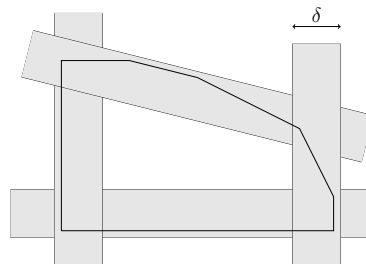


- A kijavított dolgozatokat május 16-án pénteken 12:00-tól 13:30-ig lehet megtekinteni a H666-ban. Az eredményhirdetés időpontja később kerül meghatározásra.
- Minden feladat 10 pontot ér. Az értékelés során részmegoldásokat is figyelembe veszünk. A javító különleges esetekben egy feladatra 10 pont fölötti értéket is adhat (például érdemi általánosítások, illetve egy probléma több, lényegesen különböző megoldásának ismertetése esetén).
- **Minden feladatot kérünk külön lapra írni.** Minden lapon szerepeljen a feladat sorszáma, a versenyző neve és NEPTUN kódja.

1. Legyenek $1 \leq m \leq n$ természetes számok és $\gcd(n, m)$ ezek legnagyobb közös osztója. Bizonyítsuk be: a $\gcd(n, m) \binom{n}{m}$ szorzat mindig osztható n -nel!

2. Egy K kerületű konvex sokszög oldalait szeretnénk lefedni adott $\delta > 0$ szélességű sávokkal; lásd az ábrát egy ilyen fedésre. Mutassuk meg: akárhány oldala is legyen a sokszögnek, mindig megadható egy ilyen fedés nem több, mint $1 + \sqrt{\frac{2\pi K}{\delta}}$ sáv fölhasználásával!



3. Legyen X egy tetszőleges halmaz és $f : X \rightarrow X$ egy fixpont-mentes hozzárendelés (azaz olyan, hogy $\forall x \in X : f(x) \neq x$). Szeretnénk X -et fölbontani olyan A_1, \dots, A_n diszjunkt halmazok uniójára, hogy $A_k \cap f(A_k) = \emptyset$ teljesüljön minden $k = 1, \dots, n$ esetén. Mi az a legkisebb n , amivel ez mindig megtehető?

4. Az A, B komplex együtthatós, $n \times n$ -es mátrixokra teljesül az $AB - BA = A^2$ egyenlet. Mutassuk meg, hogy A^n a nullmátrix!

Megjegyzés: bár a feladat szövege többet kér, de ha már csupán azt megmutatjuk, hogy hogy A nem lehet invertálható, akkor is megszerzünk 9 pontot a 10-ből.

5. Van n darab, számozott kártyánk; az elsőn egy egyes, a másodikon egy kettes, stb. Jól megkeverjük a paklit, kihúzzunk két kártyát, lerakjuk a kisebbet az asztalra, a másikat meg visszakeverjük a pakliba. Ismét húzzunk két kártyát, megint lerakjuk a kisebbiket – az előző mellé a következő helyre – és visszakeverjük a nagyobbikat, és ezt így folytatjuk, mígnem már csak egy kártya marad a kezünkben; akkor azt is lerakjuk (az utolsó helyre). Alíz és Béla is lejegyzeteli az eredményt, de két különböző módon. Mindketten egy n hosszú számsort írnak le: Alíz egyszerűen sorba lemásolja a kirakott kártyákon lévő számokat, míg Béla számsorának k -adik tagja azt adja meg, hogy az a kártya, amin a k szám áll, hányadik helyen van az asztalon. Legyen $p_A(t_1, t_2, \dots, t_n)$ annak valószínűsége, hogy Alíz papírján a t_1, t_2, \dots, t_n számsorozat lesz. Hasonképpen, legyen $p_B(t_1, t_2, \dots, t_n)$ annak valószínűsége, hogy Bob papírjára a t_1, t_2, \dots, t_n sorozat kerül. Bizonyítsuk be: $p_A(t_1, t_2, \dots, t_n) = p_B(t_1, t_2, \dots, t_n)$ tetszőleges t_1, t_2, \dots, t_n esetén!

6. Az $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan deriválható függvény monoton – de nem feltétlen szigorúan monoton – növekvő és a további két tulajdonsággal rendelkezik:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 0, \text{ és } f(1) - f(-1) \leq 2.$$

(Tehát némiképpen hasonló az $x \mapsto x$ függvényhez, melyre mindezek igazak.) Mutassuk meg:

$$\forall x \in [-1, 1]: 0 \leq - \int_{-1}^x f(s) ds \leq \frac{f(1) - f(-1)}{2} (1 - x^2),$$

majd ennek segítségével – vagy bárhogy máshogy – határozzuk meg az $\int_{-1}^1 (f(x) - x)^2 dx$ integrálra adható legjobb felső korlátot!

7. A d dimenziós \mathbb{R}^d Euklideszi térben a $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^d$ vektorok skaláris szorzata $\underline{v} \cdot \underline{w} \equiv \sum_{k=1}^d v_k w_k$, továbbá a \underline{v} vektor hossza $\|\underline{v}\| \equiv \sqrt{\underline{v} \cdot \underline{v}}$. Legyen $n \in \mathbb{N}$ rögzített. Legfőbb mekkora lehet a $\sum_{j,k=1}^n \|\underline{u}_j - \underline{u}_k\|$ távolság-összeg, ha $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n \in \mathbb{R}^d$ egység-hosszú vektorok tetszőleges d dimenzióban?

8. Legyen $p(z) = z^2 + cz + d$ ahol $c, d \in \mathbb{C}$ rögzített paraméterek. Tegyük föl, hogy $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}$ olyan pontok, ahol p abszolút értéke “kicsi”: $|p(w_1)|, |p(w_2)|, |p(w_3)| \leq 1$. Bizonyítsuk be, hogy van legalább kettő e pontok között, melyek “viszonylag közeliek”: $\exists j \neq k$ úgy, hogy $|w_j - w_k| \leq \sqrt{3}$.

Megjegyzés: a gyengébb állítás bizonyítása, miszerint $\exists j \neq k$ úgy, hogy $|w_j - w_k| \leq 2$, két pontot ér. Az eredeti, erősebb állítás bizonyításához próbáljunk meg olyan algebrai egyenlőségeket találni, melyek egyik oldalán csak a pontok közötti különbségek jelennek meg, míg a másik oldalán p értékei is szerepelnek a kérdéses pontokban!

9. Van 99 háromállású kapcsoló és egy három különböző színt kibocsátani képes lámpa. A lámpa mindig világít, de hogy milyen színben, az valahogy a kapcsolók pillanatnyi állásától függ. Azt tudjuk, hogy akármilyen x_1, x_2, \dots, x_{99} állásban vannak a kapcsolók, ha mindegyiket megváltoztatjuk, akkor biztos, hogy más színnel világít a lámpa, mint az x_1, x_2, \dots, x_{99} állásban. Bizonyítsuk be: igazából egyetlen kapcsoló vezérli a lámpát; az összes többi állása nem befolyásolja a kibocsátott színt!

10. Legyen $H \subset \mathbb{C}$ egy a $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ zárt körlapot tartalmazó nyílt halmaz és $f : H \rightarrow \mathbb{C}$ egy komplex deriválható függvény. Mutassuk meg: ha $|f|$ a felső félköríven (azaz ahol $|z| = 1$ és $\text{Im}(z) > 0$) legfőljebb 1 és az alsó ($\text{Im}(z) < 0$) félköríven legfőljebb 2, akkor teljesülnie kell az $|f(0)| \leq \sqrt{2}$ egyenlőtlenségnek!