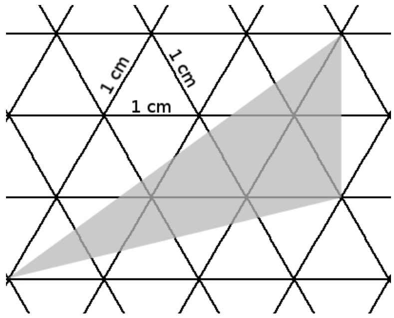
BME Matematika Verseny **2019 április 29.** 10^{15}–14^{00}, **Q-I**

— A kijavított dolgozatokat május 6-án hétfőn 16:15-től 18:00-ig lehet megtekinteni a H666-ban. Eredményhirdetés május 15-én szerdán 18 órától a QB402 -ben.
— Minden feladat 10 pontot ér. Az értékelés során részmegoldásokat is figyelembe veszünk. A javító különleges esetekben egy feladatra 10 pont fölötti értéket is adhat (például érdemi általánosítások, illetve egy probléma több, lényegesen különböző megoldásának ismertetése esetén).
— **Minden feladatot kérünk külön lapra írni.** Minden lapon szerepeljen a feladat sorszáma, a versenyző neve és NEPTUN kódja.
— A Morgan Stanley különdíjat ajánlott fel azon matematikai feladatokhoz, melyek olyan eljárásokra vezetnek rá vagy olyan jellegű gondolkodásra késztetnek, melyek közgazdasági és pénzügyi döntéseknél is szerepelhetnek. Idén a különdíj azok közt kerül szétosztásra, akik a legjobb elfogási stratégiát dolgozzák ki a **4.** feladatnál.

---

1. Egy szabályos 1 cm-es oldalhosszú háromszög-rácsozatú papírból olyan háromszögeket vágunk ki, melyek minden csúcsa rácspontra esik (lásd a mellékelt ábrát a rácsról és egy lehetséges ilyen háromszögről). Ezekkel sikeresen "ki-tapétázzuk" (azaz hézagmentesen, de dupla fedés nélkül beborítjuk) egy téglatest oldalait (külön-külön mindet). Lehet-e a téglatest cm^3-ben kifejezett térfogata egész?



2. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{2n} \binom{k-1}{n-1} 2^{-k} = ?$

3. Legföljebb (2 pont) illetve legalább (8 pont) hány eleme lehet az $\{xy+z | x,y,z \in H\}$ halmaznak, ha H tetszőleges pozitív egészekből álló, de adott $n > 1$ elemszámú halmaz?

4. Van a mezőn szép sorban n róka-luk, a föld alatt egy egyenes folyosóval összekötve. Valamelyikben ott rejtőzik a róka. Jön a vadász és egy sörétes puskával beledurrant az egyik nyílásba. Ha szegény vörösfarkú pont ott lapult, akkor meghalt. (*Ez egy elméleti kérdés, a feladat kitűzése során egyetlen rókának sem esett bántódása.* ☺) Ha nem ott volt, akkor a lövéstől megijedve a földalatti járatán keresztül egy lyukkal arrébb ment. A vadász bárhányszor újra tölthet és lőhet, tetszőlegesen megválasztva a lyukak sorrendjét. Van-e olyan stratégia, ami mellett a vadász bizonyos számú lövés után biztos lehet benne, hogy a róka halott? Hányszor kell ehhez lőnie?

5. Legyen $r > 0$ és $f : (0,r) \to \mathbb{R}$ folytonos függvény melyre $\int_0^r |f(x)|dx < \infty$ és $g(x) := \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$ az f átlaga a $(0,x)$ intervallumon. Bizonyítsuk: $\int_0^r g(x)^2 dx \le c \int_0^r f(x)^2 dx$ ha $c = 4$ valamint, hogy ez a legkisebb c konstans amivel ez mindig teljesül.

6. Az A, B komplex $n\times n$-es mátrixokra teljesül, hogy $A^2B + BA^2 = 2ABA$. Ellenőrizzük, hogy $X = AB - BA$ kommutál A-val és ezt fölhasználva (vagy bárhogy máshogyan) mutassuk meg, $\exists k \in \{1, \ldots n\} : X^k = 0$.

7. Legyen $n > 1$ és $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Mutassuk meg, hogy f *pontosan* akkor additív az ortogonális vektor-párokon — azaz teljesíti, hogy $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{0}$ esetén $f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$ — ha $\exists \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ és $t \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} + t\, \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$.

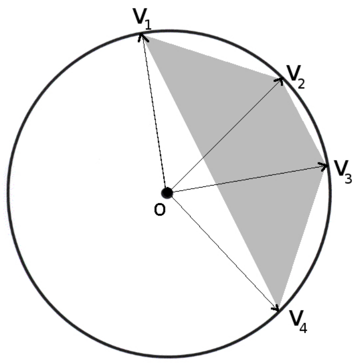
8. Hívjuk *ízletes*nek az olyan $H \subset \mathbb{Z}^+$ halmazokat, melyekre igaz, hogy

i) H bármely két eleme relatív prím,

ii) $\sum_{k \in S} k$ összetett szám minden $\emptyset \neq S \subset H$ véges részhalmazra.

Megmutatva, hogy egy $H \subset \mathbb{Z}^+$ *véges* ízletes halmazhoz mindig létezik $n \in \mathbb{Z}^+$ úgy, hogy $H \cup \{n\}$ is ízletes — vagy bárhogy máshogy — bizonyítsuk: létezik végtelen ízletes halmaz!

9. Legyen $\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_n \in \mathbf{R}^d$ egységvektorok olyan gyűjteménye, melyek *konvex burka* tartalmazza az origót (azaz melyekhez léteznek $t_1, \ldots t_n \geq 0$ együtthatók úgy, hogy $\sum_j t_j = 1$ és $\sum_j t_j \mathbf{v}_j = \mathbf{0}$; lásd az ábrát egy a feltételeket *nem* kielégítő konfigurációról). Bizonyítsuk: tetszőleges $k \in \mathbf{N}$ esetén választható olyan $j_1, \ldots j_k \in \{1, \ldots n\}$, melyre a $\sum_{r=1}^k \mathbf{v}_{j_r}$ összegvektor hossza legföljebb $\sqrt{k}$. Bónuszért azt is igazolhatjuk, hogy ez a korlát *optimális*; azaz, hogy tetszőleges $\epsilon > 0$ esetén létezik olyan n, d és $\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_n \in \mathbf{R}^d$ egységvektorok, melyekre $\sum_{r=1}^k \mathbf{v}_{j_r}$ hossza — akármilyen $j_1, \ldots j_k \in \{1, \ldots n\}$ választás esetén — mindig nagyobb, mint $\sqrt{k} - \epsilon$.



Egy *rossz* konfiguráció: $n = 4$ egységvektor $d = 2$ dimenzióban, melyek konvex burka (a szürke terület) *nem* tartalmazza az origót.

10. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ függvényre $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = 1$. Határozzuk meg a

$$2\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-1) + f(x+1)|^2 dx\right)^2 + \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-2) + f(x+2)|^2 dx\right)^2$$

négyzet-összeg legjobb alsó korlátját! *Számolási segédlet: a* $4t + 8(2t-1)^3$ *polinom egyetlen valós gyöke az* $1/4$.