BME Matematika Verseny **2023 május 10.** 14^{15}–18^{00}, **Q-I**

— A kijavított dolgozatokat május 18-án csütörtök 14:15-től 16:00-ig lehet megtekinteni a H666-ban. Az eredményhírdetés időpontja később kerül meghatározásra.
— Minden feladat 10 pontot ér. Az értékelés során részmegoldásokat is figyelembe veszünk. A javító különleges esetekben egy feladatra 10 pont fölötti értéket is adhat (például érdemi általánosítások, illetve egy probléma több, lényegesen különböző megoldásának ismertetése esetén).
— **Minden feladatot kérünk külön lapra írni.** Minden lapon szerepeljen a feladat sorszáma, a versenyző neve és NEPTUN kódja.

---

1. Döntsük el, hogy fölbontható-e H két olyan nemüres, diszjunkt halmaz uniójára, melyek mindegyike zárt az összeadásra nézve, ha

a) $H = \{q \mid \; q \in \mathbb{Q},\, q > 0\}$,
b) $H = \{x \mid e^x \in \mathbb{Q},\, x > 0\}$.

(Ez két külön kérdés, melyek együtt érnek egy feladatnyit.)

2. Az $r_1, r_2, \dots r_n$ sugarú körök úgy vannak lerakva a síkra, hogy nincs olyan egyiket sem metsző egyenes, melynek mindkét oldalán lenne belőlük legalább egy. Igazoljuk, hogy az összes kör lefedhető egy (megfelelően elhelyezett) $R = r_1 + r_2 + \ldots + r_n$ sugarú körlappal!

Bár kevesebb pontért, de ha ezt nem sikerül bizonyítanunk, akkor azt igazoljuk, hogy az n kör lefedhető egy $\sqrt{2}R$ sugarú körrel!

3. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek van nullpontja (azaz $\exists x_0 \in \mathbb{R} : f(x_0) = 0$), $2n$-szer folytonosan deriválható és L hosszal periodikus (azaz $f(x+L) = f(x)$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén). Mutassuk meg, hogy teljesül a

$$\max_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \le \left(\frac{L^2}{8}\right)^n \max_{x\in\mathbb{R}} |f^{(2n)}(x)|$$

egyenlőtlenség!

Megjegyzés: a fönti egyenlőtlenség nem a legjobb becslés. Valójában a képletben szereplő 8*-at* 16*-ra is le lehet cserélni, de már a megadott korlátért is jár a 10 pont.*

4. Nagyság szerinti sorba leírjuk az összetett számokat: $4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, \dots$ Vesszük az első n reciprokát, és összeadjuk őket: $S_n := (1/4) + (1/6) + \ldots + (1/r_n)$ ahol r_n az n-edik összetett szám. Lehet-e S_n egész?

5. Adott $m \in \mathbb{N}$ mellett az $f_1, \dots f_n$ és $g_1, \dots g_n$ függvények minden x, y valós számpárra kielégítik a

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) g_k(y) = (x+y)^m$$

egyenletet. Lehet-e n kisebb vagy egyenlő, mint m?

6. Független, egyenletes eloszlással számokat húzunk ki a $(0,1)$ intervallumból egészen addig, míg a kihúzott számok összege túl nem lépi az 1 -et. Mennyi a húzások számának és a kapott összegnek a várható értéke?

7. Egy $H \subset \mathbb{N}$ halmaz *számtani hármas mentes*, ha bármilyen $n, d \in \mathbb{N}, d \neq 0$ esetén az $n, n+d, n+2d$ számok közül legalább egyet nem tartalmaz. Továbbá azt mondjuk, hogy H *maximális* számtani hármas mentes halmaz, ha számtani hármas mentes, de ezt a tulajdonságot megtartva már nem növelhető tovább: tetszőleges $n \in \mathbb{N} \setminus H$ esetén $H \cup \{n\}$ már *nem* számtani hármas mentes. Adjunk meg expliciten egy végtelen sok elemet tartalmazó számtani hármas mentes halmazt, és bizonyítsuk, hogy létezik olyan *maximális* számtani hármas mentes H halmaz, amelyik "exponenciálisan ritka": azaz van hozzá $a > 1$ úgy, hogy h_n -nel jelölve a H nagyság szerint n-edik elemét, $\forall n \in \mathbb{N}: \; h_n > a^n$.
Segítség: ha a feladat első részében egy megfelelő H_0 halmazt adunk meg, akkor azt "föl tudjuk növelni" egy olyan maximális számtani hármas mentes halmazzá, mely még mindig exponenciálisan ritka.

8. Legyen A egy $n \times n$-es valós mátrix, melynek nyoma – azaz a diagonális elemeinek az összege – nulla. Mutassuk meg: létezik olyan O ortogonális mátrix, melyre OAO^T *összes* diagonális eleme nulla!

9. Legyen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ egy monoton növekvő függvény és

$$I_1 = \int_0^1 \int_0^1 |f(x) - f(y)| \, dx \, dy, \quad I_2 = \int_0^1 \int_0^1 (f(x) - f(y))^2 \, dx \, dy.$$

Mutassuk meg, hogy $I_1^2 \leq (2/3) I_2$ és, hogy ha f legföljebb elsőfokú polinom, akkor a megadott reláció egyenlőségként teljesül!

10. Egy nagy asztal mentén n gyerek ül. Mindegyik előtt van egy színével lefele fordított kártya. A gyerekek szófogadóak, de mindegyik magára veszi a barátjának szóló kéréseket is. Ezért aztán ha valamelyiket felszólítjuk, hogy fordítsa meg az előtte lévő kártyát, akkor mind ő, mind pedig az ő összes barátja meg fogja fordítani a maga kártyáját. Bizonyítsuk be, hogy megfelelően megválasztott gyerekek kártyafordításra való felszólításával biztosan elérhető, hogy az összes gyerek előtt színével fölfele legyen a kártya! (A barátság szimmetrikus, de nem feltétlen tranzitív.)