2t^6}{6}\right|_0^2=\ldots=\frac{328}{15}-j\frac{64}{3}$$

12. Feladat:

$$I=\int_L (Im\,2\overline{z}-\mathrm{sh}\,5z)\ \mathrm{d}z\ =?\qquad\qquad L:$$



Megoldás.

$y=2x+2 \implies z(t)=t+j(2t+2)\,,\quad t\in[-1,0],\qquad \dot z(t)=1+j\,2$

$$I=\int_L \mathrm{Im}\ 2\overline{z}\,\mathrm{d}z+\int_L \mathrm{sh}\,5z\,\mathrm{d}z=I_1+I_2$$

I_1 integrandusza sehol sem reguláris, így csak az előző tétellel dolgozhatunk, I_2 integrandusza az egész síkon reguláris, így értéke csak a kezdő és végponttól függ (a Newton-Leibniz tétellel dolgozunk itt).

$$I_1=\int_L -2y\,\mathrm{d}z=-2\int_{-1}^0 (2t+2)\,(1+j2)\,\mathrm{d}t=-2\,(1+j2)\,\big(t^2+2t\big)\big|_{-1}^0=$$

$$=\ldots=-2-4j$$

$$I_2=\int_L \mathrm{sh}\,5z\,\mathrm{d}z=\frac{1}{5}\ \mathrm{ch}\,5z\Big|_{-1}^{2j}=\frac{1}{5}\ (\mathrm{ch}\,10j-\mathrm{ch}(-5))=\frac{1}{5}\ (\cos 10-\mathrm{ch}\,5)$$

$$\mathrm{Re}\,I=-2+\frac{1}{5}\ (\cos 10-\mathrm{ch}\,5)\ ,\qquad \mathrm{Im}\,I=-4$$

13. Feladat:

$$\oint\limits_{|z|=2} \left(\frac{1}{j\overline{z}} + z\cos z \right) \mathrm{d}z \ = ?$$

Megoldás.

$$I \ = \oint\limits_{|z|=2} \frac{1}{j\overline{z}} \,\mathrm{d}z \ + \oint\limits_{|z|=2} z\cos z \,\mathrm{d}z \ = \ I_1 \ + \ I_2$$

I_1 integrandusza nem reguláris, ezért itt paraméterezéssel dolgozunk:

$z(t) = 2\,\mathrm{e}^{jt}$ $(= 2\,\cos t + j\,2\,\sin t)\,;\qquad 0 \le t \le 2\pi\,;\qquad \dot{z}(t) = 2j\,\mathrm{e}^{jt}$

$$I_1 \ = \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{-j\,2\,\mathrm{e}^{-jt}}\, 2j\,\mathrm{e}^{jt}\,\mathrm{d}t \ = \ -\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{e}^{j2t}\,\mathrm{d}t \ = \ -\left.\frac{\mathrm{e}^{j2t}}{j2}\right|_0^{2\pi} \ = \ -\frac{1}{j2}\left(\mathrm{e}^{j4\pi} - 1\right) \ = \ 0$$

$I_2 \ = \ 0$: a Cauchy-Goursat tétel miatt
(Az integrandusz mindenütt reguláris, a görbe zárt).

Így $I = 0$.

4.4. Cauchy-féle integrálformulák

A Cauchy-féle integrálformulák:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi j} \oint\limits_L \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z \qquad \text{és}$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi j} \oint\limits_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z$$

Feltételek: f a T egyszeresen összefüggő tartományon reguláris, $L \subset T$ egyszerű, zárt görbe, és L egyszer kerüli meg pozitív irányban a $z_0 \in T$ pontot.

14. Feladat:

$$\oint\limits_L \underbrace{\frac{\ln z}{z - j}}_{g(z)} \,\mathrm{d}z \ = ? \qquad L: \quad \begin{array}{l} \text{a)} \ |z - 5 + j| = 1 \\ \text{b)} \ |z - 2j| = 1,5 \end{array}$$

Megoldás.

a) g reguláris a $|z - 5 + j| = 1$ ($a = 5 - j$ középpontú, $r = 1$ sugarú) kört magába foglaló T_1 egyszeresen összefüggő tartományon (1.a ábra), ezért a Cauchy-Goursat tétel miatt az integrál 0.

b) A Cauchy-féle integrálformulát kell alkalmazni, mert a $z_0 = j$ szingularitás a $2j$ középpontú, $1,5$ sugarú kör belsejébe esik.
$f(z) = \ln z$ reguláris a T_2 egyszeresen összefüggő tartományon (1.b ábra), $z_0 = j$.

$$I_2 \ = \ 2\pi j \ \ln z|_{z=j} \ = \ 2\pi j \ \ln j \ = \ 2\pi\,j\,\left(\ln 1 + j\frac{\pi}{2}\right) \ = \ -\pi^2$$

$$\Longrightarrow \qquad I = -\pi^2$$

15. Feladat:

$$I(R) = \oint_{|z-j\pi|=R} \underbrace{\frac{\mathrm{ch}^6 z}{z - j\,\dfrac{\pi}{3}}}_{g(z)} \,\mathrm{d}z = ? \qquad R > 0$$

Adja meg $I(R)$ értékét R függvényében!

Megoldás.

g-nek csak a $j\,\dfrac{\pi}{3}$ pontban van szingularitása.

$$I(R) = \begin{cases} 0\,, & \text{ha } 0 < R < \dfrac{2\pi}{3} \\ \text{nem értelmezett}\,, & \text{ha } R = \dfrac{2\pi}{3} \\ j\,\dfrac{\pi}{32}\,, & \text{ha } R > \dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$$

Ugyanis, ha $R < \dfrac{2\pi}{3}$, a g függvény reguláris a T_1 egyszeresen összefüggő tartományon, ezért a Cauchy-féle alaptétel miatt az integrál 0.

Ha $R = \dfrac{2\pi}{3}$, az integrál nem értelmezett, mert g szingularitása a görbére esik.

Ha $R > \dfrac{2\pi}{3}$, akkor a szingularitás a görbe belsejében van és a T_2 egyszeresen összefüggő tartományon alkalmazható a Cauchy-féle integrálformula:

$f(z) = \mathrm{ch}^6 z$ reguláris T_2-ön, $z_0 = j\,\dfrac{\pi}{3}$, így

$$I(R) = 2\pi j\ \mathrm{ch}^6 z\Big|_{z=j\frac{\pi}{3}} = 2\pi j\,(\underbrace{\mathrm{ch}\, j\,\frac{\pi}{3}}_{=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}})^6 = 2\pi j\,\frac{1}{2^6} = j\,\frac{\pi}{32}$$

16. Feladat:

$$\oint_{|z-2|=2} \underbrace{\frac{\sin jz}{z^2-1}}_{g(z)} \,\mathrm{d}z = ?$$

Megoldás.

g izolált szingularitásai (a nevező nullahelyei) : $z = 1$ és $z = -1$.
Ezek közül csak a $z = 1$ esik a görbe belsejébe.

$$I = \oint_{|z-2|=2} \frac{\dfrac{\sin jz}{z+1}}{z-1}\,\mathrm{d}z$$

Az egyszeresen összefüggő T tartományon alkalmazható a a Cauchy-féle integrálformula:

$f(z) = \dfrac{\sin jz}{z+1}$ reguláris T-n, $z_0 = 1$, így

$$I = 2\pi j \left. \frac{\sin jz}{z+1} \right|_{z=1} = 2\pi j \, \frac{\sin j}{2} = \pi j \; j \, \mathrm{sh}\, 1 = -\pi \ \mathrm{sh}\, 1$$

17. Feladat:

$$\boxed{\oint_L \underbrace{\frac{z^4 \, \mathrm{e}^{\pi z}}{z^2+4}}_{g(z)} \, \mathrm{d}z = ? \,, \qquad L : |\, z \,| = 4}$$

Megoldás.

g izolált szingularitásai (a nevező nullahelyei) : $z = 2j$ és $z = -2j$.
Mindkettő a görbe belsejébe esik. A Cauchy-féle alaptétel következményei között szereplő egyik tétel értelmében:

$$I = \oint_L g(z) \, \mathrm{d}z = \oint_{L_1} g(z) \, \mathrm{d}z + \oint_{L_2} g(z) \, \mathrm{d}z = I_1 + I_2$$

Mindkét integrál meghatározására a Cauchy-féle integrálformulát alkalmazzuk:

$$I_1 = \oint_{L_1} \frac{\dfrac{z^4 \, \mathrm{e}^{\pi z}}{z+2j}}{z-2j} \, \mathrm{d}z = 2\pi j \left. \frac{z^4 \, \mathrm{e}^{\pi z}}{z+2j} \right|_{z=2j} = \ldots = 8\pi$$

Most $f(z) = \dfrac{z^4 \, \mathrm{e}^{\pi z}}{z+2j}$, mely reguláris T_1-en, $z_0 = 2j$.

Hasonlóan

$$I_2 = \oint_{L_2} \frac{\dfrac{z^4 \, \mathrm{e}^{\pi z}}{z-2j}}{z+2j} \, \mathrm{d}z = 2\pi j \left. \frac{z^4 \, \mathrm{e}^{\pi z}}{z-2j} \right|_{z=-2j} = \ldots = -8\pi$$

Most $f(z) = \dfrac{z^4 \, \mathrm{e}^{\pi z}}{z-2j}$, mely reguláris T_2-ön, $z_0 = -2j$.

$\Longrightarrow \qquad I = 0$.

Vegyük észre, hogy nem csak reguláris függvény zárt görbe mentén vett integrálja lehet 0.

18. Feladat:

$$\boxed{\oint_{|\,\mathrm{Re}\, z| + |\,\mathrm{Im}\, z| = 2} \underbrace{\frac{\mathrm{sh}\, 3z}{\left(z - j\,\dfrac{\pi}{3}\right)^3}}_{g(z)} \, \mathrm{d}z = ?}$$

Megoldás.

Most az általánosított integrálformulát kell alkalmaznunk.
$f(z) = \mathrm{sh}\, 3z$, mindenütt reguláris, így a berajzolt T-n is. $z_0 = j\,\dfrac{\pi}{3}$, $n+1 = 3$, ezért $n = 2$.

$$I = \frac{2\pi j}{2!} \left. (\mathrm{sh}\, 3z)'' \right|_{z = j\,\frac{\pi}{3}} = \pi j \; 3^2 \underbrace{\mathrm{sh}\left(3\,j\,\frac{\pi}{3}\right)}_{=j\ \sin \pi = 0} = 0$$

19. Feladat:

$$\oint\limits_{|z|=3} \underbrace{\frac{\sin z}{z\,(z-j)^2}}_{g(z)}\,\mathrm{d}z = ?$$

Megoldás.

g izolált szingularitásai (a nevező nullahelyei) : $z=0$ és $z=j$.
Mindkettő a görbe belsejébe esik.

$$I = \oint\limits_{L} g(z)\,\mathrm{d}z = \oint\limits_{L_1} g(z)\,\mathrm{d}z + \oint\limits_{L_2} g(z)\,\mathrm{d}z$$

$$I = \oint\limits_{L_1} \frac{\dfrac{\sin z}{(z-j)^2}}{z}\,\mathrm{d}z + \oint\limits_{L_2} \frac{\dfrac{\sin z}{z}}{(z-j)^2}\,\mathrm{d}z =$$

$$= 2\pi j\,\left.\frac{\sin z}{(z-j)^2}\right|_{z=0} + \frac{2\pi j}{1!}\left.\left(\frac{\sin z}{z}\right)'\right|_{z=j} = 0 + 2\pi j\,\left.\frac{z\cos z - \sin z}{z^2}\right|_{z=j} =$$

$$= \ldots = 2\pi\,(\mathrm{ch}\,1 - \mathrm{sh}\,1)$$

(Az f szerepét játszó függvények regulárisak a berajzolt T_1, illetve T_2 tartományokon.)

20. Feladat:

$$\oint\limits_{|z-j|=3} \underbrace{\frac{e^{j2z}}{(z-5)\,z^2\,(z-3j)}}_{g(z)}\,\mathrm{d}z = ?$$

Megoldás.

g izolált szingularitásai (a nevező nullahelyei) : $z=0$, $z=3j$ és $z=5$.
Ebből $z=5$ nem esik a görbébe ($a=j$ középpotú $r=3$ sugarú kör).

$$I = \oint\limits_{L_1} \frac{\dfrac{e^{j2z}}{(z-5)\,(z-3j)}}{z^2}\,\mathrm{d}z + \oint\limits_{L_2} \frac{\dfrac{e^{j2z}}{(z-5)\,z^2}}{z-3j}\,\mathrm{d}z = \ldots$$