— A kijavított dolgozatokat május 12-én csütörtök 14:15-től 17:00-ig lehet megtekinteni a H666-ban. Az eredményhírdetés időpontja később kerül meghatározásra.
— Az első feladat megoldását csak elsőéves hallgatóknál értékeljük; a maradék kilenc feladatra bárki adhat be megoldást.
— Minden feladat 10 pontot ér. Az értékelés során részmegoldásokat is figyelembe veszünk. A javító különleges esetekben egy feladatra 10 pont fölötti értéket is adhat (például érdemi általánosítások, illetve egy probléma több, lényegesen különböző megoldásának ismertetése esetén).
— **Minden feladatot kérünk külön lapra írni.** Minden lapon szerepeljen a feladat sorszáma, a versenyző neve és NEPTUN kódja.

AZ ELSŐ FELADATRA CSAK ELSŐÉVESEK ADHATNAK BE MEGOLDÁST!

1. Adott 12 szám az (1,12) nyílt intervallumban. Lássuk be, hogy biztosan kiválasztható közülük 3 úgy, hogy ezekkel mint oldalhosszakkal, létezik egy *hegyesszögű* háromszög!

---

2. Legyen $1 < q \leq 2$ és tekintsük az olyan S számok halmazát, melyek előállnak, mint q véges sok különböző (nemnegatív, egész) hatványának az összege. (Ilyen szám például maga a q^7 vagy mondjuk a $q^0+q^4+q^5 = 1+q^4+q^5$.) Bizonyítsuk, hogy tetszőleges 1/2-nél nagyobb vagy egyenlő valós közelíthető legfeljebb 1/2-es hibával egy ilyen számmal; azaz, hogy minden $x \geq 1/2$ esetén létezik $s \in S$, melyre $|x - s| \leq 1/2$ teljesül!

3. Létezik-e olyan $c \in \mathbb{R}$ konstans, mellyel tetszőleges $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ monoton csökkenő függvény esetén teljesül a

$$\int_0^1 e^{-x}\, x\, f(x)\, dx \ \leq c \int_0^1 f(x)\, dx$$

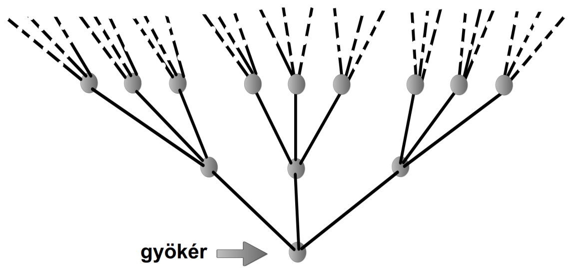
egyenlőtlenség? (*Figyelem, csak annyi van előírva, hogy* $x \leq y \ \Rightarrow f(x) \geq f(y)$*, de* f *előjeléről semmi nincs kikötve!*)

4. Egy kör alakú tóban úszol. Már a partnál vagy és jönnél ki, amikor közvetlen előtted a parton megpillantasz egy félelmetes szörnyet. Szerencsére a szörny iszonyodik a víztől és a szárazföldön te vagy a gyorsabb – tehát csak akkor jelent veszélyt, ha pont a kiszállásnál kap el téged. Nem vagy fáradt; hát szemedet a szörnyön tartva úgy döntesz, még úszkálsz egy kicsit és más kiszállási pontot (illetve pillanatot) keresel. Van-e olyan stratégia, mellyel biztosan megmenekülhetsz, ha a szörny futási sebessége a te úszási sebességed a) 4-szerese, b) 8-szorosa? (Ez két külön kérdés.)

5. Legyenek $c_1, \dots c_n$ és $\alpha_1, \dots \alpha_n$ valós paraméterek és $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ az $f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, e^{\alpha_k x}$ képlettel definiált függvény. Bizonyítsuk be, hogy ha f-nek van legalább n különböző nullhelye, akkor f a konstans nulla függvény.

6. Lehet-e, hogy 16 pont a síkon pontosan 17 egyenest határoz meg? *(Segítő kérdés: tegyük föl, hogy van néhány feketére festett pont a síkon és két egyenes amire rendre x_1 és x_2 fekete pont esik. Ekkor legalább hány egyenest határoznak meg a fekete pontok?)*

7. Egy teljes végtelen *ternáris fa* (lásd az ábrát) minden egyes élét egymástól független de azonos, adott p valószínűséggel pirosra festünk. Milyen (p-től függő) q valószínűséggel lesz található az így kapott gráfban (mint részgráf) egy gyökérből kiinduló teljes végtelen, csak piros élt tartalmazó *bináris fa*?



8. Lehet-e, hogy $p(1) = 0$, $p(3) = 2$ és $p(7) = 18$, ha p egy egész együtthatós polinom?

9. Alice és Bob játszanak. Van közöttük egy 6 hosszú játékmező, rajta egy játékfigurával. Ha a figura az 1-es (az Alice-hoz legközelebbi) mezőre ér, nyert Alice és a játéknak vége. Ha a 6-os (a Bobhoz legközelebbi) mezőre ér, akkor a játék Bob nyerésével ér véget. A figura léptetése körönként így zajlik. Alice beleönt valamennyit (akár semennyit is) a nála lévő igen finom aranyporból a játékvezető mérlegébe. Ezután Bob – aki látta, mennyit öntött Alice – is ad a nála lévő aranyporból a játékvezetőnek (ő is adhat akár semennyit). Ha a játékvezetőnek Alice fizetett többet, akkor az a figurát az Alice -nak kedvező irányba fogja 1-el elmozgatni; minden más esetben viszont Bob fele fogja 1-el arrébb léptetni a figurát. Alice és Bob végig látják egymás vagyonát.

Pillanatnyilag a figura a 3-as mezőn áll. Mutassuk meg, hogy ha ekkor Alice-nak még több mint másfélszer annyi aranypora van, mint Bob-nak, akkor van biztos győzelmet garantáló stratégiája; viszont ha csak másfélszer annyi (vagy kevesebb) aranypora van, mint Bob-nak, akkor meg Bob-nak van olyan stratégiája, mellyel biztosan győzni tud!

10. Legyen A és B két $n \times n$ -es valós szimmetrikus mátrix. Bizonyítsuk be, hogy teljesül a $\det(A^2 + B^2) \geq \det(A)^2 + \det(B)^2$ egyenlőtlenség! Igaz marad-e ez, ha a szimmetrikusságot nem követeljük meg?