BME Matematika Verseny **2018 április 27.** 14^{15}–18^{00}, **IB025**

— A kijavított dolgozatok megtekinthetők lesznek május 4-én pénteken 13:00-tól 15:00-ig a H666-ban. Ünnepélyes eredményhirdetés május 15-én kedden 18:15 -től a Q épület 4-ik emeletén; utána állófogadás a büfében.
— Minden feladat 10 pontot ér. A javítás során részmegoldásokat is figyelembe veszünk. Különleges esetekben egy feladaton 10-nél több pont is elérhető (pl. érdemi általánosítások, illetve egy probléma több, lényegesen különböző megoldásának ismertetése esetén).
— **Minden feladatot kérünk külön lapra írni.** Minden lapon szerepeljen a feladat sorszáma, a versenyző neve és NEPTUN kódja.

---

1. Az $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ folytonos függvényhez létezik $K > 0$ úgy, hogy $\forall x \in \mathbb{R}_0^+$ esetén $f(x) \leq K \int_0^x f(t)dt$. Mutassuk meg, hogy f konstans nulla.

2. Az „L” betű két egymásra merőleges, végpontjukban összeérő $2:1$ arányú (pozitív) hosszú szakasz. Egy „X” az két egymásra merőleges, azonos (pozitív) hosszú szakasz közös felezőponttal. Az világos, hogy a síkra akár megszámlálhatatlanul sok diszjunkt „L” betűt is lerakhatunk. (Hogyan?) És megszámlálhatatlanul sok diszjunkt „X” -et? (A betűk különböző irányokban is állhatnak és méretük is lehet eltérő.)

3. Egy n-élű gráfot úgy rajzoltunk a síkra, hogy bár metszések nem keletkeztek, néhány él érinti egymást. (Egy pontban mindig legföljebb két él érinti egymást és az érintési pontok száma véges.) Adott n esetén legföljebb mekkora lehet az érintkező élpárok száma?

4. 66 vendég kézen fogva körtáncot jár. Közben a tombolán közülük 13-nak kisorsolják a nevét. Ők kiállnak átvenni az ajándékot; így az ott maradtak N összefüggő csoporta szakadnak. Mennyi N várható értéke?

5. Rókák és nyulak ülnek egy mezőn. A magas fű miatt minden róka csak 100 méterre lát; ha ezen belül - saját magát is beleszámítva - nem lát több rókát, mint nyulat, akkor nem aggódik az élelem miatt. Pillanatnyilag a mezőn lévő egyetlen róka sem aggódik. Legföljebb hányszor több róka lehet a mezőn, mint nyúl?

6. Igazoljuk, hogy a $2n$ csúcsú teljes gráf élei kiszínezhetők úgy n színnel, hogy bármely két csúcs között lesz mindegyik színből egy egyszínű út és ráadásul ezen n útnak – a végpontjukon kívül – nem lesz közös pontjuk.

7. A racionális számokból álló X négyzetes mátrixra $X^5 = I$. Következik-e, hogy X minden eleme egész? És az, hogy $\mathrm{Tr}(X)$ (azaz X diagonális elemeinek összege) egész? *Bónusz pontért megfontolhatjuk a feladatot 5-ik helyett tetszőleges hatványra és / vagy nyom helyett egy olyan bázis találásának a kérdésére, melyben X minden eleme egész lesz.*

8. Legyen φ az Euler-függvény; azaz $\varphi(n)$ az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmazban található n-nel relatív prímek száma. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ és $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan egymást követő k természetes szám, melyek mindegyikére $\varphi(n)/n < \varepsilon$.

9. Legyen f kétszer folytonosan differenciálható valós függvény melyre $f(0) = f'(0) = 0$. Mutassuk meg: $\int_0^1 (f(x))^2 \, dx \leq \frac{1}{12} \int_0^1 (f''(x))^2 \, dx$.

10. Legyen m pozitív szám, $M = m^{-1}$ és X_1, X_2 azonos eloszlású független valószínűségi változók melyek értékei mindig a $[m, M]$ intervallumba esnek. Legföljebb mekkora lehet az X_1/X_2 hányados várható értéke? Általánosítsunk az $M \neq m^{-1}$ esetre is!