BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Nagy Attila - Szép Gabriella

MATEMATIKA FELADATGYŰJTEMÉNY IV.

Műegyetemi Kiadó, 2005

Lektor:
Dr. Szász Gábor

Szerkesztő:
Dr. Nagy Attila

Szerzők:
Dr. Nagy Attila (35.fejezet)
Dr. Szép Gabriella (31., 32., 33., 34.,)

Rajzoló:
Dr. Lukács Erzsébet

(Nyolcadik utánnyomás)

egyetemi jegyzet
oktatási célra

Azonosító: **075005**

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Természettudományi Karának
megrendelése alapján kiadja a
Műegyetemi Kiadó
www.kiado.bme.hu
Felelős vezető: Wintermantel Zsolt
Terjedelem: 14,25 (A/5) ív
Nyomdai munkák:
Műegyetemi Nyomda
Munkaszám: 126/05

Előszó

Ez a kötet a negyedik abból a négykötetes feladatgyűjteményből, melyet a Közlekedésmérnöki Kar Matematika Tanszékének oktatói készítenek Szász Gábor Matematika I-II-III című tankönyvéhez. A kötet öt fejezete megfelel a tankönyv harmadik kötetében található hasonló számozású fejezeteinek. A fejezetek sorszámozatlan alfejezetekre oszlanak. Minden alfejezet tipográfiailag is elkülönülő elméleti összefoglalóval kezdődik; ez tartalmazza a felhasználandó ismeretek legfontosabb elemeit: jelöléseket, definíciókat, tételeket, példákat, alkalmazásokat, megjegyzéseket, melyek azonosítója egy-egy betűvel kezdődik (ezek jelentése: **J** jelölés, **D** definíció, **T** tétel, **P** példa, **A** alkalmazás, **M** megjegyzés), majd a fejezet sorszáma, végül a fejezeten belüli saját sorszám következik. Például:

M 35.2 Ez itt a harmincötödik fejezet elméleti bevezetőjének kettes sorszámú megjegyzése.

Az elméleti bevezető után következnek a feladatok; ezek csak a fejezeten belüli sorszámukat viselik. Azonos fejezetből való hivatkozásnál csak ez a sorszám (pl.: **56.**), más fejezetből való hivatkozásnál a fejezet és a feladat sorszáma együtt szerepel (pl.: **35.56.**). A feladat sorszámának felső indexében szerepelhet egy jel, melyet az alábbi példákban magyarázunk:

51.$^{\bullet}$ Ez a feladat alapfeladat, az olvasó által való megoldását fontosnak tartjuk.

52.$^{\flat}$ Ehhez a feladathoz részletes útmutató tartozik a megoldásoknál.

53.* Ez a feladat a nehezebbek közé tartozik.

54.^{K} Ehhez a feladathoz kalkulátor használata szükséges.

55.^{P} Ehhez a feladathoz programozható számoló- vagy számítógép használata szükséges.

A végeredményt, néhány kivétellel, minden feladatnál közöljük. Az ábráknak nincs saját sorszámuk, de minthogy közvetlenül a feladat mellett szerepelnek, a szövegből mindig egyértelmű, hogy melyikhez tartoznak.

A kötet szerzői köszönetet mondanak Szász Gábornak rendkívül gondos lektori munkájáért és hasznos javaslataiért.

A feladatgyűjtemény szövegét a MATEX, rajzait az AUTOCAD programcsomaggal szerkesztettük. Ez könnyebbé teszi egy javított kiadás elkészítését. Ezért kérünk minden olvasót, hogy a megtalált hibákat, javítási ötleteiket juttassák el a Közlekedésmérnöki Kar Matematika Tanszékére.

Budapest, 1993. december 15.

A szerkesztő

Tartalom

31. fejezet

Kombinatorika

D 31.1 Az egymástól különböző $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemekből képzett n elemű sorozatokat az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemek **ismétlés nélküli permutációinak** nevezzük.

T 31.2 Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemek összes ismétlés nélküli permutációinak száma $n!$.

D 31.3 Ha az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemek között egyenlők is vannak, akkor a belőlük képzett n elemű sorozatokat **ismétléses permutációknak** nevezzük.

T 31.4 Ha n elem között r különböző fordul elő, és ezekből rendre $k_1, k_2, \ldots, k_r$ darab van $(\sum_{i=1}^{r} k_i = n)$, akkor ezen n elem összes ismétléses permutációinak száma $\frac{n!}{k_1!\,k_2!\ldots k_r!}$.

D 31.5 Az egymástól különböző $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemekből képzett k elemű sorozatokat az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemek **k-adosztályú ismétlés nélküli variációinak** nevezzük, ha bennük az adott elemek mindegyike legfeljebb egyszer fordul elő.

T 31.6 Adott n elemből képzett összes k-adosztályú ismétlés nélküli variációk száma $\frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\ldots(n-k+1)$.

D 31.7 Az egymástól különböző $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemekből képzett k elemű sorozatokat az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemek **k-adosztályú ismétléses variációinak** nevezzük, ha bennük az adott elemek többször is előfordulhatnak.

T 31.8 Adott n elem összes k-adosztályú ismétléses variációinak száma n^k.

D 31.9 Az egymástól különböző $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemekből képzett k elemű halmazokat az adott elemek **k-adosztályú ismétlés nélküli kombinációinak** nevezzük.

T 31.10 Adott n elem összes k-adosztályú ismétlés nélküli kombinációinak száma $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

D 31.11 Az egymástól különböző $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemekből képzett k elemű rendszereket az adott elemek **k-adosztályú ismétléses kombinációinak** nevezzük.

T 31.12 Adott n elem összes k-adosztályú ismétléses kombinációinak száma $\binom{n+k-1}{k}$.

A kombinatorikai feladatok megoldásánál olykor jól alkalmazható a következő, teljes indukcióval bizonyítható tétel:

T 31.13 Jelölje $n(A)$ az A halmaz elemeinek számát. Ekkor

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = \sum_{i=1}^{k} n(A_i) - \sum_{\substack{i,j \\ 1\le i<j\le k}} n(A_i \cap A_j) + \sum_{\substack{i,j,l \\ 1\le i<j<l\le k}} n(A_i \cap A_j \cap A_l) - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{k+1} n(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) \quad .$$

Feladatok

A kombinatorikai feladatok megoldása általában nem vezethető vissza tisztán permutációkra, variációkra, kombinációkra. A legtöbb feladat – legalábbis részben – egyéni okoskodást igényel.

1.* Hány különböző négyjegyű számot tudunk felírni az $1, 2, 3, 4$ számjegyekkel, ha
a) mindegyiket fel kell használni?
b) nem kell mindegyiket felhasználni?

2. Hány olyan négyjegyű szám van, amelyben nincs két egyenlő számjegy?

3.* Egy gyűlésen öt ember szólal fel: A, B, C, D, E. Hányféle sorrendben kaphatnak szót, ha
a) B nem szólalhat fel A előtt?
b) B közvetlenül A után szólal fel?

4. Hányféleképpen ültethetünk le egy kerek asztal köré öt nőt és öt férfit úgy, hogy se két férfi, se két nő ne kerüljön egymás mellé, és az elforgatással egymásba átvihető ülésrendeket
a) különbözőnek tekintjük?
b) nem tekintjük különbözőnek?

5. Egy autórendszám három betűből és három számból áll. Hány különböző ilyen rendszámot tudunk készíteni, ha az ábécéből 24 jelet használhatunk, természetesen egy betűt vagy számot többször is, és
a) a három betű elöl van?
b) a három szám egymás mellett, de a betűk között is lehet?

6. Egy könyvespolcon $n + m$ könyv áll, közöttük m könyv kötése fekete, és n könyvé piros.
a) Hányféleképpen rakhatjuk sorba ezeket a könyveket úgy, hogy az első m helyen fekete kötésű könyv álljon?
b) Hány olyan sorrend van, amelynél az m fekete könyv egymás mellé kerül?

7.* Mennyi az 1 és 2 számjegyekkel felírható ötjegyű számok összege?

8.* Mennyi az $1, 2, ..., n$ számjegyek $(1 \leq n \leq 9)$ összes permutációi által alkotott n jegyű számok összege?

9.* Tíz különböző cukorkából hányféleképpen lehet kettőt kiválasztani? (A kiválasztás sorrendje nem számít.)

10. Egy tanulónak hét könyve van, társának kilenc. Elhatározzák, hogy két-két könyvet cserélnek egymással. Hányféleképpen tehetik meg?

11. Egy sakktáblán a bal-felső sarokból indulva a jobb-alsóba kell jutnunk úgy, hogy mindig csak egyet lépünk, vagy jobbra vagy lefelé. Hány út lehetséges?

12. Hány $n + k$ jegyű szám írható fel n db 2-esből és k db 1-esből?

13.* Hány ötjegyű szám írható fel az $1, 2, 3$ számjegyekkel, ha
a) nem kell mindegyiknek szerepelnie?

b) mindegyiknek legalább egyszer szerepelnie kell?

14. Hány háromjegyű páratlan számot írhatunk fel az $1, 3, 5, 6, 8$ számjegyekből, ha mindegyiket
a) csak egyszer használhatjuk fel?
b) többször is felhasználhatjuk?

15. Hányféleképpen ülhet 18 ember egy 8, egy 6 és egy 4 személyes csónakba, ha egy csónakon belül a sorrend
a) nem számít?
b) számít?

16. Ugyanaz a feladat mint előbb, de van két ember, aki ugyanabba a csónakba akar ülni.

17. Egy társaságban mindenki mindenkivel kezet fogott. Hányan voltak a társaságban, ha 45 kézfogás történt?

18. Hány szótárra van szükségünk ahhoz, hogy közvetlenül tudjunk fordítani 8 adott nyelv bármelyikéről bármelyikre?

19.* Egy bizottságnak kilenc tagja van. Elnököt, elnökhelyettest, titkárt, és propagandafőnököt akarnak választani. Hányféleképpen tehetik ezt meg, ha senki sem láthat el egynél több feladatot?

20. Adva van a síkban n pont. Ezek közül p egy egyenesen fekszik, a többi között viszont nincsenek olyanok, amelyek bármely másik kettővel egy egyenesen lennének. Hány olyan (nem elfajuló) háromszög van, melynek csúcsai az adott pontok közül kerülnek ki?

21. A 32-lapos magyar kártyából hányféle leosztás lehet, ha négy embernek osztunk, és
a) egy ember 8 lapot kap?
b) egy ember 4 lapot kap?

22.* Öt különböző tortából választva hányféle összeállítása lehet egy húszszeletes csomagnak, ha nem feltétlenül választunk mindegyik fajtából? A kiválasztás sorrendje nem számít.

23.* Hány olyan nem egybevágó háromszög van, amelyekben az oldalak hossza az
a) 4,5,6,7;
b) 2,3,4,6 értékek közül kerül ki?

24. Hány olyan téglatest van, amelynél az oldalak hossza 1 és 10 közé eső egész szám?

25. Egy postahivatalban tízféle képeslevelezőlapot árulnak. Hányféleképpen vásárolhatunk
a) nyolc különböző lapot?
b) nyolc lapot?
c) tizenkét lapot?

26.* Definiáljuk a $(1 + x + x^2 + \ldots)(1 + x + x^2 + \ldots)$ szorzatot a szokásos módon, azaz legyen

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} x^i\right)^2 = 1 \cdot 1 + (1 \cdot x + x \cdot 1) + (1 \cdot x^2 + x \cdot x + x^2 \cdot 1) + \ldots = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots$$

Mennyi lesz x^n együtthatója $(\sum_{i=0}^{\infty} x^i)^k$-ban?

27. Hányféleképpen lehet 80 egyforma golyót 10 különböző dobozba elhelyezni, ha mindegyikbe belefér mind a 80? (Azaz mindegy, hogy mely golyók kerülnek egy dobozba, csak az az érdekes, hogy melyikbe mennyi.)

28.* Hányféleképpen lehet 90 egyforma golyót 7 különböző dobozba elhelyezni, ha mindegyikbe belefér mind a 90, de mindegyikbe legalább ötöt kell rakni?

29. Hány megoldása van a $\sum_{i=1}^{20} x_i = 200$ egyenletnek, ha x_i pozitív egész?

30. Fehér, piros, lila, kék és sárga színű virágokból 17 csupa különböző csokrot szeretnénk készíteni úgy, hogy egy csokorban hét szál virág legyen, és mind az öt színnek szerepelnie kell. Sikerülni fog?

31. Fehér, piros, lila, kék és sárga színű virágokból 123 csupa különböző csokrot szeretnénk készíteni úgy, hogy egy csokorban hét szál virág legyen, és legalább három színnek szerepelnie kell. Sikerülni fog?

32. Hányféleképpen osztható szét 30000 Ft jutalom három dolgozó között, ha 6000 Ft-nál kevesebbet egyik sem kaphat, és mindegyik jutalmat ötszázasokra kell kerekíteni?

33. Hányféleképpen készíthetünk az $1, 2, \ldots, n$ halmaz elemeiből $3n$ elemű, egymástól különböző, monoton sorozatokat?

34.* Hányféleképpen lehet 80 egyforma golyót 10 különböző dobozba elhelyezni, ha egy dobozba legfeljebb 20 fér? (A végeredményt számítógéppel számíthatjuk ki.)

35.P Hányféleképpen lehet 5 féle tortából 20 szeletet kiválasztani, ha mindegyikből csak 12 szelet van? (A végeredményt számítógéppel számíthatjuk ki.)

36.* Az $1, 2, 3, 4, 5, 6$ számjegyekből hatjegyű számokat készítünk úgy, hogy mindegyiket felhasználjuk. Hány olyan szám van, amelyikben legalább az egyik számjegy az értékének megfelelő sorszámú helyen áll?

37. Egy futóversenyen tizenketten indulnak; rajtszámaik $1, 2, \ldots, 12$. Hányféleképpen fordulhat elő, hogy egyik sem annyiadiknak fut be, mint a rajtszáma?

38.* Egy dobozban n db, 1-től n-ig számozott cédula van. Kihúzzuk valamennyit. Bizonyítsuk be, hogy ha $N_{n,k}$-val jelöljük azon esetek számát, amikor éppen k db-ot annyiadiknak húzunk, amennyi a sorszáma, akkor fennáll a következő egyenlőség:

$$N_{n,k} = \frac{n!}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \frac{1}{i!}$$

39.* Hányféleképpen lehet 10 számozott korongot 6 sorban elhelyezni, ha minden sorban elfér mind a 10, és egy-egy soron belül a korongok sorrendje

a) nem számít?

b) számít?

40. Hányféleképpen helyezhetünk el 20 különböző könyvet egy ötpolcos könyvszekrényben, ha minden polcon elfér mind a 20 könyv, és egy polcon belül a könyvek sorrendje

a) nem számít?

b) számít?

c) számít, és minden polcra kell tenni legalább egy könyvet?

41. Hányféleképpen lehet 80 db 1-től 80-ig számozott golyót 10 különböző dobozba elhelyezni, ha mindegyik dobozba belefér mind a 80, és egy-egy dobozon belül a sorrend

a) nem számít?

b) számít?

Szokásos n elem k-adosztályú ismétléses, ill. ismétlés nélküli variációinak, ill. kombinációinak számát $V_n^{k,i}$-vel, V_n^k-val, $C_n^{k,i}$-val, C_n^k-val jelölni.

42. Legyen $A = \{1, 2, ..., k\}$, $B = \{1, 2, ..., n\}$. Határozzuk meg

a) az $A \to B$ leképezések számát!

b) a kölcsönösen egyértelmű $A \to B$ leképezések számát!

c) a monoton $A \to B$ leképezések számát!

d) a szigorúan monoton $A \to B$ leképezések számát!

43. Egy dobozban n különböző golyó van, kiválasztunk k-t. Hányféleképpen tehető ez meg, ha

a) a kihúzott golyót mindig visszatesszük, és a kihúzás sorrendje számít?

b) a kihúzott golyót nem tesszük vissza, és a sorrend számít?

c) a kihúzott golyót visszatesszük és a sorrend nem számít?

d) a kihúzott golyókat nem tesszük vissza, és a sorrend nem számít?

44. Adott n doboz és k érme. Hányféleképpen lehet az érméket szétosztani a dobozokba, ha

a) egy dobozba tetszőleges számú érmét tehetünk, és az érmék megkülönböztethetőek?

b) egy dobozba legfeljebb egy érmét tehetünk, és az érmék megkülönböztethetőek?

c) egy dobozba tetszőleges számú érmét tehetünk, és az érmék megkülönböztethetetlenek?

d) egy dobozba legfeljebb egy érmét tehetünk, és az érmék megkülönböztethetetlenek?

32. fejezet

Valószínűségi algebra

Eseménytér, valószínűségi algebra

D 32.1 Az S nem üres halmazt **Boole-algebrának** nevezzük, ha bármely a, b elempárjához egyértelműen hozzá van rendelve egy S-beli $a+b$ összeg és egy S-beli ab szorzat, és tetszőleges $a, b, c \in S$ esetén

a) $a + b = b + a, ab = ba,$

b) $(a + b) + c = a + (b + c), (ab)c = a(bc),$

c) $a(a + b) = a, a + ab = a,$

d) $a(b + c) = ab + ac,$

e) van olyan $0 \in S$, hogy S minden elemére $0 + a = a$,

f) van olyan $1 \in S$, hogy S minden elemére $1 \cdot a = a$,

g) minden a-hoz van olyan $\overline{a} \in S$, hogy $a + \overline{a} = 1$ és $a\overline{a} = 0$. Az ilyen $\overline{a}$ elemet a komplementumának nevezzük.

T 32.2 Minden S Boole-algebrában teljesülnek a következők:

a) tetszőleges $a, b, c \in S$ esetén $aa = a$, $a + a = a$ és $a + (bc) = (a + b)(a + c)$,

b) a 0 és 1 egyértelműen meghatározott, és $1 + a = 1, 0a = 0$,

c) $\overline{a}$ az a által egyértelműen meghatározott, és $\overline{\overline{a}} = a$, továbbá tetszőleges a és b esetén $\overline{a + b} = \overline{a}\overline{b}$, $\overline{ab} = \overline{a} + \overline{b}$ (de Morgan azonosságok).

Valamilyen véletlen jelenség előidézését vagy megfigyelését **kísérletnek** nevezzük. Egy kísérlet lehetséges kimeneteleit a kísérlethez tartozó **elemi eseményeknek**, az összes elemi eseményből álló halmazt a kísérlethez tartozó **eseménytérnek**, ennek részhalmazait pedig **eseményeknek** nevezzük. Az eseményteret Ω -val jelöljük. Az üres halmazt **lehetetlen eseménynek**, az Ω eseményt **biztos eseménynek** nevezzük. Ha a kísérlet kimenetele egy x elemi esemény, ahol $x \in A$, akkor azt mondjuk, hogy az A esemény bekövetkezett; ha $x \notin A$, akkor azt mondjuk, hogy az A esemény nem következett be.

D 32.3 Az Ω eseménytér elemeiből álló A és B **események összegén** az $A \cup B \subseteq \Omega$ eseményt értjük, és $A + B$-vel jelöljük, az A és B **események szorzatán** pedig az $A \cap B \subseteq \Omega$ eseményt értjük, és AB-vel jelöljük. Az A és B események különbségén az $A \setminus B \subseteq \Omega$ eseményt értjük, és $A - B$-vel jelöljük.

D 32.4 Az $\overline{A} = \Omega - A$ eseményt az A **esemény ellentétének** nevezzük. Ha $AB = 0$, akkor azt mondjuk, hogy A és B **egymást kizáró események**.

D 32.5 Az $A_1, A_2, ..., A_n \subseteq \Omega$ események összességét **teljes eseményrendszernek** nevezzük, ha

$$A_1 + A_2 + ... + A_n = \Omega \quad \text{és} \quad A_iA_j = \emptyset \quad i \neq j, \quad 1 \leq i \leq n\ , \quad 1 \leq j \leq n$$

D 32.6 Legyen Ω egy K kísérlethez tartozó eseménytér. Az Ω részhalmazainak valamely összességét, vagyis a K kísérlethez tartozó események valamely halmazát az Ω eseménytéren létesített eseményalgebrának nevezzük, és $E(\Omega)$-val jelöljük, ha a következő feltételek teljesülnek:

a) $\emptyset \in E(\Omega)$ és $\Omega \in E(\Omega)$,

b) Ha $[A_n; n \in \mathrm{N}^+]$ az $E(\Omega)$-ba tartozó események valamely végtelen sorozata, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ esemény is $E(\Omega)$-ba tartozik (ahol $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ azt az eseményt jelenti, hogy az A_n $(n = 1, 2, ...)$ események közül legalább egy bekövetkezik).

c) Ha $A \in E(\Omega)$ és $B \in E(\Omega)$, akkor $AB \in E(\Omega)$,

d) Ha $A \in E(\Omega)$, akkor $\overline{A} \in E(\Omega)$.

T 32.7 Minden eseményalgebra az események összeadására és szorzására nézve Boole-algebrát alkot.

D 32.8 Legyen $E(\Omega)$ az Ω eseménytéren létesített olyan eseményalgebra, amelynek minden A eseményéhez hozzá van rendelve egy $P(A)$ valós szám, azaz az $E(\Omega)$ eseménytéren értelmezve van egy valós értékű P függvény úgy, hogy:

a) $0 \le P(A) \le 1$,

b) $P(\Omega) = 1$,

c) Ha $A_1, A_2, ...$ egymást páronként kizáró $E(\Omega)$-beli események véges vagy végtelen sorozata, akkor $P(A_1 + A_2 + ...) = P(A_1) + P(A_2) + ...$. Ekkor azt mondjuk, hogy az $E(\Omega)$ eseményalgebra a P függvényre nézve **valószínűségi algebrát** vagy más szóval **valószínűségi mezőt** alkot. A a,b,c követelményeket valószínűségi axiómáknak, a $P(A)$ számot az **A esemény valószínűségének** nevezzük.

T 32.9 A fenti követelményekből következik, hogy tetszőleges $A, B \in E(\Omega)$ esetén
$P(\overline{A}) = 1 - P(A), \quad P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB), \quad P(\emptyset) = 0$.

T 32.10 (Jordan tétel) Legyenek $A_1, ..., A_n$ tetszőleges események. Jelölje c_i az ezekből az eseményekből alkotható összes i tényezős szorzat valószínűségének összegét, azaz

$$c_i = \sum P(A_{j_1} ... A_{j_i}) \qquad 1 \le j_1 < j_2 < ... < j_i \le j_n \quad .$$

Ekkor annak P_k valószínűsége, hogy az A_i események közül pontosan k db következik be:

$$P_k = c_k - \binom{k+1}{k} c_{k+1} + \binom{k+2}{k} c_{k+2} - ... + (-1)^{n-k} \binom{n}{k} c_n \quad .$$

Feladatok

1.* Bizonyítsuk be, hogy ha n pozitív egész szám, és törzstényezős felbontásában minden prímszám első hatványon szerepel, akkor a szám osztói Boole-algebrát alkotnak a következő műveletekre nézve: két osztó "összegén" legkisebb közös többszörösüket, két osztó "szorzatán" legnagyobb közös osztójukat értjük.

2.* Boole-algebrát alkotnak-e a [0,1] intervallumba eső számok, ha a műveletek a következő módon vannak értelmezve: $a + b = \max(a, b); ab = \min(a, b)$?

3. Egy H halmaz bizonyos részhalmazainak T összességét halmaztestnek nevezzük, ha a halmazok összeadása, szorzása és kivonása nem vezet ki a T-ből

(ahol az összeadás az egyesítés, a szorzás a metszés, a kivonás pedig a szokásos módon van értelmezve). Bizonyítsuk be, hogy egy H halmaz bizonyos részhalmazainak T összessége halmaztestet alkot, ha teljesülnek a következő feltételek: a H halmaz T-hez tartozik, és ha az A, B halmazok T-hez tartoznak, T-hez tartozik az $A - B$ halmaz is.

4.• Legyen a, b, c egy Boole-algebra tetszőleges három eleme. Bizonyítsuk be, hogy

a) $(a+b)(a+c)(b+c) = ab + ac + bc$,

b) $\overline{(ab)}\,\overline{(\overline{a}\,\overline{b})} = \overline{(a\overline{b})}\,\overline{(\overline{a}b)}$.

5. Boole-algebrák alkalmazásainál gyakran használják a következő két műveletet: $a \circ b = \overline{a}b + a\overline{b}$, és $a * b = \overline{a} + \overline{b}$. Bizonyítsuk be, hogy egy Boole-algebra tetszőleges a, b, c elemeire:

a) $a\overline{b} \circ \overline{a}b = a \circ b$,

b) $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$,

c) $(a * b) * (a * b) = ab$.

6.• Egy kosárban sárga, kék, és fehér labdák van. Egymás után kihúzunk hármat. Jelölje rendre S_i, K_i, illetve F_i azt, hogy sárga, kék vagy fehér labdát húztunk az i-edik húzáskor. Adjuk meg S_i-vel, K_i-vel, F_i-vel a következő eseményeket:

a) Mind a három fehér.

b) Csak a harmadik kék.

c) Egyik sem fehér.

d) Három különböző színűt húztunk.

e) Fejezzük ki az F_1 eseményt a többivel!

7. Legyen A az az esemény, hogy egy játékkockával dobva páros számot dobunk, B az, hogy négynél kevesebbet dobunk, és C az, hogy kettőnél többet dobunk. Mit jelent a $D = (A - BC) + ((A - B) - C)$ esemény?

8.• Egy medencét két csapon keresztül lehet megtölteni. Az A esemény jelentse azt, hogy az első csapon át folyik a víz, a B pedig azt, hogy a második csapon át folyik. Fogalmazzuk meg szavakban a következő eseményeket:

a) $\overline{A}B$	b) $A - B$	c) $\overline{A+B}$
d) $\overline{AB}$	e) $(A-B)+(B-A)$	f) $\overline{A}+\overline{B}$

9.• Egy brigád három géppel dolgozik. Jelentse A_i $(i = 1, 2, 3)$ azt az eseményt, hogy az i-edik gép egy éven belül elromlik. Fejezzük ki az A_i eseményekkel a következőket:

a) Csak az első romlik el.

b) Csak egy gép romlik el.

c) Legfeljebb egy gép romlik el.

d) Legalább egy gép elromlik.

10. Legyenek $A_1, \ldots, A_n$ tetszőleges, egymást páronként kizáró események. Milyen eseményt jelöl a következő kifejezéssel definiált B?

$$B = \sum_{k=1}^{n} \left(\overline{A_1} \ldots \overline{A_{k-1}} A_k \overline{A_{k+1}} \ldots \overline{A_n}\right) .$$

11. Bizonyítsuk be, hogy egy eseményalgebra tetszőleges A, B, C elemeire:
a) $A - BC = (A - B) + (A - C)$,
b) $AB - C = (A - C)(B - C)$.

12. Bizonyítsuk be, hogy egy eseményalgebra tetszőleges A, B elemeire $A + B = A\overline{B} + \overline{A}B + AB$, és a jobb oldalon egymást páronként kizáró események állnak.

13.* Mutassuk meg, hogy egy eseményalgebra tetszőleges A, B elemeire az AB, $A\overline{B}$, $\overline{A}B$, $\overline{A}\,\overline{B}$ események teljes eseményrendszert alkotnak.

14. Fennállnak-e az alábbi egyenlőségek egy eseményalgebra tetszőleges A, B, C elemeire? Ha nem, adjunk meg az A, B, C események között olyan összefüggéseket, amelyek fennállása esetén az egyenlőségek teljesülnek.
a) $A + (B - C) = (A + B) - C$,
b) $(A - B) + C = A - (B - C)$,
c) $(A + B) - B = A$.

15.* Legyenek A, B, C tetszőleges események. Ezeket és ellentéteiket használva bontsuk az $A + B + C$ eseményt a lehető legtöbb egymást páronként kizáró esemény összegére.

16. Egy vödörben rózsaszín, fehér és piros szegfűk vannak. Véletlenszerűen kihúzunk hármat. Adjuk meg az elemi eseményeket, ha azt nézzük, melyik színből mennyit húztunk.

17. Tekintsük az előző feladatot. Jelentse A azt az eseményt, hogy három megegyező színű virágot húztunk. Legfeljebb hány elemű az a teljes eseményrendszer, amely az A-t tartalmazza, a lehetetlen eseményt viszont nem?

18.* Egy piros és egy kék kockával dobunk. Adjuk meg a kísérlethez tartozó elemi események számát, ha azt nézzük, hogy melyik kockán melyik szám került felülre!

19.* Két egyforma kockával dobunk. Adjuk meg a kísérlethez tartozó elemi események számát, ha azt nézzük, milyen számok kerültek felülre!

20. A 32 lapos magyar kártyából kihúzunk 4 lapot. Jelentse A azt az eseményt, hogy legalább két ászt húzunk. Egészítsük ki legalább három elemű teljes eseményrendszerré úgy, hogy a lehetetlen esemény ne legyen köztük.

21.* Igazoljuk, hogy egy valószínűségi algebra tetszőleges A és B eseményére :
a) $P(AB) = 1 - P(\overline{A} + \overline{B})$,
b) $P(A + B) = 1 - P(\overline{A}\,\overline{B})$,
c) $P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB)$,
d) $P(A + B) = P(A) + P(B\overline{A})$,
e) $P(AB) \le P(A)$,
f) $P(A + B) \le P(A) + P(B)$,
g) $P(A) \le P(A + B)$,
h) $P(AB + CD) \le P(A + C)$.

22.* Legyen A és B ugyanahhoz a kísérlethez tartozó két esemény. Mennyi lesz $P(A)$, ha $P(B) = 0.6$, $P(A\overline{B}) = 0.3$ és $P(\overline{A}B) = 0.1$?

23. Bizonyítsuk be, hogy ha egy valószínűségi algebra A és B elemeire:
a) $P(A) = 0.9$ és $P(B) = 0.8$, akkor $P(AB) \ge 0.7$;
b) $P(B) = 0.8$ és $P(AB) = 0.7$, akkor $P(\overline{A}) \ge 0.1$.

24. Legyen A és B ugyanahhoz a kísérlethez tartozó két esemény. Határozzuk meg

a) az $\overline{A}$ esemény valószínűségét, ha $P(B) = p$, $P(A+B) = q$ és $P(AB) = r$,
b) a $\overline{B}$ esemény valószínűségét, ha $P(A) = r, P(A\overline{B}) = p$ és $P(\overline{A}B) = q$.

25.* Legyenek $A_1, A_2, ..., A_n$ egy valószínűségi algebra tetszőleges eseményei. Teljes indukcióval bizonyítsuk be a következő egyenlőséget (**Poincaré tétele**):

$$P(A_1 + ... + A_n) = P(A_1) + ... + P(A_n) - \sum_{i<j} P(A_iA_j) +$$

$$+ \sum_{i<j<k} P(A_iA_jA_k) - ... + (-1)^{n+1}P(A_1...A_n) \quad ,$$

ahol $1 \leq i < j < k < ... \leq n$.

26.* Legyenek A_1, A_2, A_3 egy valószínűségi algebra tetszőleges elemei, és vezessük be a következő jelöléseket:
$c_1 = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$, $c_2 = P(A_1A_2) + P(A_1A_3) + P(A_2A_3)$, $c_3 = P(A_1A_2A_3)$. Bizonyítsuk be, hogy annak valószínűsége, hogy az A_i események közül pontosan egy következik be, $c_1 - 2c_2 + 3c_3$.

27. Ha $A \circ B = (A - B) + (B - A)$, akkor bizonyítsuk be, hogy
a) $P(A \circ C) \leq P(A \circ B) + P(B \circ C)$,
b) $P(B \circ C)$ csak akkor 0, ha $P(B) = P(C)$,
c) $|P(AB) - P(AC)| \leq P(B \circ C)$.

28. Bizonyítsuk be hogy egy eseményalgebra tetszőleges A és B elemeire fennállnak az $-\frac{1}{4} \leq P(AB) - P(A)P(B) \leq \frac{1}{4}$ egyenlőtlenségek.

Klasszikus valószínűségi mező

D 32.11 Az olyan valószínűségi algebrát, amelyben véges számú, egyenlő valószínűségű esemény van, **klasszikus valószínűségi algebrának**, vagy **klasszikus valószínűségi mezőnek** nevezzük.

T 32.12 Klasszikus valószínűségi algebrában bármely esemény valószínűsége az illető eseményt alkotó elemi események számának és az összes elemi esemény számának hányadosával egyenlő.

D 32.13 Ha klasszikus valószínűségi algebrában egy A esemény valószínűségét akarjuk meghatározni, akkor azokat az elemi eseményeket, amelyek az A eseményt alkotják, **kedvező eseményeknek** nevezzük.

Feladatok

Ha egy feladaton belül több kérdés is van, akkor a megoldásban esetenként a $p_1, p_2...$ jelöléseket is fogjuk alkalmazni.

29.* Egy dobozban 5 piros golyó van. Hány fehéret kell hozzátenni, hogy 0.9-nél nagyobb legyen a valószínűsége annak, hogy egyet kihúzva az fehér legyen, feltéve, hogy a dobozból bármelyik golyót ugyanakkora valószínűséggel húzhatjuk.

30. Egy kockával kétszer dobunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy két különböző számot dobunk?

31.* Egy piros és egy kék kockát feldobva mennyi a valószínűsége annak, hogy a dobott számok összege 8?

32.* Két egyforma kockával dobunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a dobott számok összege 8?

33.* Egy kockával ötször dobunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy
a) legalább egyszer hatost dobunk?
b) öt különböző számot dobunk?
c) az első dobás hatos, a többi nem?
d) legalább három dobás eredménye megegyezik?
e) legalább két dobás eredménye megegyezik?
f) a dobott számok között az egyenlő páratlanok száma pozitív és páros?

34. Nyolc darab, egytől nyolcig számozott és megkevert cédula közül egyet kihúzunk, megnézzük a számot, visszatesszük, újra megkeverjük a cédulákat. Mennyi a valószínűsége, hogy három húzás során három egymás után következő számot húzunk
a) növekvő sorrendben?
b) tetszőleges sorrendben?

35. Egy dobozban 6 hibátlan és 4 selejtes termék van összekeverve. Mind a 10 terméket kihúzzuk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 4 selejtes a négy utolsó lesz?

36. Mennyi a valószínűsége, hogy lottósorsoláskor az öt számot növekvő sorrendben húzzák ki ?

37.* Egy polcra 20 könyvet helyezünk el, közöttük Jókainak egy háromkötetes művét. Feltéve, hogy a könyvek bármely sorrendje egyformán valószínű, mennyi a valószínűsége, hogy ezek a kötetek növekvő sorszám szerint lesznek
a) egymás mellett?
b) nem feltétlenül egymás mellett?

38. Tíz különböző magasságú gyereket véletelenszerűen sorbaállítunk. Ha minden sorrend egyformán valószínű, mennyi a valószínűsége, hogy
a) a legnagyobb a sor elejére, a legkisebb a sor végére kerül?
b) a legnagyobb és a legkisebb egymás mellé kerül?

39. Egy n kulcsot tartalmazó kulcscsomóval próbálunk egy ajtót kinyitni. A kulcsok közül pontosan egy nyitja a zárat. Mennyi a valószínűsége, hogy
a) az első nyitni fogja?
b) épp a k-adik fogja nyitni, ha azt, amelyik nem nyitotta, félretesszük?

40. Egy dobozban N tábla csokoládé van, közöttük s számú tejcsokoládé, a többi étcsokoládé. Kiveszünk közülük sorban n db-ot. Mennyi a valószínűsége, hogy a k-adik húzás eredménye tejcsokoládé volt, ha bármilyen sorrend egyformán valószínű?

41. Péter öccse összekeverte bátyja magnószalagjait, véletlenszerűen tette vissza őket a tokokba. Péter a tokok felirata alapján vitt el hármat a tizennégyből. Mennyi a valószínűsége, hogy épp azokat vitte el, amelyeket szerette volna?

42.* Egy dobozban 18 papírlap van 1-től 18-ig megszámozva. Kihúzunk egyszerre 6 lapot. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott legkisebb szám is nagyobb kilencnél, ha bármelyik 6 lapot egyenlő valószínűséggel választhatjuk?

43. Egy dobozban 13 papírlap van 1-től 13-ig megszámozva. Kihúzunk 4 lapot. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott számok közül a legnagyobb és legkisebb különbsége legfeljebb 10, ha bármelyik 4 lapot egyenlő valószínűséggel húzhatjuk?

44.* Egy fiókban zoknik vannak: 3 egyforma pár, továbbá 4 olyan pár, amelyik az előbbiektől és egymástól is különbözik, és 4 db pár nélküli. Mennyi a valószínűsége annak, hogy ha sötétben kiveszünk kettőt, akkor az pár lesz, feltéve, hogy bármely két zokni kihúzása egyformán valószínű?

45. Egy dobozban 50 db 8 mm-es és 60 db 6 mm-es csavar van. Belemarkolva kiveszünk 20 db csavart. Mennyi a valószínűsége, hogy több lesz a 8 mm-es, mint a 6 mm-es?

46.* Egy iskola 18 tagú sakk-köréből sorsolással két egyenlő létszámú csapatot alakítanak. Mennyi a valószínűsége, hogy a két legjobb játékos egy csapatba kerül ?

47. Oldjuk meg az előző feladatot úgy, hogy három csapatot alakítunk.

48. Egy üdülőben 28 vendéget 7 asztalhoz ültetnek le négyesével. Mennyi a valószínűsége, hogy két adott személy egy asztalhoz kerül?

49. Egy szabályos pénzérmét n-szer feldobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy k-szor dobunk fejet ($k \leq n$)?

50. Egy játék menete a következő: Van három doboz, amelyek közül az egyikben értékes ajándék van, a másik kettőben egy-egy krumpli. A játékvezető tudja, hogy melyik dobozban van az ajándék. A játékos először rámutat az egyik dobozra, de nem nyúl hozzá. A játékvezető ezután a maradék kettőből kinyit egy olyat, amelyikben krumpli van. A játékos ezután újra választhat, és azt kapja, ami ebben a másodszorra választott dobozban van. Milyen stratégiát kövessen?

α) Ragaszkodjon ahhoz, amit először választott?
β) Válasszon véletlenszerűen immár kettő közül?
γ) Válassza a másikat, mint amit előszörre?

51.* Egy 32-lapos kártyacsomagból 6 lapot kihúzunk. Mennyi a valószínűsége, hogy lesz közöttük ász, ha a kihúzott lapokat

a) minden húzás után visszakeverjük?
b) nem keverjük vissza?

(A "lesz közöttük" azt jelenti, hogy legalább egy lesz közöttük.)

52. Egy 32-lapos kártyacsomagból 6 lapot húzunk ki, visszatevés nélkül. Mennyi a valószínűsége, hogy

a) a harmadik húzás eredménye piros?

b) az első és utolsó húzás eredménye zöld?

53. Oldjuk meg az előző feladatot azzal a változtatással, hogy a kihúzott lapot mindig visszakeverjük!

54. Négy ember kártyázik; jelöljük őket A, B, C, D-vel. A 32 lapos kártyacsomagot egyenlően kiosztjuk közöttük. Ha bármely kiosztás egyformán valószínű, mennyi a valószínűsége, hogy a négy ász
a) C-hez kerül?
b) egy emberhez kerül?

55. Egy 32-lapos kártyacsomagból 8 lapot kihúzunk. Mennyi a valószínűsége, hogy lesz közöttük két zöld, ha a kihúzott lapokat
a) visszakeverjük?
b) nem keverjük vissza?

56. 12 db 40 wattos és 15 db 60 wattos villanyégő közül véletlenszerűen kiveszünk kettőt. Mennyi a valószínűsége, hogy
a) mindkettő 40 wattos lesz?
b) egyik sem lesz 40 wattos?
c) lesz köztük 40 wattos?

57. Oldjuk meg az előző feladatot visszatevéssel!

58. Egy üzlet turkálójában tréningruhák vannak összekeverve 1-es és 3-as méretben. Az alsó és felső részek nincsenek összekötve. Ha 20 db 1-es és 30 db 3-as méretű van, mennyi a valószínűsége, hogy véletlenszerűen kihúzva egy alsó és egy felső részt,
a) 1-es méretű párt kapunk?
b) felemásat húzunk ki?

59. Egyes országokban az autók rendszámában a betűkön kívül 4 számjegy van. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen választott ilyen rendszámban
a) minden számjegy különböző?
b) két-két azonos számjegy van?
c) három számjegy megegyezik, a negyedik ezeknél kisebb?

60. 10 pár fekete és 10 pár barna cipő mellé véletlenszerűen csomagolnak 10 pár fekete és 10 pár barna fűzőt. Mennyi a valószínűsége, hogy mindkét színből legalább 8 pár cipő megfelelő fűzőt kap?

61. Tíz terjedelmes kéziratot összesen 30 irattartóban tudunk elhelyezni úgy, hogy mindegyiket 3-3-ba tesszük. Mennyi a valószínűsége annak, hogy 6 véletlenszerűen kiválasztott irattartóban egyetlen teljes kézirat sem lesz?

62.* Az $1,\ldots,n$ egész számok közül véletlenszerűen kiválasztunk egy x számot. Mennyi a valószínűsége, hogy x^2-1 osztható 10-zel? Ha ezt a valószínűséget p_n-nel jelöljük, mennyi lesz $\lim_{n\to\infty} p_n$?

63. A $0, 1, \ldots, (10^n-1)$ egész számok közül véletlenszerűen kiválasztunk egy x számot. Mennyi a valószínűsége, hogy ennek tízes számrendszerbeli alakja k jegyű? ($0 < k \le n$; a 0 egyjegyűnek számít).

64. Egy dobozban N db 1-től N-ig számozott golyó van. Visszatevés nélkül kihúzunk n db-ot, és ezeket a rájuk írt szám nagysága szerint sorba rakjuk. Legyen r tetszőleges egész, $1 \leq r \leq N$. Mennyi a valószínűsége, hogy a sorban a k-adik golyó száma éppen r-rel egyenlő?

65. Egy n házaspárból álló társaság táncol. Az összes párokra való oszlás egyenlően valószínű. Mennyi a valószínűsége, hogy egy adott pillanatban senki sem táncol a házastársával?

66. Egy osztályban a gyerekek karácsonykor megajándékozzák egymást. A 28 kis ajándékot egyformán csomagolják, és azután mindenki húz egyet. Mennyi a valószínűsége, hogy lesz olyan gyerek, aki a saját ajándékát húzza?

67. Egy futóversenyen hatan indulnak, rajtszámuk 1, 2, ... ,6 . Mennyi a valószínűsége, hogy éppen ketten annyiadiknak érnek be, amennyi a rajtszámuk?

68. Egy dobozban n db papírlap van 1-től n-ig számozva . Mennyi a valószínűsége, hogy a papírlapokat kihúzva

a) pontosan k db-ot annyiadiknak húzunk ki, amennyi a sorszáma?

b) legalább k db-ot annyiadiknak húzunk ki, amennyi a sorszáma?

69. Egy kapualjban 30 postaláda van felszerelve. A világítás elromlott, a postás nem tudja elolvasni a neveket sem a ládákon, sem a borítékokon. Csak arra emlékszik, hogy a 10 levelet csupa különböző ember kapta. Véletlenszerűen bedobja a leveleket. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább

a) kilencen a saját levelüket kapják?

b) nyolcan a saját levelüket kapják?

Geometriai valószínűségek

T 32.14 Legyen G olyan ponthalmaz, amelynek van mértéke, és ez nem nulla; jelöljük ezt $m(G)$-vel. Definiáljuk az $E(G)$ eseményalgebrát úgy, hogy $E(G)$ eseményei G-nek azok a H részhalmazai, amelyekre

a) az $m(H)$ mérték létezik,

b) az $m(G-H)$ mérték létezik,

és tegyen eleget továbbá G annak a feltételnek, hogy ha H_i, $i = 1,2,\ldots$ a G-nek olyan részhalmazai, amelyekre a) és b) teljesül, akkor $H = \cup_i H_i$ -re is teljesül a) és b), és ha minden i, j $(i \neq j)$ párra $H_i \cap H_j = \emptyset$, akkor $m(H) = \sum_i m(H_i)$. Ha ezen az eseményalgebrán a P függvényt úgy értelmezzük, hogy az $E(G)$-beli bármely H eseményre

$$P(H) = \frac{m(H)}{m(G)}$$

legyen, akkor erre a P függvényre nézve $E(G)$ valószínűségi algebrát alkot.

A szokásos geometriai terület-térfogat nem mindenben elégíti ki a fenti követelményeket, de egyszerűbb esetekben az előbbi tétel jól alkalmazható.

Feladatok

Az alábbi feladatokat azzal a feltevéssel oldjuk meg, hogy azokban geometriai valószínűségekről van szó.

70.* Két villamossal érhetjük el úticélunkat, az a és b jelűvel. Az a jelű 5 percenként, a b jelű 8 percenként közlekedik, és mindegyik első kocsija reggel 5 órakor indul. Fél hét és hét között véletlenszerűen érünk a megállóba. Mennyi a valószínűsége, hogy egy percnél kevesebbet kell várnunk?

71.* Az (1,3) intervallumon véletlenszerűen elhelyezünk egy pontot. Mennyi az r, ha 0.6 annak a valószínűsége, hogy ez a pont a 2.5-nek r sugarú környezetébe esik?

72. Egy rádióállomás minden órában pontos időt közöl. Valaki reggel felébredve észreveszi, hogy megállt az órája. Bekapcsolja a rádiót. Mennyi a valószínűsége, hogy 10 percnél kevesebbet kell várnia az időjelzésre?

73. A $(-a, a)$ intervallumon $(a > 0)$ véletlenszerűen választunk két számot, legyenek ezek x és y. Legyen továbbá r adott valós szám. Mennyi a valószínűsége, hogy $x + y < r$?

74. Válasszunk véletlenszerűen két számot a [0;2] intervallumon. Mennyi a valószínűsége, hogy
a) összegük kisebb $\frac{4}{5}$-nél?
b) szorzatuk kisebb 1-nél?

75. A [0;4] intervallumon véletlenszerűen választunk két számot, legyenek ezek a és b . Mennyi a valószínűsége, hogy
a) $a + b > 5$?   b) $a^2 + b < 1$?

76.* A (0;2) és (0;3) intervallumon találomra választunk egy-egy számot, legyenek ezek x, és y. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az x, y és 1 hosszúságú szakaszokból háromszög szerkeszthető?

77. Egy könyvtár de. 10-től du. 6-ig tart nyitva. Két kutató mindegyikének szándékában áll egy adott napon a könyvtárat felkeresni, és egy adott könyvből valamit kikeresni, ami mindkettő esetén fél órás elfoglaltság. Ha mindketten bármelyik pillanatban érkezhetnek, mennyi a valószínűsége, hogy találkoznak?

78. Egy egységnyi oldalú négyzet két átellenes oldalán találomra választunk egy-egy pontot. Mennyi a valószínűsége, hogy ezek távolsága egy adott r számnál kisebb?

79. Egy négyzetben, amelynek oldala 3 hosszúságú, véletlenszerűen választunk egy pontot. Legyen h adott valós szám. Mennyi a valószínűsége, hogy a pont távolsága
a) a négyzet egy előre adott oldalától nem nagyobb h-nál?
b) a négyzet hozzá legközelebbi oldalától nem nagyobb h-nál?
c) a négyzet középpontjától nem nagyobb h-nál?

d) az egyik rögzített csúcstól nem nagyobb h-nál?

80.* A [2;7] intervallumon választunk egy számot, majd az [1;5] intervallumon is egyet. Mennyi a valószínűsége, hogy a kettő szorzata 10-től legfeljebb 0.5-tel tér el?

81. R sugarú körlapon véletlenszerűen választunk egy pontot. A körlapot öt olyan körgyűrűre ill. belső körre akarjuk osztani, hogy a pont egyenlő valószínűséggel essen bármelyikbe. Mekkorák legyenek az öt részt határoló körök sugarai?

82. Találomra választunk egy pontot egy R sugarú kör kerületén, és egyet a körlapon. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a két pont a kör sugaránál távolabb lesz egymástól?

83.* Egy R sugarú körben válasszunk ki véletlenszerűen egy húrt. Mennyi a valószínűsége, hogy a húr hossza kisebb, mint $R/3$, feltéve, hogy a húrt úgy választjuk, hogy

a) a középpontját jelöljük ki véletlenszerűen a körlapon?

b) két végpontját jelöljük ki véletlenszerűen a körvonalon?

c) kijelöljük az irányát, és a középpontját véletlenszerűen választjuk az adott irányra merőleges átmérőn?

84. A $[0; a]$ intervallumból ($a > 0$) egymás után véletlenszerűen választunk három számot. Mennyi a valószínűsége, hogy

a) az összegük kisebb, mint a?

b) az utolsó a legkisebb?

85. A $[0; a]$ intervallumból ($a > 0$) egymás után találomra választunk 5 számot. Mennyi a valószínűsége, hogy az első három kisebb, az utolsó kettő nagyobb, mint $a/3$?

86. Véletlenszerűen válasszunk három számot a (0;2) intervallumból, legyenek ezek x, y, z. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az x, y, z élekkel bíró téglatest átlója kettőnél kisebb?

87.* Válasszunk véletlenszerűen két számot a [0;1] intervallumból, a-t és b-t. Jelölje k a $q(x) = x^2+ax+b$ polinom különböző valós gyökeinek a számát. Mennyivel egyenlők a $P(k = 0)$, $P(k = 1)$ és $P(k = 2)$ valószínűségek?

88. Válasszunk véletlenszerűen két számot a [0;1] intervallumból, a-t és b-t. Jelölje k a $q(x) = \frac{1}{3}x^3 - a^2x + b$ polinom különböző valós gyökeinek a számát. Mennyivel egyenlők a $P(k = i)$ $(i = 1, 2, 3)$ valószínűségek? (Vizsgáljuk a polinom maximum-, ill. minimumhelyét.)

89. Válasszunk egy a számot a $[-3; 1]$ intervallumon, és egy b számot a $[-1; 2]$ intervallumon. Mekkora valószínűséggel lesz a $q(x) = x^3 + ax + b$ polinomnak 1, 2, ill. 3 különböző valós gyöke?

90.* Egy rudat találomra választott pontjában kettétörünk, majd a két darab közül a nagyobbikat találomra választott pontjában újból kettétörjük. Mennyi a valószínűsége, hogy

a) az így kapott három darabból háromszöget lehet alkotni?

b) bármelyik kettő hosszának eltérése kisebb, mint a rúd hosszának tizede?

91. Tegyük fel, hogy egy anyagi részecske (pl. gáznemű anyagi részecske, vagy oldott anyag oldószerben) szabadon és véletlenszerűen mozoghat a tér egy bizonyos részén . Tegyük fel továbbá, hogy az anyag, amelynek részecskéiről szó van, a rendelkezésre álló teret nem egyenletesen tölti ki (pl. mágneses vagy gravitációs erő, vagy gyorsulás miatt; ilyen pl. a Föld légköre). tegyük fel, hogy megjelöltünk egy részecskét, majd magára hagytuk. Ha hosszú idő elteltével feltesszük a kérdést, hogy a részecske milyen valószínűséggel lehet a tér egy adott részén, ez nyilván a térrészben levő anyag tömegével lesz egyenesen arányos. Ebben az esetben az alaphalmaz mértéke az összes tömeg, feltéve, hogy ez véges. Legyen a vizsgálandó térrész egy 2 sugarú, 4 magasságú egyenes körhenger, amelyben az anyag sűrűségét a $\varrho(x,y,z) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$ $(0 \leq z \leq 4)$ függvénnyel tudjuk leírni, feltéve, hogy a henger tengelye a z tengely, és alapsíkja az (x,y) sík. Mennyi a valószínűsége, hogy egy megjelölt részecske hosszabb idő után éppen abban a $\frac{\pi}{2}$ nyílásszögű, origó csúcsú körkúpban lesz, amelynek tengelye a z tengely, és pontjaira $z \geq 0$?

92. Oldjuk meg az előző feladatot, ha az "anyag" az egész térben oszlik el $\varrho(x,y,z) = e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ sűrűséggel, és a kérdés az, hogy a részecske milyen valószínűséggel van az $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \sqrt{x^2+y^2}$ és az $z = 0$ egyenletű felületek által határolt hengerben, ha $x, y, z > 0$?

Feltételes valószínűség, független események

D 32.15 Egy valószínűségi algebrában legyen A tetszőleges, B pedig olyan esemény, hogy $P(B) \neq 0$. Az **A esemény B-re vonatkoztatott feltételes valószínűségének** nevezzük, és $P(A|B)$-vel jelöljük a

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

hányadost.

T 32.16 Ha $A_1, A_2, \ldots, A_n$ egy valószínűségi algebra olyan eseményei, hogy az A_1, A_1A_2, ..., $A_1A_2 \ldots A_{n-1}$ események mind pozitív valószínűségűek, akkor

$$P(A_1 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \ldots P(A_n|A_1A_2 \ldots A_{n-1}) .$$

T 32.17 (Teljes valószínűség tétele) Ha egy valószínűségi algebrában a $B_1, B_2, \ldots, B_n$ események teljes eseményrendszert alkotnak, és $P(B_k) > 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, akkor a valószínűségi algebrához tartozó tetszőleges A eseményre

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i) .$$

T 32.18 (Bayes-tétel) Ha egy valószínűségi algebrában a $B_1, B_2, \ldots, B_n$ események teljes eseményrendszert alkotnak, és $P(B_k) > 0$, $(k = 1, \ldots, n)$, valamint A a valószínűségi algebrához tartozó pozitív valószínűségű esemény, akkor

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)} .$$

D 32.19 Egy valószínűségi algebra két eseményét **függetlennek** nevezzük, ha

$$P(AB) = P(A)P(B) .$$

D 32.20 Egy valószínűségi algebra tetszőleges számú eseményére azt mondjuk, hogy
a) **páronként függetlenek**, ha közülük bármely kettő független.
b) **teljesen függetlenek**, ha közülük tetszőlegesen választott véges sok esemény szorzatának valószínűsége egyenlő a valószínűségek szorzatával.

Feladatok

93.* Mennyi $P(A)$, ha $P(A|B) = 0.7$, $P(A|\overline{B}) = 0.3$ és $P(B|A) = 0.6$?

94. Bizonyítsuk be, hogy ha $P(A) = 0.7$ és $P(B) = 0.8$, akkor $0.625 \leq P(A|B) \leq 0.875$!

95. Fejezzük ki $P(\overline{A}|\overline{B})$-t $P(B)$-vel és $P(A + B)$-vel, feltéve, hogy $P(B) \neq 1$.

96. Fejezzük ki $P(ABC|D)$-t $P(A|D)$, $P(B|AD)$ és $P(C|ABD)$-vel.

97. Tegyük fel, hogy az A és B események függetlenek. Függetlenek-e az
a) A és $\overline{B}$ események ?
b) $\overline{A}$ és $\overline{B}$ események ?

98. Bizonyítsuk be, ha egy valószínűségi algebrában az A és B események függetlenek, valamint $A \subseteq B$, akkor vagy $P(B) = 1$, vagy $P(A) = 0$!

99.* Bizonyítsuk be, hogy ha A, B és C egy valószínűségi algebra páronként független eseményei, és A független $B + C$-től, akkor az A, B és C események teljesen függetlenek!

100. Bizonyítsuk be, hogy ha egy valószínűségi algebrában az A, B, C, D események teljesen függetlenek, akkor AB független $C + D$-től !

101. Egy valószínűségi algebra A és B eseményeire $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B|A) = \frac{1}{2}$ és $P(A|B) = \frac{1}{4}$. Független-e A és B ?

102.* Legyenek A_1, A_2, A_3 egy valószínűségi algebra egymást páronként kizáró eseményei, amelyek p_1, p_2, p_3 valószínűségekkel következnek be. Mennyi a valószínűsége, hogy n egymástól független kísérletet végezve az A_2 előbb következik be, mint a másik kettő valamelyike?

103. Ketten, X és Y játszanak. Feldobnak egy-egy számozott kockát. Ha a dobott számok összege legalább nyolc, a dobás érvénytelen, és újra dobnak. Ha a dobott számok összege kevesebb, mint nyolc, és páratlan szám, akkor X nyer, ha páros, akkor Y. Mennyi a valószínűsége, hogy X nyer ? (Attól a lehetőségtől, hogy olyan sokáig nem dobnak nyolcnál kevesebbet, hogy abba kell hagyniuk a játékot, mielőtt valamelyik is nyerne, tekintsünk el.)

104.* Egy kockával kétszer dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege
a) hét, feltéve, hogy az összeg páratlan?
b) hat, feltéve, hogy van közöttük páratlan?

105. Három kockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy az egyiken hatos van, feltéve, hogy a dobott számok összege 12 ?

106. Két kockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy két ötöst dobtunk, ha tudjuk, hogy a dobott számok összege osztható öttel?

107. Az $\{1, 2, \ldots, N\}$ számhalmazból visszatevés nélkül kihúzunk három számot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a harmadiknak kihúzott szám az első kettő közé esik, ha tudjuk, hogy az első kisebb, mint a második?

108.* Egy dobozból, amelyben ismeretlen összetételben voltak fehér és fekete golyók, visszatevés nélkül húztak ki n golyót; ebből k volt fehér. Mennyi a valószínűsége, hogy az első húzás eredménye fehér golyó volt?

109.* Valakit keresünk az egyetemen. A keresett személy ugyanakkora valószínűséggel lehet öt adott terem valamelyikében. Annak valószínűsége, hogy egyáltalán az egyetemen van, p . Már négy teremben megnéztük, és nem találtuk. Mennyi a valószínűsége, hogy az ötödik teremben megtaláljuk?

110.* Egy kockával kétszer egymás után dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a második dobás eredménye nagyobb, mint az első volt?

111. Oldjuk meg a teljes valószínűség tételének felhasználásával a **44.** feladatot!

112. Két doboz mindegyikében csavarok vannak. Az első dobozban 10 % a selejtes, a másodikban 6%. Találomra kiveszünk az egyik dobozból egy csavart. (A dobozok között egyenlő valószínűséggel választhatunk). Mennyi a valószínűsége, hogy a csavar jó?

113.* Egy gép átlagban munkaidejének 1/3-ában az I. jelű, 1/6-odában a II. jelű, a többi idejében a III. jelű alkatrészen dolgozik. Az I. jelű alkatrész kidolgozása közben az erre fordított idő 10%-ában áll a gép, a II. jelű alkatrész kidolgozása közben végig dolgozik, a III. jelű kidolgozása közben a munkaidő 25%-ában áll. Mennyi a valószínűsége, hogy egy találomra kiválasztott időpontban áll a gép?

114.* A 32-lapos kártyacsomagból kihúzunk három lapot. Mennyi annak valószínűsége, hogy
a) a második zöld?
b) az első és a második zöld?
c) a harmadik piros?

115.* Az $S = \{1, 2, \ldots, N\}$ számhalmaz összes részhalmazai közül visszatevéssel válasszunk ki két részhalmazt (természetesen az üres halmazt is választhatjuk). Mennyi lesz annak a valószínűsége, hogy a metszetük az üres halmaz?

116.* Egy üzemben egy bizonyos alkatrész gyártásával négy gép foglalkozik. Az első naponta 250 alkatrészt gyárt, a második 320-at, a harmadik 200-at, a negyedik 270-et. Az egyes gépeknél a selejtarány rendre 2%, 4%, 3%, 5%. A kész alkatrészeket egy helyen gyűjtik. A gépek napi termeléséből kiveszünk egy alkatrészt.

a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott alkatrész jó?

b) Az alkatrészt jónak találjuk. Mennyi a valószínűsége, hogy a negyedik gép gyártotta?

117. Egy üzemből kikerülő darabáru 75%-a elsőosztályú. A kikerült termékeket egyenkénti vizsgálatnak vetik alá. Annak valószínűsége, hogy a vizsgálat során egy elsőosztályú terméket nem elsőosztályúnak minősítenek, 0.002 . Annak valószínűsége, hogy egy nem elsőosztályút elsőosztályúnak minősítenek, 0.05 . Mekkora a valószínűsége, hogy ha egy elsőosztályúnak minősített terméket vásároltunk, tényleg elsőosztályút kaptunk?

118. Az üzemből kikerülő termékeket minősítik. A termékek q valószínűséggel hibásak. A vizsgálatban a hibásakat α valószínűséggel fedezik fel, és β valószínűségű az az esemény, hogy egy jó terméket hibásnak minősítenek. Mennyi a valószínűsége, hogy

a) jónak ítélt termék selejtes?

b) selejtesnek minősített termék jó?

c) a terméket helyesen minősítik?

119. Egy egyszerűsített betegségfelismerési vizsgálat $p_1 = 0.95$ valószínűséggel mutatja ki a betegséget azoknál, akiknek van, de $p_2 = 0.01$ valószínűséggel pozitív eredményt mutat azoknál is, akik egészségesek. Becslések szerint a lakosság 4%-a szenved az adott betegségben. Mennyi a valószínűsége annak, hogy valaki

a) tényleg egészséges, ha a vizsgálat annak mutatta?

b) tényleg beteg, ha a vizsgálat annak mutatta?

120. Tekintsük az előző feladatot. Hogyan változnak a kérdéses valószínűségek, ha a lakosság 2%-át ill. 8%-át tételezzük fel betegnek?

121. Az un. feleletkiválasztásos módszerrel a diákok úgy vizsgáznak, hogy a tesztlapon minden kérdéshez több válasz van megadva, amelyek közül csak az egyik helyes, és a vizsgázónak azt kell megjelölnie, melyiket tartja helyesnek. Nyilvánvaló, ha a vizsgázó nem tudja a választ, akkor a válaszok közül véletlenszerűen jelöl meg egyet. Tegyük fel, hogy p annak a valószínűsége, hogy a vizsgázó tudja a helyes választ. Egy kérdésre a vizsgázó a helyes választ jelölte meg. Mennyi a valószínűsége, hogy a tényleg tudta, ha

a) két válasz közül választhatott?

b) négy válasz közül választhatott?

c) n $(n \geq 2)$ válasz közül választhatott?

122. Egy ABC üzletnek két szövetkezet, X és Y szállít ropit. A rekeszben N zacskó ropi van, ebből n elemű mintát veszünk visszatevéssel. A mintában s azok száma, amelyeket X gyártott. Mennyi a valószínűsége, hogy összesen k olyan zacskó van az N zacskó között, amelyet X gyártott, feltéve, hogy bármilyen összetétel ugyanakkora valószínűségű?

123.* Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy kockát négyszer feldobva kétszer dobunk hatost?

124.* Egy helységet két úton lehet megközelíteni. Két gépkocsi indul el, egyik az első úton, a másik a másikon. Annak valószínűsége, hogy az első úton a gépkocsi elakad, 0.8 ; annak, hogy a másikon elakad, 0.83 . Mennyi a valószínűsége, hogy legalább az egyik gépkocsi célhoz ér?

125. Egy repülőgépnek jobb és bal oldalán 2-2 motorja van, és még biztonságosan le tud szállni, ha mind a két oldalon legalább egy-egy motor üzemképes. Egy adott út alatt a motorok mindegyike q valószínűséggel romlik el, egymástól függetlenül. Mennyi a valószínűsége a biztonságos leszállásnak?

126. Statisztikai adatok alapján annak valószínűsége, hogy egy újszülött neme fiú: 0.516 . Ha a testvérek nemét egymástól függetlennek tekintjük, mennyi a valószínűsége, hogy egy ötgyerekes családban csak egyetlen fiú születik?

127.* Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy kockát több, mint tízszer kell feldobni ahhoz, hogy két hatost kapjunk?

128. Mennyi a valószínűsége annak, hogy két kockát több, mint tízszer kell feldobni ahhoz, hogy dupla hatost kapjunk?

129.* Hányszor kell két kockát feldobnunk, hogy 0.98-nál nagyobb legyen a valószínűsége annak, hogy legalább egyszer dupla hatost dobunk?

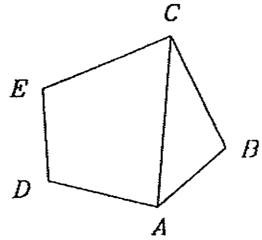
130. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy szabályos kockát
a) 30-szor feldobva pontosan 3-szor dobunk négyest?
b) $5k$-szor feldobva pontosan k-szor dobunk négyest?

131. Mennyi a valószínűsége annak, hogy három kockával kétszer dobva mindkét esetben ugyanazt az eredményt kapjuk, ha a kockák
a) megkülönböztethetők?
b) nem különböztethetők meg?

132. Egy kockával n-szer dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy nem dobjuk kétszer egymás után ugyanazt a számot?

133. Egy vizsgára való felkészüléskor 35 hallgató mindegyike megtanult a 35 tétel közül 34-et úgy, hogy mindegyik tételt pontosan egy hallgató nem tudja. Mennyi a valószínűsége, hogy a vizsgán (ahol mindenki egy tételből felel) senki sem húzza azt, amit nem tud, ha
a) a kihúzott tételeket nem keverjük vissza?
b) a kihúzott tételeket visszakeverjük?

134. Egy országban az A, B, C, D, E pontok között az ábrán látható úthálózat van kiépítve. Egy adott téli napon minden egyes útszakaszon p valószínűséggel hóakadály van, a többi útszakasz állapotától függetlenül. Mennyi a valószínűsége, hogy egy adott napon el lehet jutni
a) A-ból E-be? b) B-ből E-be?



135. Valaki berakta az útlevelét n fiók közül valamelyikbe, de elfelejtette, melyikbe. Utazás előtt idegesen keresni kezdi. Annak valószínűsége, hogy kihúzva azt a fiókot, amelyikben az útlevél van, azt meg is találja, α. Mennyi a valószínűsége, hogy

a) az útlevelet az először kihúzott fiókban megtalálja?
b) ha az először kihúzott fiókban nem találta, akkor az nincs is ott?
c) több, mint kétszer kell a fiókokat végignézni ahhoz, hogy megtalálja?

136. Tíz golyót osztunk el egyenként öt dobozba úgy, hogy mindegyik dobozt egyenlő valószínűséggel választhatjuk mindegyik golyó elhelyezésekor. Mennyi a valószínűsége, hogy az első dobozba négy golyó kerül?

137. Egy n kulcsot tartalmazó kulcscsomóval próbálunk egy zárat kinyitni. A kulcsok közül pontosan egy nyitja a zárat. Mennyi a valószínűsége annak, hogy épp a k-adik fogja nyitni, ha
a) félretesszük azokat, amelyek nem nyitották?
b) nem tesszük félre azokat, amelyek eddig nem nyitották?
(Adjunk más úton megoldást, mint a **39.** feladatban.)

138. Egy szabályos kockát n-szer feldobtunk. Az n dobásból k-szor dobtunk egyest. Mennyi a valószínűsége, hogy az i-edik dobás eredménye egyes volt?

139.* Egy távközlési csatornán 0.002 valószínűséggel torzul el egy jel. Mennyi a valószínűsége, hogy 1500 jelet továbbítva legfeljebb két jel torzul el?

140. Egy zuhogón való áthaladáskor a kajak p_1 valószínűséggel nem sérül meg, p_2 valószínűséggel jelentősen megsérül, p_3 valószínűséggel tönkremegy ($p_1 + p_2 + p_3) = 1$). Mennyi a valószínűsége, hogy n átkelés után a kajak nem megy tönkre, ha két jelentős sérülés már egyenértékű a tönkremenéssel?

141. Tekintsük a **119.** feladatot. Mennyi a valószínűsége, hogy tíz embert egymástól függetlenül megvizsgálva, mindegyiknél helyes lesz a diagnózis?

142.* Egy üzemben 10 gépen gyártanak egyforma alkatrészeket, mindegyiken ugyanannyit. Az első két gépnél együttvéve 3% a selejt, a következő öt gépnél együttvéve 1.5% , a többinél együttvéve 1% . Az egy helyen gyűjtött alkatrészek közül
a) egyet kiveszünk. Mennyi a valószínűsége, hogy selejtes?
b) ötöt kiveszünk. Mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb az egyik selejtes?

143. Egy dobozban négy papírlapon a következő számhármasok állnak: (0,0,0), (0,1,1), (1,0,1), ill. (1,1,0). Húzzunk ki egy lapot. Feltesszük, mindegyik egyforma valószínűséggel húzható. Jelentse A_i azt az eseményt, hogy a kihúzott lapon az i-edik számjegy egyes ($i = 1, 2, 3$). Mutassuk meg, hogy az A_i események páronként függetlenek, teljesen azonban nem!

144. Egy dobozban 15 fehér, 18 fekete és 20 piros golyó van. Addig húzunk visszatevés nélkül, amíg pirosat nem húzunk. Számítsuk ki a következő valószínűségeket:
a) 3 fekete és 5 fehér golyót húztunk.
b) egyetlen fehéret sem húztunk ki .
c) összesen 13 golyót húztunk ki.

145. a) Mennyi a valószínűsége, hogy egy 5 cm átmérőjű labdát egy négyzetháló alakú rácson a rács érintése nélkül átdobunk, ha a négyzetek oldala 8 cm, a drót vastagsága nullának vehető, és a labdával nem célzott dobásokat végzünk?

b) Hány dobás kell ahhoz, hogy annak a valószínűsége, hogy a labda legalább egyszer simán átmegy, nagyobb legyen, mint annak, hogy egyszer sem?

Néha nem vagyunk biztosak abban, hogy egy feltehetően geometriai valószínűségre visszavezethető feladatnál jól választottuk-e meg a tartományokat. Az ilyen feladatokat másképp is megoldhatjuk.

146. Oldjuk meg a teljes valószínűség tételének felhasználásával azt a feladatot, hogy ha találomra választunk két számot a [0;1] intervallumon, mennyi lesz annak valószínűsége, hogy ezek legfeljebb 0.1-del térnek el egymástól!

147. A [0;2] intervallumon választunk egy számot, majd egy nála kisebbet. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kettő összege kisebb, mint három?

148.* Oldjuk meg a teljes valószínűség tételének felhasználásával a **90.** a) feladatot.

33. fejezet

Valószínűségi változók

Alapfogalmak

D 33.1 A valós értékű ξ függvényt **valószínűségi változónak** nevezzük, ha értelmezési tartománya egy eseménytér, és bármely valós x-re értelmezve van a $P(\xi < x)$ valószínűség.

D 33.2 Az $F_\xi(x) = P(\xi < x)$ egyenlőséggel definiált függvényt a ξ valószínűségi változó **eloszlásfüggvényének** nevezzük.

T 33.3 Tetszőleges valószínűségi változó eloszlásfüggvényére érvényesek az alábbiak:
a) $\lim_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0$ és $\lim_{x\to\infty} F_\xi(x) = 1$.
b) $F_\xi(x)$ monoton nő (így minden pontban létezik jobb oldali határértéke), és minden pontban balról folytonos.
c) $P(a \le \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a)$,
$P(\xi = x_0) = \lim_{x\to x_0+0} F_\xi(x) \quad - F_\xi(x_0)$.

D 33.4 A ξ valószínűségi változót **diszkrétnek** (vagy **diszkrét eloszlásúnak**) nevezzük, ha értékkészlete egy $[x_1, x_2, ..., x_n]$ véges sorozat vagy egy olyan $[x_1, ..., x_n, ...]$ végtelen sorozat, amelynek egyetlen eleme sem torlódási helye ennek a sorozatnak.

A diszkrét valószínűségi változó összes lehetséges értékéhez tartozó $[P(\xi = x_k), k = 1, 2, ...]$ számsorozatot a valószínűségi változó **valószínűségeloszlásának** nevezzük. Nyilvánvaló, hogy $\sum_k P(\xi = x_k) = 1$.

D 33.5 A ξ valószínűségi változót **folytonosnak** (vagy **folytonos eloszlásúnak**) nevezzük, ha megadható olyan egyváltozós valós f_ξ függvény, amely mindenütt nemnegatív, bármely véges intervallumon legfeljebb véges sok pont kivételével folytonos, és amellyel ξ eloszlásfüggvénye kifejezhető

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt$$

alakban. Ezt a f_ξ függvényt a ξ valószínűségi változó **sűrűségfüggvényének** nevezzük.

T 33.6 Folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye folytonos. Ha F és f egy folytonos valószínűségi változó eloszlás-, ill. sűrűségfüggvénye, akkor
a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 ,$$

b) ha x_0-ban F differenciálható, akkor $F'(x_0) = f(x_0)$.

D 33.7 A ξ valószínűségi változót **kevert eloszlásúnak** nevezzük, ha

a) azok a valós számok, amelyeket ξ pozitív valószínűséggel vehet fel, vagy egy $[x_1, ..., x_n]$ véges sorozatot alkotnak, vagy egy olyan $[x_1, ..., x_n, ...]$ végtelen sorozatot, amelynek egyetlen eleme sem torlódási helye a sorozatnak;
b) fennáll a $\sum_k P(\xi = x_k) < 1$ egyenlőtlenség;
c) megadható egy olyan egyváltozós nemnegatív f_ξ függvény, amely bármely véges intervallumon legfeljebb véges számú hely kivételével folytonos, és amellyel ξ eloszlásfüggvénye

$$F_\xi(x) = \sum_{x_k < x} P(\xi = x_k) + \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt$$

alakban írható fel.
(Ilyen valószínűségi változókkal csak néhány kivételes esetben foglalkozunk.)

D 33.8 Ha a ξ és η valószínűségi változók között fennáll egy $\eta = t(\xi)$ függvénykapcsolat, amelyben t egyváltozós valós függvény, akkor azt mondjuk, hogy az η valószínűségi változó a ξ-nek t-vel való **transzformáltja**.

T 33.9
a) Ha ξ diszkrét eloszlású valószínűségi változó, és $\eta = t(\xi)$, ahol η szintén diszkrét, akkor

$$P(t(\xi) = y_i) = \sum_{\substack{k \\ t(x_k)=y_i}} P(\xi = x_k) .$$

b) Ha ξ folytonos eloszlású valószínűségi változó, és $\eta = t(\xi)$, ahol η szintén folytonos, és t szigorúan monoton, differenciálható függvény, akkor u-val jelölve t (szintén monoton és differenciálható) inverzét:

$$f_\eta(y) = f_\xi(u(y)) \cdot |u'(x)| .$$

A továbbiakban az eloszlás-, ill. sűrűségfüggvény mellett a ξ, η, stb. jelet csak akkor tüntetjük fel, ha nem nyilvánvaló, hogy melyik valószínűségi változó eloszlás-, ill. sűrűségfüggvényéről van szó.

Feladatok

1.* Mutassuk meg, hogy ha F a ξ eloszlásfüggvénye, akkor fennállnak a következő egyenlőségek ($a < b$):
a) $P(a \le \xi \le b) = F(b) - F(a) + P(\xi = b)$,
b) $P(a < \xi < b) = F(b) - F(a) - P(\xi = a)$,
c) $P(a < \xi \le b) = F(b) - F(a) - P(\xi = a) + P(\xi = b)$.

2.* Legyen $0 < p < 1$ és $q = 1 - p$. Alkothatnak-e a q, pq, p^2q,..., $p^{k-1}q$,... számok valószínűségeloszlást?

3.* Legyenek ξ lehetséges értékei $-3, -2, -1, 1, 2$, rendre 0.2, 0.15, 0.2, 0.15, 0.3 valószínűségekkel. Mik lesznek η lehetséges értékei és milyen valószínűségekkel, ha

a) $\eta = 2\xi + 3$, c) $\eta = \xi^2$,
b) $\eta = -\xi + 1$, d) $\eta = \xi^2 - 3\xi$.

4. Legyenek ξ lehetséges értékei a pozitív egész számok, és a hozzájuk tartozó valószínűségek $P(\xi = i) = p_i$ $(i = 1, 2, \dots)$. Határozzuk meg η lehetséges értékeit és valószínűségeloszlását, ha

   a) $\eta = (-1)^\xi$ és $p_i = \frac{2}{3^i}$, c) $\eta = \xi^2$,

   b) $\eta = \xi - 3\mathrm{Ent}\frac{\xi}{3}$ és $p_i = \frac{1}{2^i}$, d) $\eta = 2\xi + 3$,

   e) $\eta = \{\xi\}$, ahol $\{x\}$ jelenti x törtrészét, (azaz $\{x\} = x - \mathrm{Ent}\, x$).

5.* Legyenek a ξ lehetséges értékei a pozitív egész számok, $P(\xi = k) = kd^k$ valószínűségekkel. Mennyi a d?

6. Legyenek a ξ valószínűségi változó lehetséges értékei -2, -1, 0, 1, és a hozzájuk tartozó valószínűségek rendre 0.25, 0.2, 0.35, t.

   a) Adjuk meg t értékét!

   b) Adjuk meg az $\eta = \xi^2 + \xi + 1$ egyenlőséggel definiált valószínűségi változó valószínűségeloszlását!

   c) Adjuk meg η eloszlásfüggvényét!

7.* Legyen a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le -1 , \\ 1/4, & \text{ha } -1 < x \le 0 , \\ 1/3, & \text{ha } 0 < x \le 1 , \\ 5/6, & \text{ha } 1 < x \le 2 , \\ 1, & \text{ha } 2 < x . \end{cases}$$

   Adjuk meg ξ valószínűségeloszlását, és határozzuk meg a következő valószínűségeket:

   a) $P(\xi < 0.5)$, c) $P(\xi \ge 1)$,

   b) $P(-0.5 \le \xi \le 1)$, d) $P(0 < \xi < 2)$.

8. Két kockával dobunk. A dobott számok összege valószínűségi változó. Határozzuk meg ennek valószínűségeloszlását, és írjuk fel eloszlásfüggvényét!

9.* Egy dobozban hat cédula van, egytől hatig megszámozva. Kihúzunk hármat. ξ értéke legyen a legkisebb kihúzott szám. Írjuk fel ξ eloszlásfüggvényét!

10. Egytől tízig számozott cédulák közül kihúzunk ötöt. A ξ valószínűségi változó értéke a legnagyobb kihúzott szám. Írjuk fel ξ eloszlásfüggvényét!

11. Szabályos dobókockával dobunk háromszor. Jelentse ξ a legkisebb dobott számot. Írjuk fel ξ eloszlásfüggvényét!

12. Egy szabályos pénzérmével négyszer dobunk. Legyen ξ értéke a fejdobások száma. Írjuk fel ξ eloszlásfüggvényét!

13. Egy kockával addig dobunk, amíg négyest nem kapunk. Jelentse ξ a dobások számát, ha az utolsó dobást is beszámítjuk. Írjuk fel ξ valószínűségeloszlását!

14. Egy szabályos pénzérmét n-szer feldobunk. ξ értéke legyen a fej-írás dobások számának eltérése. Adjuk meg ξ valószínűségeloszlását, ha

   a) $n = 3$, b) $n = 8$.

15. Válasszunk véletlenszerűen két számot a $[0, 1]$ intervallumból, a-t és b-t. Legyen ξ értéke a $q(x) = x^2 + ax + b$ polinom különböző valós gyökeinek a száma. Írjuk fel ξ eloszlásfüggvényét!

16. Tegyük fel, hogy egy étteremben a vendégek ebédidőben eltöltött idejét percekben mérve a következő eloszlásfüggvény jellemzi:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{ha } x<0\,,\\ \frac{x}{60}, & \text{ha } 0<x\le 30\,,\\ \frac{1}{2}, & \text{ha } 30<x\le 60\,,\\ \frac{x}{120}, & \text{ha } 60<x\le 120\,,\\ 1, & \text{ha } 120<x\,.\end{cases}$$

Mennyi a valószínűsége, hogy egy vendég az étteremben
a) 45 percnél tovább marad?
b) 1 óránál többet, de másfél óránál kevesebbet tölt el?

17. Legyen a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{ha } x\le 1\,,\\ (x-1)^2, & \text{ha } 1<x\le \frac{3}{2}\,,\\ \frac{3}{10}x-\frac{1}{5}, & \text{ha } \frac{3}{2}<x\le 4\,,\\ 1, & \text{ha } 4<x\,.\end{cases}$$

Mennyivel lesznek egyenlők a következő valószínűségek:
a) $P(\xi\le 1.2)$, c) $P(1.8\le\xi\le 4.1)$,
b) $P(0.8<\xi<1.5)$, d) $P(4<\xi<8)$.

18. Egy ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye legyen

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{ha } x\le 0\,,\\ \frac{x}{2}, & \text{ha } 0<x\le 1\,,\\ \frac{2}{3}, & \text{ha } 1<x\le 2\,,\\ \frac{11}{12}, & \text{ha } 2<x\le 3,\\ 1, & \text{ha } 3<x\,.\end{cases}$$

Számítsuk ki a következő valószínűségeket:
a) $P(\xi=1)$, c) $P(\xi=3)$,
b) $P(2<\xi\le 4)$, d) $P(\xi>\frac{1}{2})$.
Az eloszlásfüggvény tulajdonságait ismerve nem okoz nehézséget, hogy ez a ξ kivételesen egy kevert eloszlású valószínűségi változó.

19.* Az A, B, C állandók mely értékeire lesz az F függvény eloszlásfüggvény, ha
a)

$$F(x)=A+B\,\mathrm{arctg}x\ ,$$

b)

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{ha } x\le A\,,\\ B+Cxe^{-x}, & \text{ha } x>A\,.\end{cases}$$

20.* Legyen egy ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{ha } x<1\,,\\ A+\frac{B}{x+1}, & \text{ha } x\ge 1\,.\end{cases}$$

a) Mennyi A és B értéke?
b) Mennyi $P(10\le\xi\le 14)$?

c) Mennyi $P(0.3 \le \xi \le 4)$?

21. Válasszunk a $[0,1]$ intervallumban véletlenszerűen két számot, x-et és y-t. Írjuk fel η eloszlásfüggvényét , ha

a) $\eta = x + y$, d) $\eta = (x-y)^2$,
b) $\eta = \max(x,y)$, e) $\eta = x - y$.
c) $\eta = \min(x,y)$,

22. Egységnyi oldalú négyzet két átellenes oldalán választunk véletelenszerűen egy-egy pontot. Ezek távolsága valószínűségi változó. Írjuk fel az eloszlásfüggvényét!

23. Egy villanyóra mutatója percenként ugrik egyet. Véletlenszerűen ránézünk az órára. Jelentse ξ a következő mutatóugrásig eltelt időt, percben mérve. Írjuk fel ξ eloszlásfüggvényét!

24. Egy négyzetben, amelynek oldala 3 hosszúságú, véletlenszerűen választunk egy pontot. Írjuk fel ξ eloszlásfüggvényét, ha ξ a pont távolsága

a) egy rögzített oldaltól!
b) a hozzá legközelebbi oldaltól!
c) a négyzet középpontjától!
d) az egyik rögzített csúcstól!

25. Válasszunk a $[0,a]$ intervallumon véletlenszerűen, egymástól függetlenül három számot, legyenek ezek x, y, z. Írjuk fel a $\xi = x + y + z$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét!

26.* Legyen a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0 , \\ x, & \text{ha } 0 < x \le 1 , \\ 1, & \text{ha } 1 < x . \end{cases}$$

Írjuk fel η eloszlásfüggvényét, ha

a) $\eta = 3\xi + 2$, d) $\eta = \mathrm{tg}\pi(\xi - \frac{1}{2})$,
b) $\eta = \sqrt{\xi}$, e) $\eta = \frac{1}{\xi}$,
c) $\eta = 1 + \sin(\frac{\pi}{2}\xi)$, f) $\eta = \frac{1}{2} - \xi^2$.

27. Legyen a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 1 , \\ \frac{x-1}{3}, & \text{ha } 1 < x \le 4 , \\ 1, & \text{ha } 4 < x . \end{cases}$$

Írjuk fel $\eta = \sqrt{\xi} + 3$ eloszlásfüggvényét!

28.* A következő függvények közül melyik lehet sűrűségfüggvény :

a)

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } 0 < x < 1 , \\ 2 - x, & \text{ha } 1 < x < 2 , \\ 0 & \text{különben} . \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} |1 - x|, & \text{ha } 0 < x < 2 , \\ 0 & \text{különben} . \end{cases}$$

29. A ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} A + Bx, & \text{ha } x \in (0,1]\,, \\ 0, & \text{ha } x \notin (0,1]\,. \end{cases}$$

Határozzuk meg A-t, B-t, és írjuk fel ξ eloszlásfüggvényét!

30. Írjuk fel ξ eloszlásfüggvényét, ha sűrűségfüggvénye

a) $f(x) = \begin{cases} 1 - |1 - x|, & \text{ha } 0 < x < 2\,, \\ 0 & \text{különben}\,. \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(2x-1)^2}, & \text{ha } |x| > 1\,, \\ \frac{x^2}{2}, & \text{ha } |x| < 1\,. \end{cases}$

31.* A [0,1] intervallumon válasszunk egymástól függetlenül két számot, x-et és y-t. Legyen a ξ valószínűségi változó értéke $|x - y|$. Írjuk fel ξ sűrűségfüggvényét!

32. Válasszunk véletlenszerűen egy P pontot az $x^2+(y-a)^2 = a^2$ $(a > 0)$ egyenletű körvonalon (azaz, annak valószínűsége, hogy a pont egy adott körívre esik, legyen arányos a körív hosszával). A kör középpontját a P ponttal összekötő egyenes és az x-tengely metszéspontja legyen $A = (\xi, 0)$. Határozzuk meg ξ eloszlás- és sűrűségfüggvényét!

33. Legyen ξ sűrűségfüggvénye

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0\,. \end{cases}$$

Határozzuk meg az $\eta = e^{-\xi}$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét!

34. Legyen ξ eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0\,, \\ 1 - \cos x, & \text{ha } 0 < x \le \frac{\pi}{2}\,, \\ 1, & \text{ha } \frac{\pi}{2} < x\,. \end{cases}$$

Írjuk fel az $\eta = 2\xi + 1$ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!

35.* Legyen ξ eloszlásfüggvénye

$$F_\xi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x\,.$$

a) Írjuk fel ξ sűrűségfüggvényét!
b) Írjuk fel az $\eta = 2\xi^3+1$ valószínűségi változó eloszlás- és sűrűségfüggvényét!
c) Írjuk fel a $\gamma = e^\xi + 1$ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!

36. Legyen ξ eloszlásfüggvénye

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 1\,, \\ 1 - e^{(1-x)}, & \text{ha } x > 1\,. \end{cases}$$

Írjuk fel $\eta = \frac{1}{\xi}$ eloszlás- és sűrűségfüggvényét!

37.* Legyen a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0, \\ x, & \text{ha } 0 < x \le 1\,, \\ 1, & \text{ha } 1 < x\,. \end{cases}$$

Legyen G tetszőleges olyan eloszlásfüggvény, amely az (a,b) véges vagy végtelen intervallumon szigorúan monoton nő, folytonos, $\lim_{x\to a+0} G(x) = 0$ és $\lim_{x\to b-0} G(x) = 1$. Jelölje γ az (a,b) intervallumra korlátozott G inverzfüggvényét. Legyen $\eta = \gamma(\xi)$. Írjuk fel η eloszlásfüggvényét!

38.* Legyen ξ tetszőleges olyan folytonos valószínűségi változó, amely az (a,b) véges vagy végtelen intervallumon vehet fel értékeket. Legyen $\eta = F_\xi(\xi)$, azaz a transzformációfüggvény legyen ξ saját eloszlásfüggvénye. Írjuk fel η eloszlásfüggvényét!

Várható érték, szórás, Markov- és Csebisev egyenlőtlenség

D 33.10 Legyenek a ξ valószínűségi változó lehetséges értékei $[x_i, i = 1,2,\ldots]$ (véges vagy végtelen sorozat), és $P(\xi = x_i) = p_i$.

A ξ **várható értékén** az

$$M(\xi) = \sum_i x_i p_i$$

összeget értjük, feltéve, hogy a $\sum_i |x_i| p_i$ összeg létezik. Ha ez utóbbi összeg nem létezik, a valószínűségi változó várható értékét nem értelmezzük. (Látjuk, véges értékkészletű valószínűségi változónak mindig van várható értéke.)

D 33.11 Legyen ξ folytonos valószínűségi változó f sűrűségfüggvénnyel. ξ **várható értékén** az

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

értéket értjük, feltéve, hogy ez létezik. Ha az integrál nem létezik, ξ várható értékét nem értelmezzük.

T 33.12 A ξ valószínűségi változó $\eta = g(\xi)$ transzformáltjának várható értéke:

Ha ξ diszkrét valószínűségi változó $[x_1, x_2, \ldots]$ értékkészlettel, akkor $M(\eta) = \sum_i g(x_i) P(\xi = x_i)$, feltéve, hogy ez az összeg abszolút konvergens;

Ha ξ folytonos valószínűségi változó f sűrűségfüggvénnyel, g pedig folytonos, és véges sok hely kivételével differenciálható függvény, akkor $M(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$, feltéve, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| f(x) dx$ is létezik.

Speciálisan, ha a ξ valószínűségi változónak van várható értéke, akkor a tetszőleges valós a és c konstansokkal képezett $\eta = a\xi + c$ valószínűségi változónak is van, és

$$M(a\xi + c) = aM(\xi) + c\,.$$

T 33.13 (Markov egyenlőtlenség) Ha egy nemnegatív értékű ξ valószínűségi változónak van várható értéke, akkor tetszőleges r pozitív számra

$$P(\xi \geq r) \leq \frac{M(\xi)}{r}\,.$$

D 33.14 A ξ valószínűségi változó **szórásának** nevezzük a

$$D(\xi) = \sqrt{M((\xi - M(\xi))^2)}$$

értéket, feltéve, hogy a gyökjel alatti várható érték létezik. Ha ez nem létezik, a valószínűségi változó szórását nem értelmezzük.

T 33.15 Ha a ξ valószínűségi változó szórása létezik, akkor a tetszőleges a és c konstansokkal képezett $\eta = a\xi + c$ valószínűségi változó szórása is létezik, és

$$D(a\xi + c) = |a| D(\xi) .$$

T 33.16 Ha a ξ valószínűségi változó szórása létezik, akkor

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) .$$

A számításoknál többnyire a szórásnak ezt a kiszámítási módját alkalmazzuk.

T 33.17 (Csebisev egyenlőtlenség) Ha a ξ valószínűségi változónak van szórása, akkor tetszőleges r pozitív számra

$$P(|\xi - M(\xi)| \geq r) \leq \frac{D^2(\xi)}{r^2} .$$

Feladatok

39.* A ξ valószínűségi változó lehetséges értékei: -1, 0, 2, 4, 6. Az ezekhez tartozó valószínűségek $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{11}{30}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$. Számítsuk ki ξ várható értékét és szórását!

40. Legyenek a ξ valószínűségi változó lehetséges értékei: -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5, és a hozzájuk tartozó valószínűségek 0.1, 0.15, 0.25, 0.13, 0.18, 0.19 . Számítsuk ki ξ várható értékét és szórását!

41. Legyenek ξ lehetséges értékei 1, 2, 3, és a megfelelő valószínűségek $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$. Mennyi lesz ξ várható értéke és szórása?

42. Két kockával dobunk. Számítsuk ki a dobott számok összegének várható értékét és szórását!

43.* Három kockával dobunk. Jelentse ξ a legnagyobb dobott számot. Írjuk fel ξ eloszlásfüggvényét, és számítsuk ki várható értékét és szórását!

44. Egy dobozban n cédula van, ezeken az egymástól különböző $x_1, x_2, \ldots, x_n$ valós számok szerepelnek. Egyet kihúzunk. Jelentse ξ a kihúzott számot. Mennyi lesz ξ várható értéke, ha a cédulákat egyenlő valószínűséggel húzzuk?

45. Egy kockával addig dobunk, amíg az addig dobott számok összege (az utolsót is beszámítva) el nem éri, vagy meg nem haladja a hatot. Mennyi lesz a dobások számának várható értéke?

46. Egy szabályos pénzérmét n-szer feldobunk. ξ értéke legyen a fej-írás dobások számának eltérése. Mennyi lesz ξ várható értéke, ha

a) $n = 3$? b) $n = 8$?

47.* Két személy, A és B a 32 lapos magyar kártyával játszik. Az asztalra tett csomagból felütnek 2 lapot. Ha ezek között van ász, A fizet B-nek 189 Ft-ot. Ha nincs ász, B fizet A-nak. Mennyit fizessen B, hogy a játék méltányos legyen?

48. Egy urnában 3 fehér, 5 fekete és 2 piros golyó van. Két játékos felváltva visszatevés nélkül húz egy-egy golyót. Az a játékos nyer, aki előbb húz fehéret, de ha valamelyikük elsőre, vagy csupa fekete húzás után pirosat húz, akkor a játék döntetlen. Ha a kezdő játékos győz, 43 Ft-ot kap. Mennyit fizessen a kezdő a másiknak annak győzelme esetén, hogy a játék méltányos legyen?

49. Módosítsuk az előző feladatot úgy, hogy bevonunk a játékba egy "bankot" is. A bank a győztesnek feleannyit fizet, mint a vesztes, és döntetlen esetén mindkettőtől ugyanannyit kap. Ha a kezdő a győztes, N Ft-ot kap összesen. Mekkora legyen a többi összeg, hogy a játék méltányos legyen?

50. Hárman játszanak. Mindegyikük húz egy lapot a 32 lapos magyar kártyából. Ha van közöttük piros, akkor A győz; ha nincs piros, de van zöld, akkor B; a többi esetben C. A győztesnek a másik kettő egyformán fizet. Milyen arányban legyenek a nyeremények, hogy a játék méltányos legyen?

51. Az üzemből kikerülő termékeket megfelelőnek és nem megfelelőnek minősítik. Két minősítési módszer között választhatnak. Az elsőnél egy termék minősítési költsége 13 Ft, és ez a módszer a jó termékek 5%-át hibásnak, a rosszak 8%-át viszont megfelelőnek minősíti. A második termékenkénti költsége 5.3Ft, és a jók 8%-át rossznak, a rosszak 15%-át jónak minősíti. Az eladott jó terméken 50Ft a nyereség, a kiselejtezett jón 200Ft a veszteség. Mivel az eladott rosszat garanciálisan jóra kell cserélni, és ez kezelési költséget –és presztízsveszteséget is– jelent, egy eladott rossz összességében 130Ft veszteséget jelent. (A kiselejtezett rossz termék esetén természetesen csak a minősítési költség számít, mert a rossz termék termelési vesztesége nem a minősítési módszertől függ). Melyik módszert válasszuk, ha a termékeknek
a) kb. 90%-a jó?
b) kb. 70%-a jó?
c) Érdemes-e egyáltalán minősíteni?

52. Legyen ξ diszkrét eloszlású valószínűségi változó $P(\xi = k) = p^{k-1}q$ $(k = 1, \dots, n)$ eloszlással, ahol $0 < p < 1$ és $q = \frac{p-1}{p^n - 1}$. Határozzuk meg ξ várható értékét!

53. Egy kockával addig dobunk, amíg hatost nem dobunk. Jelölje ξ a dobások számát az első hatosig úgy, hogy az utolsó dobást is beszámítjuk. Mennyi lesz ξ várható értéke és szórásnégyzete?

54. Egy n kulcsot tartalmazó kulcscsomóval próbálunk egy zárat kinyitni. A kulcsok közül pontosan egy nyitja a zárat. Előreláthatóan hányadik próbálkozásra sikerül kinyitni a zárat, ha
a) félretesszük azokat a kulcsokat, amelyek eddig nem nyitották?
b) nem tesszük félre azokat a kulcsokat, amelyek eddig nem nyitották?

55.* A ξ valószínűségi változó lehetséges értékei legyenek $1, -2, 3, -4, 5, \dots$. Van-e várható értéke, és szórása, ha
a) $P(|\xi| = k) = \frac{1}{k(k+1)}$, b) $P(|\xi| = k) = \frac{4}{k(k+1)(k+2)}$

56. Legyenek ξ lehetséges értékei $1, 2, \dots, n, \dots$, $P(\xi = k) = k(\frac{3-\sqrt{5}}{2})^k$ valószínűségekkel. Mennyi lesz ξ várható értéke?

57.* Legyenek ξ lehetséges értékei $1,2,\ldots,n,\ldots$ és a $P(\xi = k)$ valószínűségek egyenesen arányosak $\frac{1}{k^2}$-tel. Mennyi ξ várható értéke?

58. Legyen ξ sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{ha } 0 < x < \frac{1}{4}\ , \\ 0 & \text{különben}\ . \end{cases}$$

Határozzuk meg ξ eloszlásfüggvényét és várható értékét!

59. Milyen A értékre lehet az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{A}{1+x^2}, & \text{ha } 0 < x\ , \\ 0 & \text{különben}\ . \end{cases}$$

függvény sűrűségfüggvény? Mutassuk meg, hogy az ezzel a sűrűségfüggvénnyel jellemzett valószínűségi változónak nincs várható értéke!

60. Legyen ξ eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 1\ , \\ 1 - \frac{2}{x+1}, & \text{ha } 1 < x\ . \end{cases}$$

Mennyi lesz ξ várható értéke?

61. Mennyi lesz ξ várható értéke, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0\ , \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}, & \text{ha } 0 < x\ . \end{cases}$$

62. Válasszunk három számot véletlenszerűen, egymástól függetlenül a $[0, a]$ intervallumon. Legyenek ezek x, y, z. Számítsuk ki a $\xi = x+y+z$ valószínűségi változó várható értékét!

63.* Legyen a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} c(x + x^2), & \text{ha } 2 < x < 4\ , \\ 0 & \text{különben}\ . \end{cases}$$

a) Mennyi c értéke?
b) Számítsuk ki ξ szórását!

64. Számítsuk ki az

$$f(x) = \begin{cases} 2(x-1), & \text{ha } 1 \leq x < 2\ , \\ 0 & \text{különben}\ . \end{cases}$$

sűrűségfüggvényű valószínűségi változó várható értékét és szórását!

65. Számítsuk ki az

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 1\ , \\ e^{1-x}, & \text{ha } 1 \leq x\ . \end{cases}$$

sűrűségfüggvényű valószínűségi változó várható értékét és szórását!

66. Mennyi ξ várható értéke és szórása, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + x, & \text{ha } x \in (0, 1]\ , \\ 0 & \text{különben}\ . \end{cases}$$

67. A ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 1\,, \\ \frac{\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{\ln\sqrt{2}} + 1, & \text{ha } 1 < x\,. \end{cases}$$

a) Ellenőrizzük, hogy F valóban eloszlásfüggvény!
b) Számítsuk ki várható értékét és szórását!

68.• A ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 1\,, \\ 1 - \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}(1 + \ln\, x\sqrt[3]{x}), & \text{ha } 1 < x\,. \end{cases}$$

Számítsuk ki várható értékét és szórását!

69. Legyen ξ sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0\,, \\ \frac{1}{\varepsilon}, & \text{ha } 0 < x < \varepsilon\,, \\ 0, & \text{ha } \varepsilon < x\,, \end{cases}$$

ahol ε adott pozitív szám. Határozzuk meg ξ szórását!

70.• Legyen ξ sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{|x|}(x^2+1)} \cdot \frac{1}{8\sqrt{3}\pi}\,.$$

Van-e ξ-nek várható értéke és szórása?

71.• Legyen ξ eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq \frac{4}{\pi}\,, \\ 1 - \frac{16\sqrt{2}\sin\frac{1}{x}}{\pi^2 x^2}, & \text{ha } \frac{4}{\pi} < x\,. \end{cases}$$

a) Számítsuk ki ξ várható értékét!
b) Létezik-e ξ szórása?

72.* Bizonyítsuk be, a **T 33.12** tétel folytonos esetre vonatkozó állítását abban a speciális esetben, amikor az ottani g helyén egy monoton növekvő, differenciálható r függvény áll. Azaz, bizonyítsuk be, hogy ha a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye f és r monoton növekvő differenciálható függvény, akkor az $\eta = r(\xi)$ várható értéke:

$$M(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} r(x)f(x)d(x)\,.$$

73. Legyen ξ eloszlásfüggvénye

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq -a\,, \\ \frac{x+a}{2a}, & \text{ha } -a < x \leq a\,, \\ 1, & \text{ha } a < x\,. \end{cases}$$

a) Mennyi ξ várható értéke?
b) Mennyi lesz az $\eta = |\xi|$ valószínűségi változó várható értéke?

74. Egy számítógép javításának ideje órákban mérve olyan valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0.07, & \text{ha } 0 < x \le 0.1\ , \\ 0.47, & \text{ha } 0.1 < x \le 2\ , \\ 0.1, & \text{ha } 2 < x \le 3\ , \\ 0 & \text{különben}\ . \end{cases}$$

A javítás munkadíja $\eta = 200 + 240\sqrt{\xi}$ forint. Mennyi a javítás várható munkadíja?

75.* Legyen ξ eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 2\ , \\ \frac{x-2}{2}, & \text{ha } 2 < x \le 4\ , \\ 1, & \text{ha } 4 < x\ . \end{cases}$$

Számítsuk ki η várható értékét és szórását, ha

a) $\eta = 3\xi + 1$, b) $\eta = \xi^2 - 1$.

76. A ξ valószínűségi változó olyan, hogy $M(\xi) = 2$ és $M(\xi^2) = 8$. Mennyi lesz az $\eta = (2 + 4\xi)^2$ és a $\tau = \xi^2 + (\xi + 1)^2$ valószínűségi változók várható értéke?

77.* Egy kiállítóteremben szombatonként átlagosan 80 látogató fordul meg. Legfeljebb mennyi a valószínűsége, hogy egy adott szombaton legalább 100 látogató lesz?

78. Egy forgalmas helyen a közlekedésijegy-árus naponta átlagosan 400 jegyet ad el. Legalább mennyi a valószínűsége annak, hogy ha 600 jegy van nála, akkor az aznapra elég lesz?

79. Egy parkolóban, ahol óránként 40 Ft-ot kell fizetni, általában 60 kocsi áll egyszerre. Ha a parkoló elég nagy, legfeljebb mennyi a valószínűsége annak, hogy reggel 8 és du. 5 óra között a bevétel legalább 40000 Ft lesz?

80.* A ξ valószínűségi változóról csak annyit tudunk,hogy várható értéke 20, szórása 10. Mit mondhatunk a $P(1 < \xi < 35)$ valószínűségről?

81. Egy professzor a múlt tapasztalatai alapján tudja, hogy az írásbeli vizsgán a hallgatók átlagosan a pontszám 75%-át érik el.

a) Adjunk felső becslést arra a valószínűségre, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott dolgozat pontszáma legalább 85%!

b) Tegyük fel, a professzor azt is tudja, hogy a dolgozatok pontszámainak szórása hozzávetőlegesen a pontszámok 15%-a. Milyen becslést tudunk adni arra a valószínűségre, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott dolgozat pontszáma 55% és 95% között lesz?

82. Egy gyár egy részlegében egy automata apró szögeket csomagol. Egy csomagban a szögek száma valószínűségi változó, várható értéke 4000, szórása 20. Legalább mennyi a valószínűsége, hogy egy csomagban a szögek száma a várható értéktől 50-nél kevesebbel tér el?

83. Legyen ξ egy valószínűségi változó, amelynek létezik szórása. Jelöljük $d(\xi)$-vel ξ várható eltérését saját várható értékétől, azaz legyen $d(\xi) = M(|\xi - M(\xi)|)$. Bizonyítsuk be, hogy $0 \le d(\xi) \le D(\xi)$.

Fontosabb eloszlástípusok

D 33.18 A ξ valószínűségi változót (n, p) paraméterű **binomiális eloszlásúnak** nevezzük, ha értékkészlete valamely

$$\{0, 1, ..., n\}$$

számhalmaz, ahol n pozitív egész, és

$$P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, ..., n,$$

ahol $0 < p < 1$ és $q = 1 - p$.

T 33.19 Ha ξ egy (n, p) paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó, akkor

$$M(\xi) = np \quad \text{és} \quad D^2(\xi) = npq .$$

D 33.20 A ξ valószínűségi változót (n, N, M) paraméterű **hipergeometriai eloszlásúnak** nevezzük, ha értékkészlete valamely

$$\{0, 1, ..., n\}$$

számhalmaz, ahol n pozitív egész, és

$$P(\xi = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad k = 0, 1, ..., n .$$

ahol N, M olyan pozitív egészek, amelyekre $n \leq N$ és $n \leq N - M$.

T 33.21 Ha ξ egy (n, N, M) paraméterű hipergeometriai valószínűségi változó, akkor

$$M(\xi) = n\frac{M}{N} \quad \text{és} \quad D^2(\xi) = n\frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1} .$$

D 33.22 A ξ valószínűségi változót λ paraméterű **Poisson-eloszlásúnak** nevezzük, ha értékkészlete a nemnegatív egész számok halmaza, és

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},$$

ahol $\lambda > 0$.

T 33.23 Ha ξ egy λ paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változó, akkor

$$M(\xi) = \lambda \quad \text{és} \quad D^2(\xi) = \lambda .$$

D 33.24 A ξ folytonos valószínűségi valtozót az (a, b) (nyílt vagy zárt) intervallumon egyenletes eloszlásúnak nevezzük, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{ha } x \in (a, b), \\ 0 & \text{különben} . \end{cases}$$

T 33.25 Ha ξ egyenletes eloszlású az (a, b) intervallumon, akkor

$$M(\xi) = \frac{a+b}{2} \quad \text{és} \quad D^2(\xi) = \frac{(b-a)^2}{12} .$$

D 33.26 A ξ valószínűségi változót (m,σ) paraméterű **normális eloszlásúnak** nevezzük, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

ahol $\sigma > 0$. Az ilyen ξ eloszlását $N(m,\sigma)$-val jelöljük. Az $N(0,1)$ eloszlású valószínűségi változót **standard normális eloszlásúnak** nevezzük.

T 33.27 Ha a ξ valószínűségi változó $N(m,\sigma)$ eloszlású, akkor

$$M(\xi) = m \quad \text{és} \quad D^2(\xi) = \sigma^2 .$$

Ha egy $N(m,\sigma)$ eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvényét F-fel és a standard normális eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvényét Φ-vel jelöljük, akkor

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) \quad \text{és} \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x) .$$

D 33.28 A ξ folytonos valószínűségi változót λ paraméterű **exponenciális eloszlású** valószínűségi változónak nevezzük, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } 0 < x, \end{cases}$$

ahol $\lambda > 0$.

T 33.29 Ha ξ egy λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó , akkor

$$M(\xi) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{és} \quad D^2(\xi) = \frac{1}{\lambda}$$

Ha ξ exponenciális eloszlású valószínűségi változó, akkor tetszőleges $x, y > 0$ esetén

$$P(\xi \geq x + y | \xi \geq x) = P(\xi \geq y) .$$

(Ez utóbbi egyenlőséget az exponenciális eloszlású valószínűségi változó definiciójának is tekinthetjük; ekkor a fenti alakú sűrűségfüggvényt ebből vezetjük le.)

D 33.30 A ξ folytonos valószínűségi változót c, α paraméterű **Weibull eloszlásúnak** nevezzük, ha eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0 , \\ 1 - e^{-cx^\alpha}, & \text{ha } 0 < x , \end{cases}$$

ahol $c > 0$ és $\alpha > 0$.

T 33.31 Ha a ξ valószínűségi változó Weibull eloszlású, akkor

$$M(\xi) = \left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)$$

$$D^2(\xi) = \left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{2}{\alpha}} \left(\Gamma\left(\frac{2}{\alpha} + 1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)\right)$$

Számításaink közben gyakran jól alkalmazhatjuk a következő közelítő értéket, amelyet **Stirling formulának** hívnak:

$$n! \approx n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi} .$$

T 33.32 (A nagy számok Bernoulli féle tétele) Legyen K egy kísérlet és A az ehhez a kísérlethez tartozó valamelyik esemény. Jelölje p az A esemény valószínűségét, q_n pedig azt, hogy a K kísérlet n számú egymástól független végrehajtása során az A esemény hányszor következett be. Ekkor bármely pozitív ε-ra

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|\frac{q_n}{n} - p| > \varepsilon\right) = 0 .$$

M 33.33 A nagy számok tételének bizonyítása közben a Csebisev egyenlőtlenséget a tétel jelöléseivel a következő alakba írjuk:

$$(1) \qquad P\left(|\frac{q_n}{n} - p| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} .$$

Mivel azonban az A esemény valószínűségét többnyire nem ismerjük (általában éppen ennek becslésére végezzük a kísérletet), az alkalmazásoknál a $0 \leq p \leq 1$ esetén fennálló $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ egyenlőtlenséget felhasználva a kissé gyengébb

$$(2) \qquad P\left(|\frac{q_n}{n} - p| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

formulát használjuk.

T 33.34 a) Legyenek k, n állandó egészek, $0 \leq k \leq n$ és legyen $\frac{M}{N} = p$ állandó. Ekkor

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} .$$

b) Legyen k rögzített nemnegatív egész, és legyen $np = \lambda$ állandó. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} .$$

A konvergencia gyors, ha p vagy $1-p$ közel van a nullához.

c) A Stirling formula segítségével bizonyítható, hogy elég nagy n esetén

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)}} .$$

A közelítés annál jobb, minél közelebb van p az $\frac{1}{2}$-hez.

M 33.35 1) A fenti tétel alapján egy (n, N, M) paraméterű hipergeometriai eloszlású valószínűségi változó eloszlása abban az esetben jól közelíthető egy binomiális eloszlású $p = \frac{M}{N}$ paraméterű változó eloszlásával, ha n igen kicsi N-hez, k pedig igen kicsi M-hez képest, azaz abban az esetben, ha

$$\frac{M}{N} \approx \frac{M-k}{N-k} \approx \frac{M-k}{N-n} .$$

2) Egy (n, p) paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó eloszlása pedig jól közelíthető egy $\lambda = np$ paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változó eloszlásával, ha np igen kicsi n-hez képest, azaz, ha a valószínűségi változónak a vizsgálat tárgyát képező, és ésszerűen figyelembe vehető (azaz a várható értékhez közeli) értékeihez képest a lehetséges legnagyobb értéke olyan nagy, hogy szinte "végtelennek" tekinthető.

3) A fenti tétel c) pontja alapján egy (n, p) paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változóhoz tartozó $P(\xi = k)$ valószínűségek akkor közelíthetők jól egy $m = np$ és $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ paraméterű normális eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvényének

helyettesítési értékeivel, ha n elég nagy, és ξ eloszlása a várható értékéhez viszonyítva "meglehetősen szimmetrikus". (A gyakorlatban a közelítést nem használják, ha $np < 5$).

M 33.36 1) A Poisson eloszlást jól közelítő valószínűségi változók között a legtipikusabbak: Adott idő alatt egy kiszolgáló egységhez érkező ügyfelek száma, ha az ügyfelek egymástól függetlenül érkeznek; pontszerű hibák száma valamely anyagban; stb. Természetesen ezek nem követhetik tökéletesen az adott eloszlást, hiszen bármekkora is λ, a Poisson-eloszlás szerinti $P(\xi = k)$ valószínűség pozitív minden k-ra, pedig nyilván nulla annak a valószínűsége, hogy pl. egy üzletben egy nap alatt tízmillió ember fordul meg. De azokra az értékekre, amelyekre ésszerű kérdéseket teszünk fel, a Poisson- és a tényleges eloszlással adódott valószínűségek közötti eltérés olyan csekély, hogy elhanyagolhatjuk. Tegyük fel pl., hogy egy λ paraméterű Poisson eloszlásúnak feltételezett ξ valószínűségi változó legnagyobb értelmezhető értéke N. Ekkor számításaink során a $\xi > N$ esemény a valóságban lehetetlen, bár a Poisson eloszlás a $P(\xi > N) > 0$ valószínűséggel számol. Becsüljük meg ezt az értéket az e^x függvény Taylor polinomjának Lagrange-féle maradéktagjával: a $(0; \lambda)$ intervallumba eső valamely s értékre

$$P(\xi > N) = \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \le e^{-\lambda} \frac{e^s}{(N+1)!} \lambda^{N+1} \le$$

$$\le e^{-\lambda} e^{\lambda} \frac{\lambda^{N+1}}{(N+1)!} = \frac{\lambda^{N+1}}{(N+1)!}$$

Ez az érték pl. $\lambda = 50$ és $N = 250$ esetén kisebb, mint 10^{-50}. Ha N nagy, pl. $N > 30$ és $\frac{\lambda}{N+1} < 0.5$ a Stirling formulával becsülhetünk:

$$\frac{\lambda^{N+1}}{(N+1)!} \approx \left(\frac{\lambda e}{N+1}\right)^{N+1} \frac{1}{\sqrt{(N+1)2\pi}}.$$

Feladatok megoldása közben a Poisson-eloszlású valószínűségi változók esetében gyakran élünk a következő feltevésekkel:

a) Ha egy kiszolgáló egységhez egy időegység alatt érkezők száma Poisson-eloszlást követ λ várható értékkel, akkor az α időtartam alatt érkezők száma is Poisson-eloszlású $\alpha\lambda$ várható értékkel.

b) Ha egy anyag egy súlyegységében előforduló hibák száma Poisson eloszlású és várható értéke λ, akkor az α súlyú anyagban előforduló hibák száma is Poisson-eloszlású és várható értéke $\alpha\lambda$.

Feltevésünk természetesnek tűnik, hiszen ha egy úton elhaladó járművek száma Poisson-eloszlást követ, óránként mondjuk 720 várható értékkel, akkor a félóránként elhaladók száma is feltételezhetően Poisson-eloszlást követ, és várható értéke feltételezhetően 360 lesz, a negyedóra alatt elhaladók várható értéke pedig 180. De ha a megfigyelés helye előtt a közelben egy közlekedési lámpa van, amelyik mondjuk másfél percenként vált, akkor másfél percnél rövidebb időtartamra a feltevésünk nem igaz, hiszen lesz olyan félperc, amikor a várható kocsiszám – az esetleges kanyarodók miatt– egy, esetleg kettő, és lesz olyan félperc, amikor tíznél is több.

2) A normális eloszlást jól követő valószínűségi változók közül a legtipikusabbak: automaták által adagolt, darabolt, megmunkált anyag súlya, hossza, egyéb méretei, ahol a várható érték az lesz, amelyre az automatát beállították, a szórás pedig attól függ, milyen pontos az automata; olyan alkatrészek élettartama is normális eloszlást követ, amelyek rendszeres kopással mennek tönkre.

Ezekben az esetekben is nyilván lehetetlen, hogy a valószínűségi változó értéke negatív szám legyen, jóllehet az eloszlásfüggvény alapján ennek valószínűségére pozitív érték adódik. De azokra az értékekre, amelyek minket valóban érdekelnek, a normális és a tényleges eloszlás közötti eltérés elhanyagolható.

3) Az exponenciális eloszlást jól követő valószínűségi változók közül a legtipikusabbak: Hirtelen töréssel tönkremenő alkatrészek élettartama; egy kiszolgáló egységhez egymástól függetlenül érkező ügyfelek érkezése közötti idő. Itt is az ésszerűség határain belül jó a közelítés.

4) Az élettartam-vizsgálatoknál be szokták vezetni az un. meghibásodási rátát :

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)},$$

ahol f az eloszlás sűrűségfüggvénye, F pedig az eloszlásfüggvénye . Ha $\lambda(t)$ konstans, akkor az exponenciális eloszlást kapjuk, ha $\lambda(t) = c\alpha t^{\alpha-1}$ $(t > 0)$, ahol c és α pozitív konstansok, akkor a Weibull-eloszláshoz jutunk.

5) A Weibull-eloszlást jól követő valószínűségi változó egyik típusa olyan alkatrészek élettartama, amelyek hirtelen töréssel mennek tönkre, de kopnak is. Bizonyos munkák elvégzésére fordított idő is jól közelíthető Weibull-eloszlással, ha a munka olyan, hogy közben adódhatnak újabb és újabb nehézségek: pl. egy autószerelő műhelyben egy ismeretlen eredetű gyújtáskimaradás bevizsgálására és megjavítására fordított idő inkább Weibull-eloszlással, egy olajcserére fordított idő inkább normális eloszlással jellemezhető.

Mintapéldák

P 33.37 Egy szöveg 50 oldalas, minden oldalon 12 sor, és egy sorban 20 jel van (a szóközöket is jelnek számítjuk). A szövegben 110 hibás jel van.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy 240 véletlenszerűen választott jel közül pontosan három lesz hibás?

b) Közelítsük a fenti valószínűséget binomiális eloszlással számolva!

c) Közelítsük a fenti valószínűséget Poisson eloszlással számolva!

d) Mennyi a valószínűsége, hogy a 10. oldalon pontosan 3 hiba lesz?

Megoldás:

Az összes jel száma $50 \cdot 20 \cdot 12 = 12000$. Jelölje ξ a hibás jelek számát.

a) Mivel bármelyik jel egyenlő valószínűséggel választható, ξ hipergeometriai eloszlású lesz. Paraméterei: $n = 240$, $N = 12000$, $M = 110$, tehát

$$P(\xi = 3) = \frac{\binom{110}{3}\binom{11890}{237}}{\binom{12000}{240}} \approx 0.19975 .$$

(Ahhoz, hogy ezt az értéket zsebszámológéppel meghatározhassuk, a törtet át kell alakítani, mert már 70! is több, mint 10^{99}).

b) Ha binomiális eloszlással számolunk, ez egyenértékű azzal, hogy feltesszük, minden egyes jel választásánál annak valószínűsége, hogy az hibás, ugyanannyi. Jelenleg ez az érték $p = \frac{110}{12000}$. Ez a feltételezés elég jól megfelel a valóságnak, ha n elég nagy, és k közel van np-hez, azaz a várható értékhez. Igy

$$P(\xi = 3) = \binom{240}{3} p^3 q^{237} \approx 0.1976 ,$$

ahol $q = 1 - p$.

Ehhez a kifejezéshez az a) pontbeli tört átalakításával is eljuthatunk.

$$\frac{\binom{110}{3}\binom{11890}{237}}{\binom{12000}{240}}=\frac{110\cdot 109\cdot 108}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{11890\cdot 11889\cdot\ldots\cdot 11654}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 237}\cdot\frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 240}{12000\cdot 11999\cdot\ldots\cdot 11761}\,.$$

Vegyük figyelembe, hogy $\frac{240!}{3!237!}=\binom{240}{3}$ és

$$\frac{11890}{12000}=1-\frac{110}{12000}\,;\quad \frac{11889}{11999}=1-\frac{110}{11999}\,;\quad \ldots\quad .$$

Ekkor az a) pontbeli kifejezés így alakul:

$$\binom{240}{3}\left(1-\frac{110}{12000}\right)\left(1-\frac{110}{11999}\right)\ldots\left(1-\frac{110}{11764}\right)\frac{110}{11763}\cdot\frac{109}{11762}\cdot\frac{108}{11761}\approx\binom{240}{3}q^{237}p^3$$

c) Ha Poisson eloszlással számolunk, akkor a 240 jel között a hibásak várható száma az M 33.36 megjegyzés 1) pontja szerint $\lambda=\frac{110\cdot 240}{12000}=\frac{11}{5}=2.2$,és ez a 110-hez képest elég kicsi. Ezért

$$P(\xi=3)=\frac{(\frac{11}{5})^3}{3!}e^{-\frac{11}{5}}\approx 0.1966\,.$$

Ehhez a kifejezéshez is eljuthatunk az a) pontbeli tört átalakításával:

$$\frac{\binom{110}{3}\binom{11890}{237}}{\binom{12000}{240}}=\frac{1}{3!}\cdot\frac{110\cdot 240}{11763}\cdot\frac{109\cdot 239}{11762}\cdot\frac{108\cdot 238}{11761}(1-\frac{110}{12000})(1-\frac{110}{11999})\ldots(1-\frac{110}{11764})\approx$$

$$\approx\frac{(\frac{11}{5})^3}{3!}(1-\frac{110}{12000})^{237}=\frac{(\frac{11}{5})^3}{3!}\left[(1-\frac{110}{12000})^{\frac{12000}{110}}\right]^{\frac{110\cdot 240}{12000}}\left(1-\frac{110}{12000}\right)^{-3}\approx\frac{(\frac{11}{5})^3}{3!}e^{-\frac{11}{5}}\,;$$

ugyanis $(1-\frac{110}{12000})^{-3}$ igen közel van egyhez, és a szögletes zárójelen belüli kifejezés az ismert határérték alapján közel van e^{-1}-hez.

d) Mivel a) alapján bármelyik 240 jel esetén $P(\xi=3)=0.19975$, és a tizedik oldalon 240 jel van, így ez a valószínűség is 0.19975.

P 33.38 Egy üzemben vaslemezekből kiszabott idomokat használnak fel valamely termék elkészítéséhez. Egy lemezből 25 db egyenlő nagyságú idomot vágnak ki, és a hulladék elhanyagolhatóan kevés. A lemezekben elhelyezkedő hibák pontszerűek, ezek száma Poisson-eloszlásúnak tekinthető $\lambda=3.5$ várható értékkel. Egy adott idő alatt az üzemnek 50000 idomot kell feldolgoznia.

a) Mennyi lesz annak valószínűsége, hogy egy idom hibátlan?

b) Hány lemezt rendeljen az üzem, hogy abból várhatólag 50000 hibátlan idomot nyerjen?

c) Ha ennyit rendel, mennyi lesz a valószínűsége, hogy lesz is 50000 hibátlan idomja?

d) Hány lemezt rendeljen, hogy 0.9-nél nagyobb valószínűséggel legyen 50000 hibátlan idomja?

Megoldás: a) A feladatban megfogalmazott esetben feltehetjük, hogy a hibák eloszlása az idomokon is Poisson-eloszlású, $\lambda_1=\frac{3.5}{25}=0.14$ várható értékkel. Így annak valószínűsége, hogy egy idom hibátlan:

$$P(\xi=0)=\frac{0.14^0}{0!}e^{-0.14}\approx 0.8694\,,$$

azaz az idomok 86.94%-a hibátlan.

b) Várhatóan 50000 hibátlan idomunk lesz, ha annyit rendelünk, hogy annak 86.94%-a 50000 legyen. Ehhez 57511 idom kell, és ez 2301 lemezt jelent.

c) 2301 lemezből 57525 idom lesz, és mindegyik 86.94% valószínűséggel lesz hibátlan; ha tehát η-val jelöljük a hibátlanok számát, akkor

$$P(\eta = k) = \binom{57525}{k} 0.8694^k 0.1306^{57525-k}$$

Látjuk, hogy η binomiális valószínűségi változó, lehetséges értékei 0,1,...,57525 Annak valószínűsége tehát, hogy $\eta \geq 50000$,

$$P(\eta \geq 50000) = \sum_{k=50000}^{57525} \binom{57525}{k} 0.8694^k 0.1306^{57525-k} .$$

Ennek az összegnek a kiszámítása még a legújabb számítógépeken is körülményes, mert csak nagyon ügyes szervezéssel tudjuk elkerülni a számítások közben az alul- vagy túlcsordulást (hacsak nem valamilyen speciális matematikai programot használunk).

Mivel itt n elég nagy (57525), használhatjuk a **M 33.35** megjegyzés 3) pontjában adott közelítést. Ha k-ra elvégezzük a sűrűségfüggvény értékeinek összegzését, tulajdonképpen egy integrálközelítő összeget kapunk, melynek értékét magával az integrállal közelítjük, azaz egy olyan normális eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvényével fogunk számolni, amelynek várható értéke $m = np = 57525 \cdot 0.8694 = 50012.2$ és szórása $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = 80.82$. De mivel η csak egész értékeket vehet fel, ezért

$$P(\eta \geq 50000) = 1 - P(\eta < 50000) = 1 - P(\eta < 49999 + \varepsilon)$$

tetszőleges kis ε-ra, tehát a kérdéses valószínűséget az $1 - F(50000)$ és az $1 - F(49999)$ értékkel is közelíthetjük. A gyakorlatban ilyenkor az $1 - F(49999.5)$ közelítést használják, és mint néhány feladatban látni fogjuk, ez valóban igen jó közelítést ad. A **T 33.27** tételt alkalmazva

$$P(\eta \geq 50000) = 1 - F(49999.5) = 1 - \Phi\left(\frac{49999.5 - 50012.2}{80.82}\right) =$$

$$= 1 - \Phi(-0.1571) = 1 - (1 - \Phi(0.1571)) = \Phi(0.1571) = 0.562 .$$

A Φ függvény értékét az **1.** táblázatból kerestük ki. Várhattuk is hogy 1/2-hez közeli értéket kapunk, hiszen ha egy valószínűségi változó a várható értékét 0 valószínűséggel veszi fel, akkor épp 1/2 valószínűséggel lesz annál kisebb, és 1/2 valószínűséggel lesz annál nagyobb. Az jelenlegi eltérés abból adódik, hogy – mivel egész lemezeket kell rendelni – az idomok száma az előbb meghatározott feltétlenül szükségesnél nagyobb.

d) A feltétel:

$$P(\eta \geq 50000) = \sum_{k=50000}^{n} \binom{n}{k} 0.8694^k 0.1306^{n-k} > 0.9$$

Mivel az ebben szereplő összegnek a kiszámítása reménytelen, ismét normális eloszlással közelítünk: $m = n \cdot 0.8694$, $\sigma = \sqrt{n \cdot 0.11354}$.

$$P(\eta \geq 50000) \approx 1 - \Phi\left(\frac{49999.5 - n\ 0.8694}{\sqrt{n}\ 0.11354}\right) = \Phi\left(\frac{n\ 0.8694 - 49999.5}{\sqrt{n}\ 0.11354}\right) > 0.9 .$$

(Tudjuk, hogy $49999.5 - n\,0.8694 < 0$.) A Φ függvény értéke az 1. táblázat szerint: $\Phi(x) > 0.9$, ha $x > 1.283$; így

$$\frac{n\,0.8694 - 49999.5}{\sqrt{n}\,0.11354} > 1.283\,, \quad \text{azaz} \quad n \geq 57630\,.$$

Ehhez a biztonsághoz tehát 2306 lemezt kell rendelni.

Feladatok

A további feladatok megoldásaiban gyakran szerepel olyan összeg, amelynek kiszámítása számítógép nélkül reménytelen. Ilyenkor a megoldásnál – számítógép hiányában – elégedjünk meg az összeg felírásával.

84.* Egy dobozban 17 fehér és 23 fekete labda van. Kihúzunk tízet. Jelölje ξ a kihúzott fehér labdák számát. Mennyi lesz ξ várható értéke, ha
a) nem tesszük vissza azokat, amelyeket kihúztunk?
b) visszatesszük azokat, amelyeket kihúztunk?

85. Egy dobozban 30 db 4-es és 42 db 6-os csavar van. Belemarkolva kiveszünk 8 db csavart.
a) Mennyi a valószínűsége, hogy lesz közte 6 db négyes?
b) Mennyi lesz a kivett 4-es csavarok várható száma?

86. Egy kockát 12-szer feldobunk. Ha ξ jelöli az ötös-dobások számát, mennyi lesz
a) annak valószínűsége, hogy egyszer sem dobunk ötöst, azaz $\xi = 0$?
b) annak valószínűsége, hogy legfeljebb két ötöst dobunk, azaz $\xi \leq 2$?
c) ξ várható értéke?

87.* Egy üzem gyújtáskapcsolókat gyárt. A termékek 95%-a felel meg a szabványnak.
a) Mennyi a valószínűsége, hogy 5000 kapcsolóból 4600 és 4900 között lesz a szabványnak megfelelők száma?
b) Az előbbi valószínűséget számítsuk ki közelítőleg a **M 33.35** megjegyzés 3) pontja segítségével!
c) Adjunk becslést a kérdezett valószínűségre a Csebisev-egyenlőtlenséggel!

88.* Egy üzemben elektromos biztosítékokat gyártanak. A tapasztalat szerint átlagban ezek 4%-a hibás.
a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy tíz darab véletlenszerűen kiválasztott biztosíték között nincs selejtes, és mennyi annak, hogy legfeljebb egy selejtes van?
b) Legalább hányat kell kivenni ahhoz, hogy 0.9-nél nagyobb legyen a valószínűsége annak, hogy van benne tíz jó?

89. A megfigyelések szerint Magyarországon 1000 újszülött közül átlagosan 516 fiú. Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy hatgyermekes családban a fiúk száma legalább annyi, mint a lányoké?

90. Tegyük fel, hogy egy véletlenszerűen választott személy születésnapja egyenlő valószínűséggel esik az év bármelyik napjára. Mennyi lesz egy 50 fős társaságból a január elsején születettek várható száma? (A valóságban Magyarországon egy véletlenszerűen választott személy születésnapja nagyobb valószínűséggel esik február vagy július hónapra, mint más hónapokra).

91.* Kalácssütéskor egy kg tésztába kb. 60 szem mazsolát tesznek. Mennyi a valószínűsége, hogy egy 100 grammos szeletben legfeljebb 10 mazsolát találunk, ha a mazsolák száma Poisson-eloszlásúnak tekinthető? Végezzük el a számítást – a Poisson-eloszlás feltételezése nélkül – úgy is, hogy a kalácsot gondolatban olyan kicsi darabokra vágjuk, hogy egy darabban már legfeljebb csak egy mazsola van. Hogyan számolunk ekkor?

92. Egy dobozban 30 golyó van, 10 piros, 20 fehér. Kiveszünk kilenc golyót.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy 3 piros van köztük?

b) Milyen eredmények adódnak, ha binomiális vagy Poisson-eloszlással próbálkozunk? Miért helytelen most ezek alkalmazása?

93. Egy üzem 800 tábla üveget rendel egy üveggyártól. Az üvegben előfordulhatnak kisebb hibák (pl. buborékok). Ezek száma Poisson-eloszlásúnak tekinthető, táblánként 0.5 várható értékkel.

a) Határozzuk meg, hogy a 800 leszállított tábla közül várhatóan hány lesz hibátlan, hányban lesz 1, 2, stb. hiba?

b) Határozzuk meg a hibátlan, az egy, a két hibát tartalmazó táblák várható számát, ha a gyárban a két hibánál többet tartalmazó táblákat kiselejtezik!

94. Egy ruhaszövet anyagában 100 méterenként átlag 5 hiba van. Egy 300 méteres véget 3 méteres darabokra vágnak. Előreláthatóan hány hibátlan darab lesz ezek között, ha a hibák száma Poisson-eloszlásúnak tekinthető?

95. Egy telefonközpontba percenként átlagosan 30 hívás fut be. A központ percenként 60 hívást képes fogadni. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy nyolc órás műszak alatt zavartalan lesz a központ működése, ha feltesszük, hogy az egy-egy perc alatt befutó hívások száma Poisson-eloszlásúnak tekinthető, és független a többi perc alatt befutó hívások számától?

96.* Egy útkereszteződésnél a percenként áthaladó gépkocsik száma Poisson-eloszlásúnak tekinthető. A tapasztalatok szerint percenként átlagosan 40 gépkocsi halad át. A kereszteződést felújítják. Milyen áteresztőképességűre tervezzék, ha azt akarják, hogy forgalmi dugó kialakulásának legfeljebb 0.05 legyen a valószínűsége még akkor is, ha a forgalom megduplázódik?

97. Egy áruházban egy adott idő alatt megjelent látogatók száma Poisson-eloszlású valószínűségi változó λ paraméterrel. Egy látogató p valószínűséggel vásárol valamit. Mennyi a valószínűsége, hogy az adott idő alatt éppen k személy vásárol?

98.* A ξ valószínűségi változó értékei a pozitív egész számok, és tudjuk, hogy a $\xi = k$ esemény valószínűsége egyenesen arányos $\frac{1}{(k-1)!}$-sal.

a) Határozzuk meg a $P(\xi = k)$ valószínűségeket!

b) Mennyi lesz ξ várható értéke és szórása?

99.* Egy könyv szedésekor előforduló hibák száma Poisson eloszlásúnak tekinthető, oldalanként kettő várható értékkel. A korrektor egy átolvasáskor általában a hibák 90%-át veszi észre.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy egy tízoldalas részben az első átolvasás után egyetlen hiba sem marad?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb két hiba marad?

100.* Egy bizonyos típusú televíziós képcső élettartama exponenciális eloszlást követ 5000 óra várható értékkel. Ha mi a televíziónkat már 6000 órát működtettük, mennyi a valószínűsége, hogy fog még 1000 órát működni?

101.* Egy hatégős csillárban azonos típusú villanyégők vannak, melyek élettartama exponenciális eloszlást követ 1000 óra várható értékkel. Mennyi a valószínűsége, hogy a hat villanyégő közül fél évig egyet sem kell cserélni, ha a csillár naponta átlagosan három órát ég?

102. Egy lánc szemeinek élettartama egymástól független. Ez az élettartam adott terhelés mellett minden szemre exponenciális eloszlású valószínűségi változó, azonos m várható értékkel. Írjuk fel egy n szemű lánc élettartamának sűrűségfüggvényét!

103. Egy szerkezet élettartama exponenciális eloszlású valószínűségi változónak tekinthető 1200 óra várható értékkel. A szerkezet használói a szerkezetet átlagosan napi egy órán át üzemeltetik. Milyen hosszú garanciaidőt adjon a gyártó cég, ha az eladott szerkezeteknek legfeljebb 5%-át akarja garanciálisan cserélni?

104.* Annak valószínűsége, hogy egy benzinkútnál a tankolásra 6 percnél többet kell várni, a tapasztalatok szerint 0.1 . Mennyi a valószínűsége, hogy véletlenszerűen a kúthoz érkezve 3 percen belül sorra kerülünk? (A várakozási idő hossza exponenciális eloszlású).

105. Tegyük fel, hogy bármely időtartamot tekintve, az adott időtartam alatt a kiszolgálóegységhez érkező ügyfelek száma Poisson-eloszlást követ, az időtartammal arányos várható értékkel, amelynek értéke egy időegységre legyen λ. Mutassuk meg, hogy ekkor egy adott pillanattól kezdve a legközelebbi ügyfél érkezéséig eltelt idő exponenciális eloszlású $\frac{1}{\lambda}$ várható értékkel! (Ez az állítás annak felel meg, hogy ha pl. percenként három vevő érkezik, akkor két vevő érkezése között átlagosan $1/3$ perc telik el).

106.* Legyen ξ egyenletes eloszlású a $(0;8)$ intervallumon.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy 50 egymástól független kísérletet elvégezve a ξ-re kapott értékek közül legfeljebb három esik a $[4;4.5]$ intervallumba?

b) Számítsuk ki a fenti valószínűség közelítő értékét valamelyik határértéktétel segítségével!

107.* Egy fafeldolgozó telepen deszkákat készítenek. Ezek hossza normális eloszlású valószínűségi változónak tekinthető, 400 cm várható értékkel és 3 cm szórással.

a) A deszkák hány százaléka lesz 398 cm-nél hosszabb és 401 cm-nél rövidebb?

b) Mekkora a valószínűsége, hogy egy deszka hossza a 400 cm-től legalább 2.5 cm-rel eltér?

108. Legyen ξ normális eloszlású valószínűségi változó $m = 3$ és $\sigma = 2$ paraméterértékekkel. Mekkora legyen az A szám, ha azt akarjuk, hogy ξ legalább 1/2 valószínűséggel a $(2; A)$ intervallumba essen?

109. Egy üzemben a készített folyékony termék üvegekbe töltését két automata végzi. Az üvegekbe töltött mennyiség mindkét gép esetében normális eloszlású valószínűségi változónak tekinthető, 2 dl várható értékkel. A betöltött mennyiség szórása a első gépnél 0.14 dl, a másodiknál 0.08 dl. Az üvegek 60 %-át az első gép tölti, a többit a második. Mennyi a valószínűsége, hogy egy üveget véletlenszerűen kiválasztva, abban a betöltött anyag mennyisége a várható értéktől 0.1 dl-nél kevesebbel tér el?

110. Egy üzemrészben két automata vasrudakat darabol. A rúddarabok hossza mindkét gépnél normális eloszlást követ, melynek várható értéke mindkét gépnél 150 mm, szórása az elsőn 1 mm, a másodikon 2 mm. A második az össztermelés 35%-át adja. Az együtt gyűjtött darabokból egyet kiveszünk. Mennyi a valószínűsége, hogy az 149 mm-nél rövidebb?

111. Egy automata gép zacskókba vegyszert adagol. A betöltött vegyszer súlya normális eloszlású valószínűségi változó 100 g várható értékkel és 2 g szórással. Az egymás utáni csomagok súlya egymástól független. Megfelelő az olyan csomag, amelyben a betöltött mennyiség 95 és 105 g között van. A napi termelés a beérkezett nyersanyag minőségétől függő, Poisson eloszlású, λ=1000 csomag várható értékkel. Mennyi a valószínűsége, hogy az egy nap alatt elkészült csomagok között legfeljebb 20 olyan csomag van, amely nem megfelelő?

112. Számítsuk ki ξ várható értékét és szórását, ha eloszlásfüggvénye:

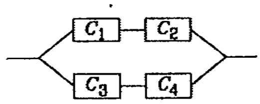
$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0, \\ 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

113. Legyen ξ normális eloszlású m, és σ) paraméterekkel. Határozzuk meg η sűrűségfüggvényét, ha

a) $\eta = \xi^2$ b) $\eta = e^{\xi}$

114. Legyen ξ standard normális eloszlású. Az $\eta = \sin \xi$ vagy az $\gamma = \cos \xi$ valószínűségi változó szórása lesz nagyobb?

115. Egy rendszer négy komponensből van összeállítva, az ábrának megfelelően. A komponensek meghibásodása egymástól független, és mindegyik élettartamának eloszlásfüggvénye meg van adva.



a) A ξ_1 valószínűségi változó értéke az az időtartam, amíg a rendszer tökéletesen működik. Írjuk fel eloszlásfüggvényét!

b) A ξ_2 valószínűségi változó értéke az az időtartam, amíg a rendszer működőképes, azaz legalább egy ága működik. Írjuk fel eloszlásfüggvényét!

c) Adjuk meg a fenti eloszlásfüggvényeket, ha a komponensek élettartama azonos paraméterű exponenciális eloszlás, és úgy is, hogy azonos paraméterű normális!

116.* Milyen k értékre lesz a $P(\xi = k)$ valószínűség maximális, ha ξ

a) binomiális eloszlású n és p paraméterekkel?

b) Poisson-eloszlású λ paraméterrel?

c) hipergeometriai eloszlású adott N, M és n értékekkel, a **D 33.20** definíciónak megfelelően?

117. Legyen ε adott pozitív szám, I pedig ε hosszúságú szakasz. Melyik I-re lesz a $P(\xi \in I)$ valószínűség maximális, ha ξ

a) normális eloszlású, adott m, σ paraméterekkel?

b) exponenciális eloszlású?

c) egyenletes eloszlású az $[a; b]$ intervallumon, és $\varepsilon < b - a$?

118. Egy 1000 nézőt befogadó színháznak két bejárata van, mindegyik mellett egy ruhatár van. Legalább hány fogast kell egy-egy ruhatárban elhelyezni, hogy legalább 99% legyen annak valószínűsége, hogy mindenki abba a ruhatárba tudja beadni a kabátját, ahol bement, feltéve, hogy bármelyik bejáratot egyenlő valószínűséggel választhatja? Adjunk közelítő értéket a Csebisev egyenlőtlenséggel is!

119. Annak valószínűsége, hogy egy diákszálló valamelyik lakója valamelyik napon beteg, és a betegszobában ágyat foglal el: 0.002. A diákszállónak 1200 lakója van.

a) Hány ágyas betegszobát kell berendezni, hogy legfeljebb 0.01 legyen annak valószínűsége, hogy egy beteg nem kap ágyat?

b) A **P 33.38** példa ill. **T 33.34** tétel alapján próbáljunk közelíteni más eloszlással!

120. Egy kétforintost 200-szor feldobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a fejdobások száma 90 és 110 közé esik? Milyen becslést ad a Csebisev egyenlőtlenség?

121. Egy kockával 300-szor dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy 60-nál többször dobunk kettest?

122. Mennyi a valószínűsége annak, hogy két kockát 72-szer feldobva legalább 3-szor dobunk két hatost? Az eredményt közelítőleg számítsuk ki valamelyik alkalmas más eloszlással is!

123. Egy elektromos hálózatba 100 db, egyenként 500 W-os fogyasztó kapcsolható. Tegyük fel, hogy a fogyasztókat egymástól függetlenül üzemeltetik, és mindegyikre 0.6 annak valószínűsége, hogy egy adott pillanatban üzemel. Mennyi annak valószínűsége, hogy egy adott pillanatban a hálózat igénybevétele legalább 28000 W ? Közelítsünk valamelyik alkalmas más eloszlással is!

124.° Hány dobást kell végeznünk egy nem feltétlenül szabályos dobókockával, hogy a 6-os dobás valószínűségét, ami nem feltétlenül 1/6, a kapott relatív gyakoriság legalább 0.9 valószínűséggel 1/20-nál kisebb hibával közelítse?

125. Egy szövőgép 500 szállal dolgozik. Annak valószínűsége, hogy egy szál meghatározott időtartam alatt elszakad, minden szálra 0.008. Határozzuk meg, hogy 0.95 valószínűséggel milyen értékek között várható a szálszakadások száma az adott időtartam alatt!

126.* Meg akarjuk határozni, hogy egy automata milyen selejtaránnyal dolgozik. 1000 terméket megvizsgálva 20 selejtest találtunk köztük. Milyen értékek közé esik az ismeretlen p valószínűség 90%-os biztonsággal?

127. Valamely társadalmi rétegben meg akarjuk határozni a dohányosok arányát. Hány embert kell megkérdezni ahhoz, hogy az így adódó arány a valódi aránytól 0.9 valószínűséggel legfeljebb 5%-kal térjen el?

128. Egy nagyüzem dolgozói közül 40% végzett felsőfokú iskolát. Az üzem dolgozói közül kiválasztunk 150-et.
   a) Mennyi lesz ezek közül a felsőfokú végzettségűek várható száma?
   b) Mennyi a valószínűsége, hogy a felsőfokú végzettségűek számának valódi értéke a várható értéktől több mint 5%-kal tér el? Milyen becslést ad a Csebisev-egyenlőtlenség?

129. A tapasztalatok szerint egy üzemben a termékek 95%-a hibátlan. Egy adott idő alatt az üzem 10000 terméket gyárt. Csebisev-egyenlőtlenséggel adjunk becslést arra, legalább mekkora annak a valószínűsége, hogy a gyártott termékek közül 9350 és 9700 közé esik a hibátlanok száma!

130. Egy távközlési csatorna vizsgálatakor 2000 továbbított jel közül 27 volt hibás. Milyen értékek közé esik a jeltorzulás valószínűsége legalább 95%-os biztonsággal?

131. Egy bizonyos fajta mosópor dobozaiba reklámfogásként egytől ötig számozott cédulákat tesznek, minden dobozba egyet-egyet. Aki az öt különböző számot összegyűjtötte, és beküldi, egy posztert kap ajándékba. Feltesszük, hogy minden cédula előfordulása egyformán valószínű. Hány dobozt kell előreláthatóan megvenni, hogy meglegyen mind az öt cédula?

Számítógépes feladatok

A következő feladatokban néhány közismert, de eddigi tanulmányaink során nem szereplő fogalmat használunk. Ilyen pl. a "véletlen szám", ami azt jelenti, hogy egy valószínűségi változó egy értékét állítjuk elő véletlenszerűen. A szimuláció azt jelenti, hogy "eljátszunk" egy folyamatot, amelyben valószínűségi változók értékei szerepelnek. Pl. megfelelő eloszlás szerint érkező ügyfelek érkezési időpontjait és a kiszolgálásukra fordított időtartamokat jelöljük ki, és így eljátsszuk, azaz szimuláljuk a kiszolgálási folyamatot.

132.[P] Tegyük fel, számítógépünkön a RAND() nevű eljárás a (0.1) intervallumon egyenletes eloszlású véletlen számot generál 12 értékes jeggyel.

Írjunk programot, mely egy olyan ξ valószínűségi változó N db véletelen értékét állítja elő,

a) amelynek lehetséges értékei a $0, 1, \ldots, n$ egészek, mindegyik egyenlő valószínűséggel!
b) amely binomiális eloszlású, értékei a $0, 1, \ldots, n$ számok, paramétere p !
c) amely Poisson eloszlású m várható értékkel! (Megjegyezzük, hogy később, valószínűségi változók összegének segítségével egyszerűbb megoldást is adunk erre a feladatra, mint amit eddigi ismereteink alapján most fel tudunk írni l. **34.81**).
d) amely egyenletes eloszlású az (a, c) intervallumon!
e) amely exponenciális eloszlású m várható értékkel!

(Normális eloszlású valószínűségi változót szintén a **34.81** feladatban fogunk előállítani)

133.P Egy bizonyos fajta mosópor dobozaiba reklámfogásként egytől ötig számozott cédulákat tesznek, minden dobozba egyet-egyet. Aki az öt különböző számot összegyűjtötte, és beküldi, egy posztert kap ajándékba. Feltesszük, hogy minden cédula előfordulása egyformán valószínű. Azt akarjuk megbecsülni, átlagosan hány dobozt kell megvenni ahhoz, hogy meglegyen mind az öt cédula. Írjunk programot, amely N db vásárlássorozatot szimulál, és az így kapott dobozszám átlagával becsüli meg a várható értéket!

134.P Egy kiszolgálóegységhez érkező ügyfelek érkezése között eltelt idő exponenciális eloszlásúnak tekinthető 30 másodperc várható értékkel. Egy ügyfél kiszolgálásához szükséges idő egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $(120, 240)$ intervallumon, másodpercekben. Hat személy végzi a kiszolgálást. A várakozóhelyen tíznél többen nem várakozhatnak, így , ha valaki úgy érkezik, hogy tízen már várakoznak, akkor azonnal elmegy.

A folyamat szimulálásával adjunk közelítő értéket arra, mennyi lesz a várakozási idő várható értéke, ha egy munkanapot nyolc órának számítunk, de mindenkit kiszolgálnak túlórában is, aki a zárási idő előtt érkezett, és befért a várakozóhelyre! A közelítő értéket N munkanap alapján számítsuk, és a folyamatot vizsgáljuk öt másodperces egységekben !

(Az ilyen szimuláció igen alkalmas pl. olyan kérdések eldöntésére, hogy ha pl. az elvesztett vevő x forint elvesztett nyereséget jelent, érdemes-e egy hetedik kiszolgálót beállítani, aki viszont y forint kiadást jelent; stb.)

34. fejezet

Együttes eloszlások

Együttes eloszlásfüggvény, függetlenség

D 34.1 A $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ valószínűségi változókból képzett

$$\boldsymbol{\xi} = [\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n]$$

n-dimenziós vektort n-dimenziós **valószínűségi vektorváltozónak** nevezzük. A $\boldsymbol{\xi}$ valószínűségi vektorváltozó eloszlásfüggvényének, vagy a $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ valószínűségi változók **együttes eloszlásfüggvényének** nevezzük a

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, ..., \xi_n < x_n)$$

egyenlőséggel definiált n-változós függvényt.

T 34.2 A $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ valószínűségi változók F együttes eloszlásfüggvénye mindegyik változójának monoton növekvő és balról folytonos függvénye, továbbá bármelyik x_i-re

$$\lim_{x_i \to -\infty} F(x_1, ..., x_n) = 0$$

és

$$\lim_{\mathbf{x} \to \infty} F(x_1, ..., x_n) = 1$$

ahol $\mathbf{x} \to \infty$ azt jelenti hogy $\mathbf{x}$ minden koordinátája a végtelenhez divergál. Az együttes eloszlásfüggvény a $\xi_1, ..., \xi_n$ valószínűségi változók bármely nem üres részhalmazának együttes eloszlását egyértelműen meghatározza.

D 34.3 A $\xi_1, ..., \xi_n$ valószínűségi változók nem üres, valódi részhalmazainak eloszlását az **együttes eloszlás peremeloszlásainak** nevezzük.

D 34.4 A folytonos valószínűségi változókból képezett $\boldsymbol{\xi} = [\xi_1, ..., \xi_n]$ valószínűségi vektorváltozó **sűrűségfüggvényének** vagy a $\xi_1, ..., \xi_n$ valószínűségi változók **együttes sűrűségfüggvényének** nevezzük azt a nemnegatív értékű n-változós valós f függvényt, amely az n-dimenziós tér bármely korlátos zárt halmazán minden változójának olyan függvénye, amely annak legfeljebb véges számú értéke kivételével folytonos, és amellyel a $\boldsymbol{\xi}$ valószínűségi vektorváltozó eloszlásfüggvénye kifejezhető

$$F(x_1, ..., x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} ... \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, ...t_n)\ dt_n ... dt_2 dt_1$$

alakban.

Fentiekből következik, hogy F mindegyik változójának folytonos függvénye, és azokban a pontokban, ahol F differenciálható is,

$$f(x_1, ..., x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, ... x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 ... \partial x_n} .$$

Ha ismerjük a $\xi_1, ..., \xi_n$ változók együttes eloszlásfüggvényét, akkor ezek tetszőleges $\xi_{i_1}, ..., \xi_{i_k}$ $(k < n)$ részhalmazának eloszlásfüggvényét is meg tudjuk határozni úgy, hogy a többi változót ∞-hez divergáltatjuk. Az így kapott eloszlásfüggvényeket **peremeloszlásfüggvényeknek** nevezzük.

Diszkrét változók esetében a $P(\xi_{i_1} = \alpha_{i_1}, ..., \xi_{i_k} = \alpha_{i_k})$ valószínűségeket, azaz a $\xi_{i_1}, ..., \xi_{i_k}$ változók **peremeloszlásait** úgy kapjuk az együttes eloszlásból, hogy az elhagyott változók összes lehetséges értékére összegezzük a hozzájuk tartozó valószínűségeket.

Folytonos változók esetében a $\xi_{i_1}, ..., \xi_{i_k}$ változók együttes sűrűségfüggvényét **peremsűrűségfüggvénynek** nevezzük, és – az előbbiekkel összhangban – úgy kapjuk az együttes sűrűségfüggvényből, hogy az elhagyott változók szerint $-\infty$-től $+\infty$-ig integrálunk.

Két dimenzió esetére felírjuk az összefüggéseket, ebből könnyen következtethetünk több dimenziós esetekre is. Jelölje $F_{\xi,\eta}$ a ξ és η együttes eloszlásfüggvényét.

Tetszőleges ξ-re és η-ra

$$F_\xi(x) = \lim_{y \to \infty} F_{\xi,\eta}(x, y) , \quad F_\eta(y) = \lim_{x \to \infty} F_{\xi,\eta}(x, y) .$$

Diszkrét esetben, ha ξ értékei $x_1, x_2, ...$, η értékei $y_1, y_2, ...$ és $P(\xi = x_i, \eta = y_j) = p_{i,j}$, akkor

$$(1) \qquad P(\xi = x_i) = \sum_j p_{i,j} , \qquad P(\eta = y_j) = \sum_i p_{i,j} .$$

Folytonos esetben, ha $f_{\xi,\eta}$ jelöli ξ és η együttes sűrűségfüggvényét,

$$(2) \qquad f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x, t) dt \quad f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(t, y) dt$$

$$(3) \qquad F_\xi(x) = \lim_{y \to \infty} F_{\xi,\eta}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(s, t) dt ds ,$$

$$(4) \qquad F_\eta(y) = \lim_{x \to \infty} F_{\xi,\eta}(x, y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(t, s) dt ds .$$

T 34.5 Legyen f a $\xi_1, ... \xi_n$ valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye, és T az $\mathbf{R}^n$ tér olyan részhalmaza, amelynek van mértéke. Ekkor

$$P((\xi_1, ... \xi_n) \in T) = \int ... \int_T f(x) d\mu .$$

Speciálisan $\int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, ..., x_n) \, dx_n ... dx_1 = 1$

D 34.6 A $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ valószínűségi változókat **egymástól függetleneknek** nevezzük, ha minden $[x_1, x_2, ..., x_n]$ vektorra

$$P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, ..., \xi_n < x_n) = P(\xi_1 < x_1) P(\xi_2 < x_2) ... P(\xi_n < x_n) .$$

T 34.7 A diszkrét $\xi_1, ..., \xi_n$ valószínűségi változók akkor és csak akkor függetlenek egymástól, ha minden $[x_1, ..., x_n]$ vektorra teljesül, hogy

$$P(\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, ..., \xi_n = x_n) = P(\xi_1 = x_1) P(\xi_2 = x_2) ... P(\xi_n = x_n) .$$

T 34.8 Ha a $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ folytonos valószínűségi változók egymástól függetlenek, akkor van együttes sűrűségfüggvényük, és ez a $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ valószínűségi változók sűrűségfüggvényeinek szorzatával egyenlő.

Ha $\xi_1, ..., \xi_n$ olyan folytonos valószínűségi változók, amelyeknek van együttes sűrűségfüggvényük, és ez az egyenkénti sűrűségfüggvények szorzatával egyenlő, akkor a $\xi_1, ..., \xi_n$ valószínűségi változók függetlenek.

Valószínűségi vektorváltozók esetén is beszélhetünk nevezetes eloszlásokról.

D 34.9 Legyen T az n-dimenziós vektortér olyan részhalmaza, amelynek van nem nulla, véges mértéke. Jelöljük ezt $\mu(T)$-vel. A n-dimenziós $[\xi_1, ..., \xi_n]$ valószínűségi vektorváltozót a T-n egyenletes eloszlásúnak nevezzük, ha sűrűségfüggvénye

$$f(\mathrm{x}) = \begin{cases} \frac{1}{\mu(T)}, & \text{ha } \mathrm{x} \in T, \\ 0, & \text{ha } \mathrm{x} \notin T. \end{cases}$$

Ez más szóval azt jelenti, hogy $P(\xi \in T) = 1$, és a tér bármely H mérhető halmazára $P(\xi \in H)$ egyenesen arányos $T \cap H$ mértékével.

A normális (v. Gauss) eloszlást csak kétdimenziós esetre definiáljuk. A $[\xi_1, \xi_2]$ valószínűségi vektorváltozót (kétdimenziós) normális eloszlásúnak mondjuk, ha sűrűségfüggvénye

$$f_{\xi_1,\xi_2}(x,y) = \frac{\sqrt{AC - B^2}}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}[A(x-m_1)^2 + 2B(x-m_1)(y-m_2) + C(y-m_2)^2]},$$

ahol A, B, C, m_1, m_2 valósak, mégpedig $A, C > 0$ és $B^2 < AC$. (könnyen belátható, ha $B \neq 0$, akkor ξ_1 és ξ_2 nem függetlenek).

Feladatok

1.* Két kockával dobunk. Jelentse ξ az egyiken, η a másikon dobott számot. Írjuk fel együttes eloszlásfüggvényüket!

2.* Három kockával dobunk. A ξ, η, ζ valószínűségi változók értékei 0 vagy 1 aszerint, hogy az illető kockán páros vagy páratlan szám jött-e ki. Írjuk fel együttes eloszlásfüggvényüket és η peremeloszlását!

3.* A ξ és η valószínűségi változók lehetséges értékeit és a hozzájuk tartozó valószínűségeket a következő táblázat tartalmazza. Függetlenek-e?

a)

$\eta \backslash \xi$	-1	0	1
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

b)

$\eta \backslash \xi$	0	1	2
0	p	p	$2p$
1	$2p$	$2p$	$4p$

4. A ξ és η valószínűségi változók lehetséges értékeit és a hozzájuk tartozó valószínűségeket a következő táblázat tartalmazza. Írjuk fel peremeloszlásaikat, és állapítsuk meg, függetlenek-e? Mennyi lesz $M(\xi)$ és $M(\eta)$?

$\eta \setminus \xi$	-2	-1	0	1	2	3	4
0.5	0.03	0	0.05	0	0	0	0.03
0.7	0.03	0	0.05	0.14	0	0.05	0.04
1	0.03	0	0.05	0	0	0.05	0.03
1.2	0.03	0.14	0	0	0.16	0.05	0.04

5. Egy vidéken felmérést készítettek, és ennek eredményeként az adódott, hogy a családok 15%-ában nincs gyerek, 20%-ában egy gyerek, 35%-ában két gyerek, 20%-ában három gyerek, 5%-ában négy gyerek, 5%-ában négynél több gyerek van. Jelölje egy véletlenszerűen kiválasztott családban ξ a fiúk számát, η a lányok számát. Írjuk fel a $P(\xi = i, \eta = j)$ valószínűségeket azokra az i, j értékekre, amelyekre a fenti adatokból fel lehet írni, feltéve, hogy kb. ugyanannyi fiú van, mint lány.

6. Addig dobunk egy kockával, amíg ötösnél kisebb számot nem kapunk. Jelölje ϑ az utolsó dobás eredményét, γ pedig a dobások számát. Írjuk fel ϑ és γ együttes eloszlását, és állapítsuk meg, függetlenek-e?

7. Két kockával dobunk, és a dobások eredménye szerint a ξ, η, δ valószínűségi változókat a következőképpen definiáljuk. Legyen $\xi = 0$, ha a dobott két szám eltérése páros, $\xi = 1$, ha páratlan; $\eta = 0$, ha mindkettő páros, $\eta = 1$, ha mindkettő páratlan, $\eta = 2$, ha eltérő paritásúak; $\delta = 2$, ha összegük osztható hárommal, $\delta = 4$, ha nem. Írjuk fel együttes eloszlásukat, bármely kettő együttes eloszlását, peremeloszlásukat, és állapítsuk meg, függetlenek-e?

8.* Egy dobozban n piros, n fehér, n zöld és n kék golyó van. Visszatevés nélkül kiveszünk n golyót. Jelentse ξ a kivett piros golyók számát, η a fehérekét, σ a zöldekét.

   a) Írjuk fel a (ξ, η, σ) háromdimenziós valószínűségi változó valószínűség-eloszlását!

   b) Írjuk fel a $[\xi, \eta]$ kétdimenziós valószínűségi változó peremeloszlását, és állapítsuk meg, független-e ξ és η ?

9.* Bizonyítsuk be, ha $F(x, y)$ a ξ és η valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, akkor
$P(a_1 \le \xi < a_2, b_1 \le \eta < b_2) = F(a_2, b_2) + F(a_1, b_1) - F(a_2, b_1) - F(a_1, b_2)$.

10. Lássuk be, az előző feladat segítségével és megfelelő a, b értékeket választva, hogy az

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } y \le -x \, , \\ 1, & \text{ha } y > -x \, . \end{cases}$$

függvény nem lehet eloszlásfüggvény!

11.* Lássuk be a bevezetőben közölt tételek alapján, hogy az

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0 \text{ vagy } y \le 0 \, , \\ 1 - \frac{y^2}{1+y^2} e^{-x-y} & \text{különben} \end{cases}$$

függvény nem lehet eloszlásfüggvény!

12.* Legyen a ξ és η valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{\xi,\eta}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}(1+xy(x^2-y^2)), & \text{ha } |x|\le 1, \text{ és } |y|\le 1\ ,\\ 0 & \text{különben}\ .\end{cases}$$

Írjuk fel együttes eloszlásfüggvényüket és peremsűrűségfüggvényeiket!

13. Legyen ξ és η együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{\xi,\eta}(x,y)=\begin{cases}1, & \text{ha } 0<x<1 \text{ és } 0<y<2(1-x)\ ,\\ 0 & \text{különben.}\end{cases}$$

a) Írjuk fel együttes eloszlásfüggvényüket!
b) Független-e ez a két valószínűségi változó ?

14.*

a) Sűrűségfüggvény-e az

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2-2xy+2y^2}{2}}$$

függvény?
b) Ha igen, írjuk fel az $F_\xi(x)=P(\xi<x)$ peremeloszlásfüggvényt!

15.* Legyen ξ és η együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{\xi,\eta}(x,y)=\begin{cases}\frac{6}{7}(x^2+\frac{xy}{2}) & \text{ha } 0<x<1 \text{ és } 0<y<2\\ 0 & \text{különben}\end{cases}$$

a) Mutassuk meg, hogy ez valóban sűrűségfüggvény!
b) Határozzuk meg ξ peremsűrűségfüggvényét!
c) Határozzuk meg a $P(\xi>0.5,\eta<1)$ valószínűséget!
d) Határozzuk meg a $P(\xi>\eta)$ valószínűséget!

16. Legyen ξ és η együttes eloszlásfüggvénye

$$F(x,y)=\begin{cases}1+e^{-x-y}-e^{-x}-e^{-y} & \text{ha } x>0 \text{ és } y>0\\ 0 & \text{különben}\end{cases}$$

a) Írjuk fel együttes sűrűségfüggvényüket!
b) Független-e ez a két valószínűségi változó?
c) Határozzuk meg $P(\eta<2(1-\xi))$ értékét!

17. Legyen ξ és η együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,y)=\begin{cases}xe^{-(x+y)} & \text{ha } x>0, \text{ és } y>0\\ 0 & \text{különben}\ .\end{cases}$$

a) Írjuk fel az $f_\eta(y)$ és az $f_\xi(x)$ függvényt!
b) Függetlenek-e?
c) Határozzuk meg a $P(\xi<1,\eta>3)$ valószínűséget!
d) A Φ függvény segítségével fejezzük ki a $P(\xi^2<\eta)$ valószínűséget!

18. Legyen a $[\xi,\eta]$ valószínűségi vektorváltozó sűrűségfüggvénye

$$f(x,y)=\begin{cases}A(x+\frac{y}{3}), & \text{ha } 0<x<1 \text{ és } 0<y<2\ ,\\ 0 & \text{különben}\ .\end{cases}$$

a) Mennyi az A ?

b) Írjuk fel a peremsűrűségfüggvényeket!
c) Mekkora a $P(\xi < 1, \eta > 1)$ valószínűség?

19. Legyen a $[\xi, \eta]$ valószínűségi vektorváltozó sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{\pi}} x e^{-x^2-y^2}, & \text{ha } 0 < x \text{ és } 0 < y\,, \\ 0 & \text{különben}\,. \end{cases}$$

a) Írjuk fel az együttes eloszlásfüggvényt!
b) Milyen valószínűséggel esik a (ξ, η) pont az origó középpontú egységsugarú kör belsejébe?

20. Legyen $[\xi, \eta]$ sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) = \begin{cases} Ce^{-3x}, & \text{ha } 0 < x \text{ és } 1 < y < 4\,, \\ 0 & \text{különben}\,. \end{cases}$$

a) Mekkora a C ?
b) Mekkora valószínűséggel esik a (ξ, η) pont a $(0;0)$, $(2;1)$, $(2;3)$ pontok által meghatározott T háromszög belsejébe?

21. Válasszunk a $[0;1]$ intervallumon véletlenszerűen (azaz egyenletes eloszlás szerint) két számot. Legyen ξ értéke az első, η-é a második. Adjuk meg együttes sűrűségfüggvényüket és ξ peremsűrűségfüggvényét!

22. Válasszunk a $(0;1)$ intervallumon két különböző számot; a kisebbik legyen ξ, a másik η.
a) Írjuk fel együttes sűrűség- és eloszlásfüggvényüket!
b) Írjuk fel η peremeloszlásfüggvényét!

23.* Válasszunk a $(0;1)$ intervallumon véletlenszerűen három számot. A legkisebb legyen η, a középső ξ, a legnagyobb τ. (Ha vannak a választott számok között egyenlők, akkor két, vagy mindhárom valószínűségi változó értéke megegyezik, ez azonban nulla valószínűséggel következik be).
a) Írjuk fel együttes sűrűségfüggvényüket!
b) Írjuk fel az $F_{\eta,\tau}(y,z)$ peremeloszlásfüggvényt!

24.* Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független valószínűségi változók. Legyen $\eta = \min(\xi_1, \dots, \xi_n)$ és $\delta = \max(\xi_1, \dots, \xi_n)$. Az F_{ξ_i} eloszlásfüggvények ismeretében írjuk fel az F_η és F_δ eloszlásfüggvényeket!

25. Legyenek ξ_1 és ξ_2 független valószínűségi változók f_1, ill. f_2 sűrűségfüggvénnyel. Legyen $\eta_1 = \min(\xi_1, \xi_2)$ és $\eta_2 = \max(\xi_1, \xi_2)$.
a) Írjuk fel $[\eta_1, \eta_2]$ együttes eloszlását és sűrűségfüggvényét!
b) Írjuk fel az együttes eloszlásfüggvényt arra az esetre is, amikor f_1 és f_2 is csak egy adott (a,b) intervallumon pozitív!

26.* Legyenek ξ_1, ξ_2, ξ_3 azonos eloszlású, független, folytonos valószínűségi változók. Közös sűrűségfüggvényüket jelölje f . Legyen x_i $i = 1,2,3$ a ξ_i változóknak egy-egy véletlenül választott értéke. Rendezzük az x_1, x_2, x_3 értékeket monoton növekvő sorrendbe: $x_{i_1} \le x_{i_2} \le x_{i_3}$ és legyen $\eta_j = x_{i_j}$; vagyis készítsünk az x_1, x_2, x_3 értékekből rendezett mintát. Írjuk fel η_1, η_2, η_3 együttes sűrűségfüggvényét, ha
a) f tetszőleges sűrűségfüggvény!

b) f csak az (a,b) intervallumon pozitív!

27.* Oldjuk meg az előző feladatot a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változókból készített $\eta_1, \dots, \eta_n$ rendezett mintára!

28.* Válasszunk egy pontot egyenletes eloszlás szerint az $x^2 + y^2 \leq 1$ egyenlőtlenséggel meghatározott körlapon. A ξ és η valószínűségi változók értéke legyen x, ill. y.

a) Írjuk fel a ξ és η együttes sűrűségfüggvényét!

b) Számítsuk ki peremsűrűségfüggvényeiket!

c) Függetlenek-e?

29. Egyszerre kezdjük el n hasonló szerkezet élettartamát mérni. Jelölje $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ az egyes szerkezetek élettartamát. Tegyük fel, hogy együttes eloszlásuk a $P(\xi_1 > x_1, \xi_2 > x_2, \dots, \xi_n > x_n) = e^{-\alpha(x_1+x_2+\dots+x_n)}$ egyenlőséggel adható meg. Írjuk fel η eloszlásfüggvényét, ha η az első meghibásodásig eltelt idő!

Valószínűségi változók összege, szorzata, korrelációja

T 34.10 Legyenek ξ és η mindketten diszkrét eloszlású valószínűségi változók, $\{x_i; i = 1, 2 \dots\}$, $\{y_j; j = 1, 2 \dots\}$ véges vagy végtelen értékkészlettel, és legyen $z = r(t_1, t_2)$ tetszőleges kétváltozós, valós értékű függvény. Ekkor a $\delta = r(\xi, \eta)$ valószínűségi változó eloszlását a következő módon számítjuk:

$$P(\delta = z_k) = \sum_{\substack{i,j \\ z_k = r(x_i, y_j)}} P(\xi = x_i, \eta = y_j) \, .$$

T 34.11 Legyenek ξ és η mindketten folytonos eloszlású valószínűségi változók. Legyenek $z(t_1, t_2)$, $w(t_1, t_2)$ folytonosan differenciálható függvények, és az általuk meghatározott transzformáció legyen invertálható, azaz, a $t_1 = h_1(z, w)$, $t_2 = h_2(z, w)$ inverztranszformáció Jacobi determinánsa ne legyen nulla:

$$J(z, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial z} & \frac{\partial h_1}{\partial w} \\ \frac{\partial h_2}{\partial z} & \frac{\partial h_2}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0 \, .$$

Ekkor a $\gamma = z(\xi, \eta)$, $\delta = w(\xi, \eta)$ valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{\gamma,\delta}(x, y) = |J(x, y)| f_{\xi,\eta}(h_1(x, y), h_2(x, y)) \, .$$

A tétel állítása kettőnél több, véges számú valószínűségi változóra is igaz. Fentiekből könnyen levezethető, hogy ha $\gamma = \xi + \eta$ (és pl. $\delta = \eta$), akkor

$$f_\gamma(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x - t, t) dt \, ,$$

ill. (pl. $\delta = \xi$ választással) $f_\gamma(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(t, x - t) dt$. Ha $\gamma = \xi \cdot \eta$ (és pl. $\delta = \eta$)

$$f_\gamma(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|t|} f_{\xi,\eta}(\frac{x}{t}, t) dt$$

ill. (pl. $\delta = \xi$ választással) $f_\gamma(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|t|} f_{\xi,\eta}(t, \frac{x}{t}) dt$.

T 34.12 Ha a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változók mindegyikének van várható értéke, akkor a tetszőleges $c_1, c_2, \ldots, c_n$ valós konstansokkal képezett bármely lineáris kombinációjuknak is van, mégpedig

$$M(c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \ldots + c_n\xi_n) = c_1 M(\xi_1) + c_2 M(\xi_2) + \ldots + c_n M(\xi_n)\,.$$

T 34.13 Ha a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változók függetlenek, és mindegyiküknek van várható értéke, akkor szorzatuk várható értéke is létezik, mégpedig

$$M(\xi_1\xi_2 \ldots \xi_n) = M(\xi_1)M(\xi_2)\ldots M(\xi_n)\,.$$

T 34.14 Ha a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változók függetlenek, és mindegyiknek van szórása, akkor összegük szórása is létezik, mégpedig

$$D^2(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) = D^2(\xi_1) + D^2(\xi_2) + \ldots + D^2(\xi_n)\,.$$

T 34.15 Centrális határeloszlástétel Legyen $[\xi_k; k = 1, 2, \ldots]$ olyan független, azonos eloszlású valószínűségi változók sorozata, amelyeknek a szórása létezik, és jelölje m, ill. σ a közös várható értéket, ill. szórást. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \Phi(x)\,.$$

D 34.16 A ξ és η valószínűségi változók **kovarianciáján** értjük és $c(\xi,\eta)$-val jelöljük a

$$c(\xi,\eta) = M[(\xi - M(\xi))(\eta - M(\eta))]$$

várható értéket, feltéve, hogy ez létezik.
Ha $c(\xi,\eta) = 0$, akkor ξ-t és η-t **korrelálatlanoknak** nevezzük.

T 34.17 Ha ξ és η függetlenek, és létezik várható értékük, akkor $c(\xi,\eta) = 0$. (Az állítás megfordítása nem igaz.)

D 34.18 A ξ és η valószínűségi változók **korrelációs együtthatójának** nevezzük és $r(\xi,\eta)$-val jelöljük az

$$r(\xi,\eta) = \frac{c(\xi,\eta)}{D(\xi)D(\eta)}$$

számot, feltéve, hogy ez létezik.

T 34.19 Ha $c(\xi,\eta)$ létezik, akkor $c(\xi,\eta) = M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta)$. Ha $r(\xi,\eta)$ létezik, akkor $|r(\xi,\eta)| \le 1$. Ha valamilyen a, b valós számokkal $\eta = a\xi + b$, akkor $a > 0$ esetén $r(\xi,\eta) = 1$, $a < 0$ esetén $r(\xi,\eta) = -1$.

Feladatok

30.* A ξ, η valószínűségi változók együttes eloszlását a következő táblázattal adjuk meg:

$\eta \setminus \xi$	-1	0	1
0	0.05	0.2	0.1
1	0.2	0.15	0.3

Határozzuk meg

a) ξ és η peremeloszlását!

b) γ és δ együttes eloszlását, ha $\gamma = \xi + \eta$, $\delta = \xi\eta$!

c) γ és δ peremeloszlását!

d) Számítsuk ki ξ és η kovarianciáját!

31. Legyen $[\xi, \eta]$ eloszlása az adott táblázat szerinti. Számítsuk ki ξ és η korrelációs együtthatóját!

$\eta \setminus \xi$	1	0
1	0.5	0.04
0	0.06	0.4

32. ξ és η valószínűségeloszlása legyen az alábbi táblázattal megadva. Számítsuk ki kovarianciájukat!

$\eta \setminus \xi$	2	3	4	6
2	0.12	0.09	0.08	0.03
4	0.07	0.06	0.2	0.05
6	0.04	0.08	0.08	0.1

33. A ξ valószínűségi változó értékei: -2, -1, 1, 2, 3; a hozzájuk tartozó valószínűségek rendre: 0.3, 0.2, 0.1, 0.2, 0.1 . Legyen $\eta = 16\xi^2 - 9\xi$. Mutassuk meg, hogy bár nem függetlenek, korrelálatlanok.

34. ξ és η együttes eloszlását a következő táblázat mutatja:

$\eta \setminus \xi$	2	0	-1
1	p_1	p_2	p_1
0	p_2	p_1	p_2
-2	p_1	p_2	p_1

ξ-ről és η-ról tudjuk, hogy korrelálatlanok. Függetlenek-e?

35. A ξ és η valószínűségi változók együttes eloszlása:

$\eta \setminus \xi$	0	1	2
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$
1	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{4}{12}$

Írjuk fel

a) $\delta = \xi + \eta$,   c) $\delta = |\xi - \eta|$,

b) $\delta = \xi - \eta$, d) $\delta = \xi\eta$.
eloszlását.

36. A $[\xi, \eta]$ kétdimenziós valószínűségi változó lehetséges értékeit a $P_1(0,0)$, $P_2(0,4)$, $P_3(4,0)$, $P_4(4,4)$ pontok által meghatározott négyzet belsejében levő egész koordinátájú pontok alkotják. A $[\xi, \eta]$ bármelyik értékét egyenlő valószínűséggel veszi fel a négyzet középpontja kivételével, amely négyszer akkora valószínűséggel következik be, mint a többi. Számítsuk ki ξ és η korrelációs együtthatóját, és állapítsuk meg, független-e ez a két valószínűségi változó?

37.* A $[\xi, \eta]$ kétdimenziós valószínűségi változó együttes eloszlása

$$P(\xi=i, \eta=k) = \frac{n!}{i!k!(n-i-k)!} p_1^i p_2^k (1-p_1-p_2)^{n-i-k}, \quad 0 \le i+k \le n .$$

Számítsuk ki ξ és η korrelációs együtthatóját!

38. Legyenek ξ és η olyan egész értékű valószínűségi változók, amelyek a 0,1,...,9 értékek bármelyikét egyenlő valószínűséggel veszik fel, egymástól függetlenül. Összegük felírható $\xi + \eta = 10\delta + \gamma$ alakban, ahol $0 \le \gamma \le 1$, és $0 \le \delta \le 9$ egészek. Írjuk fel γ és δ együttes eloszlását, és állapítsuk meg, függetlenek-e?

39. Legyen ξ és η jelentése ugyanaz, mint az előző feladatban. Szorzatuk felírható $\xi\eta = 10\delta + \gamma$ alakban, ahol $0 \le \delta \le 8$, és $0 \le \gamma \le 9$, egészek. Állapítsuk meg, függetlenek-e!

40. Végezzünk egy kísérletsorozatot. A kísérletek kimenetelei legyenek egymástól függetlenek, és figyeljük meg, hogy az A esemény ($P(A) \ne 0$) bekövetkezett-e, vagy nem. Minden kísérlethez rendeljünk egy valószínűségi változót: ξ_i ($i = 1, \ldots, n$) értéke legyen 1, ha A bekövetkezett, 0, ha nem. Legyen $\eta = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$.
a) Határozzuk meg ξ_i eloszlását, várható értékét, szórását!
b) Határozzuk meg η eloszlását, várható értékét, szórását!
c) * Határozzuk meg adott k-ra ξ_k és η korrelációját!

41. Egy célpontra n lövést adunk le. Feltesszük, hogy az egyes lövések eredményei függetlenek, továbbá, hogy a k-adik lövésnél a találat valószínűsége p_k. A találatok száma ξ valószínűségi változó. Számítsuk ki ξ szórását, és bizonyítsuk be, hogy ξ szórásnégyzete nem lehet nagyobb, mint $m(1-\frac{m}{n})$, ahol $m = M(\xi)$.

42. Tegyük fel, hogy az A és B eseményekre $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B|A) = \frac{1}{2}$ és $P(A|B) = \frac{1}{4}$. Legyen $\xi = 1$, ha A bekövetkezik, és $\xi = 0$, ha nem; legyen $\eta = 1$, ha B bekövetkezik, $\eta = 0$, ha nem. Számítsuk ki ξ és η korrelációs együtthatóját! Függetlenek-e?

43. Bizonyítsuk be, ha ξ, η, δ független valószínűségi változók, akkor $\xi + \eta$ független δ-tól!

44. Bizonyítsuk be, ha $\xi_1, \ldots, \xi_n$ független valószínűségi változók, valamint η és γ a ξ_i-knek olyan összegei, hogy mindegyik ξ_i legfeljebb az egyikben fordul elő, akkor η és γ függetlenek!

45. Legyen a adott pozitív szám, és legyen a (ξ_1, ξ_2) pont egyenletes eloszlású a $\{(x,y);\ 0 \le x \le a\ ,\ 0 \le y \le a\}$ négyzetben. Mutassuk meg, hogy az $\eta_1 = |\xi_1 - \xi_2|$ és $\eta_2 = \min(\xi_1, \xi_2)$ változók azonos eloszlásúak!

46.* Legyenek ξ és η független és az $[a, b]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók . Határozzuk meg a következő valószínűségi változók sűrűségfüggvényét:

a) $\xi + \eta$, c) $\xi\eta$, ha $a > 0$,

b) $\xi - \eta$, d) $\frac{\xi}{\eta}$, ha $a > 0$.

47. Legyenek ξ és η exponenciális eloszlású független valószínűségi változók λ_1 ill. λ_2 paraméterrel; $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Határozzuk meg a következő valószínűségi változók sűrűségfüggvényét:

a) $\xi + \eta$ b) $\xi - \eta$ c) $\frac{\xi}{\eta}$

48. Határozzuk meg $\delta = \xi + \eta$ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét, ha ξ és η függetlenek, és

a) ξ egyenletes eloszlású a (2;4) intervallumon, η egyenletes eloszlású az (1;5) intervallumon!

b) ξ egyenletes eloszlású a (0;2) intervallumon, η exponenciális eloszlású $\lambda = 0.5$ paraméterértékkel!

49.* Legyenek ξ és η független valószínűségi változók, sűrűségfüggvényeik pedig

$$f_\xi(x) = \frac{1}{x^2+1} \cdot \frac{1}{\pi}, \qquad f_\eta(y) = \begin{cases} 2y, & \text{ha } 0 < y < 1 , \\ 0 & \text{különben} . \end{cases}$$

Írjuk fel együttes eloszlásfüggvényüket és a $\xi + \eta$ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!

50. Legyen

$$f_{\xi,\eta}(x, y) = \begin{cases} xe^{-x^3 y}, & \text{ha } 1 < x \text{ és } 0 < y , \\ 0 & \text{különben} . \end{cases}$$

Írjuk fel a $\delta = \xi\eta$ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!

51. A ξ és η valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1 + xy(x^2 - y^2)), & \text{ha } -1 < x, y < 1 , \\ 0 & \text{különben} . \end{cases}$$

Írjuk fel $\xi + \eta$ sűrűségfüggvényét!

52. Legyen ξ és η együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{2}}{4\pi} e^{-\frac{x^2 - 2xy + 3y^2}{4}} .$$

a) Írjuk fel $\tau = \xi + \eta$ sűrűségfüggvényét!

b) Független-e ξ és η ?

53. Legyenek ξ és η normális eloszlású, független valószínűségi változók. Írjuk fel $\xi + \eta$ sűrűségfüggvényét, ha

a) ξ és η azonos eloszlásúak!

b) ξ és η különböző eloszlásúak!

54.* Bizonyítsuk be: Ha ξ_1 és ξ_2 két Poisson-eloszlású, független valószínűségi változó λ_1, ill. λ_2 paraméterrel, akkor összegük szintén Poisson-eloszlású (a **T 34.12** tétel alapján $\lambda_1 + \lambda_2$ paraméterrel)!

55.* Bizonyítsuk be, hogy n független, azonos λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó összegének sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0, \\ \lambda^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0\,. \end{cases}$$

56. A **T 34.10** és **T 34.11** tételek segítségével lássuk be, hogy ha r, r_1, r_2 olyan függvények, amelyek eleget tesznek a tételek követelményeinek, akkor

a) diszkrét ξ-re és η-ra a $\delta = r(\xi, \eta)$ valószínűségi változó várható értéke: $M(\delta) = \sum_{i,j} r(x_i, y_j) P(\xi = x_i, \eta = y_j)$, feltéve, hogy az összeg abszolút konvergens,

b) folytonos ξ és η esetén a $\delta_i = r_i(\xi, \eta)$ valószínűségi változóra $(i = 1, 2)$ $M(\delta_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} r_i(x,y) f_{\xi,\eta}(x,y)\,dy\,dx$, feltéve, hogy az integrál abszolút konvergens.

Alkalmazzuk ezeket az eredményeket a $\xi\eta$ valószínűségi változóra.

Megjegyzés: a feladat állításai kettőnél több, véges számú valószínűségi változó esetén is érvényesek.

57. Legyen a ξ_1, ξ_2, ... ,ξ_n valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n e^{-\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 - \ldots - \lambda_n x_n}, & \text{ha } x_i > 0 \ (i = 1, \ldots, n), \\ 0 & \text{különben}\,. \end{cases}$$

a) Írjuk fel mindegyik ξ_i peremsűrűségfüggvényét!

b) Mennyi lesz az $\eta = \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n$ valószínűségi változó várható értéke? (Használhatjuk az előző feladatban bebizonyított tételt)

58.* Jelöljük ξ-vel azt az időt, amely egy adott benzinkútnál két vevő érkezése között eltelik. Tegyük fel, hogy ξ exponenciális eloszlású m várható értékkel. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az egy időegység alatt a benzinkúthoz érkező vevők száma Poisson-eloszlást követ $\frac{1}{m}$ várható értékkel.

59. A villanyégők élettartama általában exponenciális eloszlásúnak tekinthető. Tegyük fel, hogy van két villanyégőnk, és a másodikat akkor kezdjük el használni, amikor az első kiégett. Jelentse η a második kiégéséig eltelt időt. Írjuk fel η sűrűségfüggvényét, ha az eloszlások paramétere a két égőre

a) ugyanakkora!

b) különböző!

60. Módosítsuk az előző feladatot úgy, hogy három db különböző paraméterű égőnk van, és jelöljük η-val azt az időt, mire mind kiég, feltéve, hogy egymás után használjuk őket. Írjuk fel η sűrűségfüggvényét!

61. Egy büfébe átlagosan két percenként érkezik vevő. Egy vevőt három perc alatt szolgálnak ki. Amikor belépünk, nincs ott senki. Ha két kiszolgáló van, mennyi a valószínűsége, hogy amikor végzünk, még senki sem fog várakozni a sorára, feltéve, hogy a vevők egymástól függetlenül érkeznek, és a két vevő érkezése között eltelt idő exponenciális eloszlásúnak tekinthető.

62. Egy üzletbe átlagosan fél percenként érkezik vevő. Mennyi a valószínűsége annak, hogy amikor mi belépünk, az előző percben nyolcan is érkeztek, utánunk

viszont öt percig nem jön senki, ha a vevők egymástól függetlenül érkeznek, és a két vevő érkezése közötti idő exponenciális eloszlásúnak tekinthető ?

63.* Legyen ξ és η együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{5}(x+y^2), & \text{ha } 0 < x < 1 \text{ és } 0 < y < 1 , \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

a) Írjuk fel a peremsűrűségfüggvényeket!
b) Számítsuk ki ξ és η korrelációs együtthatóját!

64. Legyen ξ és η együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 < x < 1 \text{ és } 0 < y < 2(1-x) , \\ 0 & \text{különben} . \end{cases}$$

Számítsuk ki korrelációs együtthatójukat!

65.* Legyen ξ és η együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-3x}, & \text{ha } 0 < x \text{ és } 1 < y < 4 , \\ 0 & \text{különben} . \end{cases}$$

Számítsuk ki ξ és η korrelációs együtthatóját!

66.* A ξ és η valószínűségi változó együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+2y^2-2xy}{2}} .$$

a) Mennyi a kovarianciájuk?
b) Függetlenek-e?

67. Igazoljuk, hogy ha ξ és η független valószínűségi változók, akkor ξ^2 és η^2 is azok!

68. Bizonyítsuk be: Ha a ξ és η valószínűségi változók függetlenek, akkor

$$D^2(\xi\eta) = D^2(\xi)D^2(\eta) + M^2(\xi)D^2(\eta) + M^2(\eta)D^2(\xi)$$

(feltéve, hogy az egyenlőségben szereplő szórások mind léteznek).

69. Igazoljuk, hogy tetszőleges ξ és η valószínűségi változókra

$$D^2(\xi+\eta) = D^2(\xi) + D^2(\eta) + 2D(\xi)D(\eta)r(\xi,\eta)$$

(feltéve, hogy az egyenlőségben szereplő szórások mind léteznek).

70.* Legyenek ξ, η és ζ független valószínűségi változók, ugyanakkora szórással. Legyen továbbá $\tau_1 = \xi+\zeta$, $\tau_2 = \eta+\zeta$. Igazoljuk, hogy $r(\tau_1,\zeta) = r(\tau_2,\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ és $r(\tau_1,\tau_2) = \frac{1}{2}$!

71. Legyen ξ és η két olyan valószínűségi változó, hogy $r(\xi,\eta) = \frac{1}{2}$. Számítsuk ki a $\tau_1 = 1-\xi$ és $\tau_2 = \eta - 1$ valószínűségi változók korrelációs együtthatóját!

72. Legyen ξ és η két olyan valószínűségi változó, amelyeknek létezik, és 0-tól különbözik a szórásuk. Igazoljuk, hogy a

$$\zeta_1 = \frac{\xi - M(\xi)}{D(\xi)} , \qquad \zeta_2 = \frac{\eta - M(\eta)}{D(\eta)}$$

valószínűségi változók korrelációs együtthatója egyenlő a $\zeta_1\zeta_2$ várható értékével!

73. Legyenek a, b, c, d adott valós számok ($a \neq 0$, $c \neq 0$), ξ és η pedig két valószínűségi változó, $D(\xi) \neq 0$, $D(\eta) \neq 0$. Igazoljuk, hogy ha $\zeta_1 = a\xi + b$ és $\zeta_2 = c\eta + d$, akkor $r(\zeta_1, \zeta_2) = \pm r(\xi, \eta)$.

74. A **28.** feladat eredményeit felhasználva lássuk be, hogy ha a $[\xi, \eta]$ valószínűségi vektorváltozó egyenletes eloszlású az origó középpontú egységsugarú körlapon, akkor ξ és η korrelálatlanok (noha uo. már beláttuk, hogy nem függetlenek).

75.* Egy csillagász egy csillag Földtől való távolságát akarja meghatározni. Többször is megméri, és természetesen a légköri viszonyoktól és egyéb tényezőktől függően különböző értékeket kap. A mérések eredményeit tekintsük valószínűségi változóknak, amelyeknek közös várható értéke a meghatározandó d távolság, és közös szórásukat különböző becslések alapján 2 fényévnek tekinthetjük. A csillagász a csillag távolságát a mért értékek számtani közepével akarja becsülni. Hány mérést végezzen, hogy a kapott érték a tényleges értéktől 95%-os valószínűséggel legfeljebb fél fényévvel térjen el?

76.* A tömegközlekedési eszközökön utazók súlya 700 N várható értékű, 100 N szórású valószínűségi változónak tekinthető. Egy 150 személyre tervezett kocsit milyen teherbírásúra tervezzenek, ha a túlterhelés valószínűsége legfeljebb 0.005 lehet?

77.* Egy automata által kis dobozokba adagolt áru tömegének várható értéke 1 kg, a dobozé 0,05 kg 0,005 szórással. A kis dobozokat 60-asával rakják nagy dobozokba. Mekkora lehet maximálisan az adagoláskor fellépő szórás, ha a nagy dobozba kerülő árunak 99%-os valószínűséggel 61.5 és 64.5 kg közötti tömegűnek kell lennie?

78. Egy kompátkelőnél a tapasztalatok szerint a komp által szállított személyautók hossza 4.2 m, 0.5 m szórással. Beálláskor az elülső fal és az első kocsi orra, ill. bármelyik kocsi háta és a mögötte álló orra közötti távolság 0.5 m várható értékű, 0.1 m szórással. 8 oszlopban férnek fel kocsik az 55 m hosszú rakfelületre. 88-ikak vagyunk a sorban, és előttünk csak személyautók állnak. Annak valószínűsége nagyobb, hogy el tudunk menni az első fordulóval, vagy azé, hogy nem?

79. Egy üzem és a vasútállomás között közlekedő teherautók benzinfogyasztása egy-egy fordulóra a terheléstől és a forgalomtól függő valószínűségi változó, 30 l várható értékkel, és 3 l szórással. Ha az üzem tíz teherautót üzemeltet napi négy fordulóval, hány liter benzin fogyasztását tervezze hetenként, hogy 1%-nál kisebb legyen annak valószínűsége, hogy túllépik a keretet. (Öt napos munkahéttel számoljunk.)

80. Számítógéppel 120000 db, a [0,1] intervallumon egyenletes eloszlású véletlen számot állítunk elő, és összeadjuk őket. Mennyi a valószínűsége, hogy az összeg 59900-nál kisebb lesz?

81.[P] Tegyük fel, hogy számítógépünkön a RAND() eljárás a [0,1) intervallumon egyenletes eloszlású véletlen számot generál.

a) A centrális határeloszlástétel segítségével állítsunk elő adott m várható értékű és σ szórású normális eloszlású valószínűségi változót!

b) Az exponenciális és Poisson-eloszlások közötti kapcsolatot kihasználva generáljunk adott λ paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változót!

82. Válasszunk véletlenszerűen két pontot egy egységnyi oldalú négyzetben. A kísérlet szimulálásával adjunk becslést arra, mennyi a valószínűsége, hogy közelebb lesznek egymáshoz, mint ε?

Feltételes eloszlások

D 34.20 Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ és $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r$ tetszőleges valószínűségi változók, és legyenek $y_1, y_2, \ldots, y_r$ tetszőleges valós számok. Jelölje A az $(\eta_1 = y_1, \eta_2 = y_2, \ldots, \eta_r = y_r)$ eseményt. A $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változóknak az A eseményre vonatkoztatott **feltételes eloszlásfüggvényén** azt az n-változós valós F függvényt értjük, amelynek értelmezési tartománya $\mathbf{R^n}$, és ha $P(A) \neq 0$, akkor

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n | y_1, y_2, \ldots, y_r) = P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < x_n | A) ,$$

ha pedig $P(A) = 0$, akkor

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n | y_1, y_2, \ldots, y_r) =$$

$$= \lim_{\substack{h_i \to 0 \\ i=1,2,\ldots,r}} P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_r < x_r | y_1 \le \eta_1 < y_1 + h_1, \ldots, y_r \le \eta_r < y_r + h_r) ,$$

feltéve, hogy ez a határérték létezik (ha nem, akkor nem létezik feltételes eloszlásfüggvény).

D 34.21 Legyen A mint előbb, és legyen F a ξ_1, $\xi_2, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változóknak az A eseményre vonatkoztatott feltételes eloszlásfüggvénye. Ha létezik olyan nemnegatív értékű n-változós valós függvény, amely az n-dimenziós tér bármely korlátos zárt halmazán bármelyik változójának olyan függvénye, amelyik legfeljebb véges számú helyen nem folytonos, és amellyel F előállítható

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n | y_1, y_2, \ldots, y_r) = \int_{-\infty}^{x_1} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, t_2, \ldots, t_n | y_1, y_2, \ldots, y_r) dt_n \ldots dt_1$$

alakban, akkor az f függvényt a ξ_1, ξ_2, ... ,ξ_n valószínűségi változók A eseményre vonatkoztatott **feltételes sűrűségfüggvényének** nevezzük.

M 34.22 Bebizonyítható, hogy ha a feltételes sűrűségfüggvény létezik, akkor

$$\frac{\partial^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n | y_1, y_2, \ldots, y_r)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n | y_1, y_2, \ldots, y_r) ,$$

feltéve, hogy a bal oldal létezik. Továbbá $f_\eta(y|x) = \frac{f_{\xi,\eta}(x,y)}{f_\xi(x)}$, ha $f_\xi(x) \neq 0$.

Diszkrét valószínűségi változók esetében, ha $P(A) \neq 0$, a $P(\xi_1 = x_1, \ldots, \xi_n = x_n | A)$ valószínűségeket a $\xi_1, \ldots, \xi_n$ diszkrét valószínűségi változók **feltételes eloszlásának** nevezzük.

D 34.23 Legyenek ξ és η diszkrét valószínűségi változók, és y_k olyan, hogy $P(\eta = y_k) > 0$. Ekkor a

$$M(\xi | \eta = y_k) = \sum_i x_i P(\xi = x_i | \eta = y_k)$$

értéket a ξ valószínűségi változó $\eta = y_k$ eseményre vonatkoztatott **feltételes várható értékének** nevezzük, feltéve, hogy $\sum_i |x_i| P(\xi = x_i|\eta = y_k)$ is létezik.

Ha ξ és η olyanok, hogy létezik ξ-nek az $\eta = y_0$ eseményre vonatkoztatott feltételes sűrűségfüggvénye, akkor ξ-nek az erre az eseményre vonatkoztatott feltételes várható értéke

$$M(\xi|\eta = y_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x|y_0) dx ,$$

feltéve, hogy ez az integrál létezik.

Ha az $M(\xi|\eta = y)$ várható értéket mint y függvényét írjuk fel, akkor ξ várható értékét mint η függvényét kapjuk meg. Ez egy valószínűségi változó, amely az η-nak függvénye. Jele $M(\xi|\,\eta)$.

P 34.24 Egy piros és egy kék kockával dobunk. Legyen ξ a piros kockán dobott szám, η pedig a két szám összege. Számítsuk ki η-nak a $\xi = 3$ eseményre vonatkoztatott feltételes várható értékét!

Megoldás:

$$P(\eta = i|\xi = 3) = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \leq 3 \text{ vagy } i \geq 10 , \\ \frac{1}{6}, & \text{ha } 4 \leq i \leq 9 . \end{cases}$$

$$M(\eta|\xi = 3) = \sum_{i=4}^{9} i\frac{1}{6} = \frac{39}{6} = 6.5 .$$

P 34.25 Válasszunk a $[0, a]$ intervallumon két számot. A kisebbik legyen ξ, a nagyobb legyen η. Írjuk fel az $F(y|x) = P(\eta < y|\xi = x)$ eloszlásfüggvényt!

Első megoldás. A **22.** feladat megoldásában közölt gondolatmenettel írjuk fel az $f_{\xi,\eta}$ együttes, és az f_ξ peremsűrűségfüggvényt.

$$f_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{a^2}, & \text{ha } 0 \leq x \leq y \leq a , \\ 0 & \text{különben} , \end{cases} \qquad f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{2(a-x)}{a^2}, & \text{ha } 0 \leq x \leq a , \\ 0 & \text{különben} . \end{cases}$$

Ezután számítsuk ki az

$$F(y|x) = \int_{-\infty}^{y} f(s|x) ds = \int_{-\infty}^{y} \frac{f_{\xi,\eta}(x,s)}{f_\xi(x)} ds$$

integrált ($f(s|x)$-et az **M 34.22** megjegyzésnek megfelelően írtuk át). Mivel 0-val nem oszthatunk, $F(y|x)$ csak $0 \leq x < a$ esetén értelmezhető. Ekkor a határokat figyelembe véve $0 < y \leq a$ esetben $F(y|x) = \int_x^y \frac{1}{a-x} ds$, azaz

$$F(y|x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \leq x < a \text{ és } y \leq x , \\ \frac{y-x}{a-x}, & \text{ha } 0 \leq x < a \text{ és } x < y \leq a , \\ 1, & \text{ha } 0 \leq x < a \text{ 0s } a < y . \end{cases}$$

Második megoldás. Ezt a viszonylag jól áttekinthető feladatot oldjuk meg a definíció alapján is. Mivel $P(\xi = x)$ minden x értékre 0,

$$F(y|x) = \lim_{h\to 0} P(\eta < y|x \leq \xi < x + h) = \lim_{h\to 0} \frac{P(\eta < y, x \leq \xi < x + h)}{P(x \leq \xi < x + h)} .$$

Rögtön látjuk, hogy csak $x \in [0, a)$ értékekre tudjuk a feltételes eloszlásfüggvényt értelmezni. Ha ugyanis $x < 0$, akkor $P(x \leq \xi < x + h)$ elég kis h-ra 0 lesz, ha viszont $x \geq a$, akkor minden h-ra 0. Ha $x < a$, akkor elég kis h-ra $x + h < a$ is teljesül.

A $P(\eta < y|x \leq \xi < x+h)$ $(0 \leq x < a)$ értékének meghatározásához y-ra nézve három esetet különböztetünk meg.
Ha $y \leq x$, akkor az η definíciójából következik, hogy ez a feltételes valószínűség 0.
Ha $y > a$, akkor szintén η definíciója szerint ez a feltételes valószínűség 1.
Ha $x < y \leq a$, akkor elég kis h-ra $x + h < y$ teljesül, és ezért $\xi < y$. Végezzük el a következő átalakítást:

$$P(\eta < y|x \leq \xi < x+h) = P(\eta < \xi|x \leq \xi < x+h) + P(\xi \leq \eta < y|x \leq \xi < x+h)$$

A jobb oldalon az első feltételes valószínűség 0, mert η nem lehet kisebb, mint ξ. Mivel $\xi \in [x, x+h)$,

$$P(x+h \leq \eta < y|x \leq \xi < x+h) \leq P(\xi \leq \eta < y|x \leq \xi < x+h) \leq P(x \leq \eta < y|x \leq \xi < x+h)$$

A jobb és bal oldalon álló feltételes valószínűségeket meg tudjuk határozni a $P(AB) = P(A|B)P(B)$ egyenlőség alapján. A **9.** feladatban bizonyított tétel és a **22.** feladathoz hasonlóan kiszámított együttes és peremeloszlásfüggvények segítségével (vagy a ξ és η definíciója alapján közvetlenül) kapjuk, hogy

$$P(x+h \leq \eta < y, x \leq \xi < x+h) = \frac{2h(y-x) - h^2}{a^2},$$

$$P(x \leq \eta < y, x \leq \xi < x+h) = \frac{2h(y-x)}{a^2},$$

$$P(x \leq \xi < x+h) = \frac{h(2(a-x) - h)}{a^2}.$$

Mivel

$$\lim_{h\to 0} \frac{P(x+h \leq \eta < y, x \leq \xi < x+h)}{P(x \leq \xi < x+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{P(x \leq \eta < y, x \leq \xi < x+h)}{P(x \leq \xi < x+h)} = \frac{y-x}{a-x},$$

$$\lim_{h\to 0} P(\eta < y|x \leq \xi < x+h) = F(x|y) = \frac{y-x}{a-x}.$$

Az, hogy a kétféle megoldás közül melyik az egyszerűbb, az mindig az adott feladattól függ, pl. hogy milyen valószínűségeket, milyen eloszlás- és sűrűségfüggvényeket tudunk könnyebben meghatározni.

Feladatok

83.* Legyen a adott pozitív szám. Válasszunk egy tetszőleges pontot egyenletes eloszlás szerint a $T = \{(x,y); 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a\}$ négyzeten. ξ és η értéke legyen a pont x ill. y koordinátájával egyenlő. Írjuk fel az $F(x|y)$ feltételes eloszlásfüggvényt!

84. Válasszunk egy pontot egyenletes eloszlás szerint az origó középpontú egységsugarú körlapon. Legyen ξ értéke a pont x koordinátája, η-é az y koordináta. Írjuk fel az $F(x|\eta = 0)$ feltételes eloszlásfüggvényt!

85.* Legyen a ξ, η, ζ valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2-2y+2z+2)}$$

a) Mutassuk meg, hogy ξ, η, ζ függetlenek!
b) Írjuk fel η és ζ együttes sűrűségfüggvényét!
c) Írjuk fel az η és ζ változók $f(y|z)$ feltételes sűrűségfüggvényét!

86. Legyen a ξ és η valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{\xi,\eta}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(x+y) & \text{ha } 0<x<2 \text{ és } \frac{3}{2}x<y<3\\ 0 & \text{különben}\end{cases}$$

a) Írjuk fel az $F(y|x)$ feltételes eloszlásfüggvényt!
b) Írjuk fel $M(\xi|\eta)$-t!
c) Írjuk fel $\delta = M(\xi|\eta)$ eloszlásfüggvényét!

87. Legyen ξ és η együttes eloszlása a következő:

$\eta \setminus \xi$	1	2	3
1	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{2}{12}$
2	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$
3	0	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$

Írjuk fel $M(\eta|\xi)$ eloszlását!

88. Legyen ξ és η ugyanaz, mint a **36.** feladatban. Írjuk fel $\delta = M(\eta|\xi)$ eloszlásfüggvényét!

89. Egy piros és egy kék kockával dobunk. Jelentse ξ a piros kockán dobott számot, η a két szám összegét. Írjuk fel $M(\xi|\eta)$ eloszlását!

90. Bizonyítsuk be, hogy amennyiben léteznek a szükséges mennyiségek, $M(M(\xi|\eta)) = M(\xi)$!

91. Legyenek a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_j, \dots$ valószínűségi változók azonos eloszlásúak. Legyen továbbá $\eta = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_\nu$, ahol ν is valószínűségi változó, amely a ξ_j változóktól független, és létezik várható értéke. Számítsuk ki η várható értékét!

92. Legyen ν a $\xi_1, \xi_2, \dots$ valószínűségi változóktól független, pozitív egész értékeket felvevő valószínűségi változó. Tegyük fel, hogy ν-nek és minden ξ_i-nek van várható értéke (esetleg mind különböző). Legyen $\eta = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_\nu$.
a) Mutassuk meg, hogy $M(\eta) = \sum_{j=1}^{\infty} M(\xi_j)P(\nu \geq j)$.
b) Ebből a képletből vezessük le, az előző feladat eredményét!

93. Legyen a $[\xi,\eta]$ valószínűségi változó egyenletes eloszlású az ABC háromszögön, ahol $A(0,3)$, $B(3,0)$, $C(5,5)$. Írjuk fel az $F(x|y)$ és $F(y|x)$ eloszlásfüggvényeket!

94. Legyen a $[\xi,\eta]$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2-2xy+2y^2)} .$$

a) Mennyi $M(\xi|\eta=2)$?
b) Írjuk fel, hogy a $\delta = M(\xi|\eta)$ valószínűségi változó hogyan függ η-tól!

95. Egy játékos, jelöljük A-val, egy társasággal játszik. A játék "igazságos", azaz minden fordulóban mindenki számára a nyereség várható értéke 0. Legyen ξ_i

értéke az A játékos tőkéje az i-edik forduló után. Legyen $\xi_0 = 100$, és tegyük fel, egy fordulóban 20 ft-ot lehet nyerni. Mennyi lesz
a) $M(\xi_3)$, b) $M(\xi_3|\xi_2 = 120)$, c) $M(\xi_10|\xi_2 = 120)$,
d) $M(\xi_{i+k}|\xi_i = m)$, ha $P(\xi_i = m) \neq 0$, és $k = 1, 2, \dots$.

96. Írjuk fel $M(\xi|\eta)$ eloszlásfüggvényét, ha ξ és η együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{\xi,\eta} = \begin{cases} \frac{4}{5}(x+3y)e^{-x-2y}, & \text{ha } 0 < x,\ 0 < y\ , \\ 0 & \text{különben}\ . \end{cases}$$

97. Válasszunk (egyenletes eloszlás szerint) a (0,1) intervallumon egy ξ számot, majd egy nála nagyobbat (egyenletes eloszlás szerint az $(x, 1)$ intervallumon), η-t.
a) Írjuk fel együttes eloszlás- és sűrűségfüggvényüket!
b) Írjuk fel a nagyobbik peremeloszlásfüggvényét!

98. Válasszunk a (0,1) intervallumon egy ξ számot, majd egy nála kisebbet, η-t, és egy nála nagyobbat, τ-t (valamennyit egyenletes eloszlás szerint). Írjuk fel az $F_{\eta,\tau}(y, z)$ együttes eloszlásfüggvényt!

99. Legyenek ξ, η független valószínűségi változók, $P(\xi = j) = P(\eta = j) = pq^{j-1}$ $(j = 1, 2, \dots)$, ahol $p \in (0, 1)$ és $q = 1 - p$.
a) Számítsuk ki a $P(\xi = j|\xi + \eta = k)$, $k \geq 2$ valószínűséget!
b) Számítsuk ki az $M(\xi|\xi + \eta = k)$, $k \geq 2$ feltételes várható értéket!

100. Legyenek ξ és η azonos eloszlású, független, diszkrét valószínűségi változók, amelyek az 1, 2, ... értékeket veszik fel, rendre p_1, p_2, ... valószínűségekkel.
a) Számítsuk ki a $M(\xi|\xi + \eta)$ feltételes várható értéket!
b) Írjuk fel a $\delta = M(\xi|\xi + \eta = k)$ valószínűségi változó eloszlását!

101. Tegyük fel, hogy ξ és η azonos eloszlású, független, folytonos valószínűségi változók, és sűrűségfüggvényük sehol sem nulla. Írjuk fel a sűrűségfüggvények ismeretében a $\delta = M(\xi|\xi + \eta)$ eloszlását, feltéve, hogy minden olyan integrál abszolút konvergens, amelyik a megoldás során szerepel. (Használjuk ki a hasonlóságot az előző feladattal, valamint a diszkrét eloszlásoknál szereplő valószínűségek és a folytonos eloszlások sűrűségfüggvényei közötti analógiákat).

35. fejezet

Matematikai statisztika

D 35.1 A statisztikai vizsgálat tárgyát képező halmazt az elemekhez tartozó számértékekkel együtt **statisztikai sokaságnak** nevezzük.

M 35.2 A statisztikai vizsgálat tárgyát tehát mindig egy konkrét halmaz elemei és az elemek valamely számszerűen megadható tulajdonsága képezi; valójában tehát egy valós értékű függvény vizsgálatáról van szó.

D 35.3 A statisztikai sokaságokat leíró függvény többnyire valószínűségi változó; eloszlását a **statisztikai sokaság eloszlásának** mondjuk.

M 35.4 A matematikai statisztika ténylegesen a statisztikai sokaságnak csak egy kis részével számol. A tekintetbe vett részhalmaz elemeihez adott esetben konkrét valós számok tartoznak, amelyek azonban az egyes megfigyelésekhez tartozó véletlenszerű értékek; ezért statisztikai törvényszerűségek vizsgálatakor a vizsgált részhalmaz elemeit a hozzájuk tartozó számértékekkel együtt valószínűségi változóknak kell tekinteni, amelyek a gyakorlatban egymástól páronként függetleneknek és a statisztikai sokaság eloszlásával egyező eloszlásúaknak tekinthetők.

D 35.5 Adott ξ valószínűségi változóval megegyező eloszlású és egymástól független valószínűségi változók valamely $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ rendszerét a ξ-hez tartozó **n elemű mintának**, a minta kiválasztását **mintavételnek** nevezzük.

Az empirikus eloszlás és adatai

D 35.6 Tekintsünk egy S statisztikai sokaságot; legyen ξ az S-et leíró valószínűségi változó. Képezzünk S-ből egy n elemű mintát: $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. A minta elemeinek egy adott mintavétellel kapcsolatos konkrét számértékei legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_n$; minden egyes x_i-hez rendeljük hozzá az $1/n$ valószínűséget. Az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ értékek között egyenlők is lehetnek; ha vannak ilyenek, akkor mindegyikükhöz külön-külön hozzárendeljük az $1/n$ valószínűséget. Ily módon egy diszkrét valószínűségeloszláshoz jutunk; ennek eloszlásfüggvényét F_n-nel jelölve,

$$F_n(x) = \frac{q_x}{n}, \tag{1}$$

ahol q_x azoknak a mintabeli x_i-knek a számát jelenti, amelyek kisebbek x-nél. Az F_n-nel leírt eloszlást az S statisztikai sokaság egy (az adott minta szóban forgó konkrét értékeihez tartozó) **empirikus eloszlásának**, az F_n függvényt pedig az S egy (az adott minta szóban forgó konkrét értékeihez tartozó) **empirikus eloszlásfüggvényének** nevezzük. A ξ valószínűségi változó (általában ismeretlen) várható értékét, szórását, eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét a matematikai statisztikában ξ **elméleti várható értékének**, **elméleti szórásának** stb. nevezzük; de ha félreértéstől nem kell tartani, akkor az "elméleti" jelzőt elhagyjuk (az "empirikus" jelzőt sohasem hagyjuk el).

D 35.7 Legyen $[a,b)$ olyan intervallum, amely az előző definícióbeli x_i értékek mindegyikét tartalmazza. Képezzük az $[a,b]$ intervallumnak az

$$a = v_0 < v_1 < \dots < v_{r-1} < v_r = b$$

osztáspontokkal meghatározott olyan beosztását, amelyben

$$v_1 - v_0 = v_2 - v_1 = \dots = v_r - v_{r-1};$$

a beosztás részintervallumainak ezt a közös hosszát jelöljük h-val. A $[v_{j-1}, v_j)$ intervallumba eső x_i értékek számát q_j-vel jelölve, definiáljuk a következő függvényt:

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \notin [a,b), \\ \frac{q_j}{nh}, & \text{ha } x \in [v_{j-1}, v_j). \end{cases} \tag{2}$$

A φ függvényt az S statisztikai sokaság egy (az adott minta szóban forgó konkrét értékeihez tartozó) **empirikus sűrűségfüggvényének**, grafikonját pedig **sűrűséghisztogramnak** vagy röviden **hisztogramnak** nevezzük.

M 35.8 A gyakorlatban minden olyan esetben, amikor a mintaelemek egy adott mintavételhez tartozó konkrét értékeit nem, csupán bizonyos intervallumokba (osztályokba) való esésének gyakoriságát ismerjük, az ugyanazon intervallumba eső értékek mindegyikét az intervallum felezőpontjának megfelelő értékkel (az osztályközéppel) helyettesítjük. Ha a minta konkrét értékeit ugyan ismerjük, de a mintaelemek száma nagy, a számítások egyszerűsítése végett a minta értékeit osztályokba soroljuk, és az előző megjegyzésnek megfelelően járunk el, azaz minden érték helyett az illető osztályközepet tekintjük.

D 35.9 A ξ valószínűségi változó által leírt S statisztikai sokaság egy empirikus eloszlásának

$$\overline{x}_\xi = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \tag{3}$$

várható értékét **empirikus várható értéknek**,

$$s_\xi = \sqrt{\frac{1}{n}\left[(x_1 - \overline{x})^2 + \dots + (x_n - \overline{x})^2\right]} \tag{4}$$

szórását **empirikus szórásnak**, az

$$s_\xi^* = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left[(x_1 - \overline{x})^2 + \dots + (x_n - \overline{x})^2\right]} \tag{5}$$

képlettel számított értéket pedig **korrigált empirikus szórásnak** nevezzük. Ha nem okoz félreértést, akkor a ξ indexet nem írjuk ki.

Feladatok

1.▷ Egy bizonyos műanyagból készült mintadarab szakítószilárdságának mérésére az egész sokaságból 20 elemű mintát vettek. A mintavétel konkrét értékei (N/m^2-ben, nagyság szerint rendezve) a következők:

354	359	364	369	373	375	376	377	379	380
381	383	384	385	387	390	393	396	400	408

a) Adjuk meg és ábrázoljuk az adatokhoz tartozó empirikus eloszlásfüggvényt és a hisztogramot (a $[354, 409)$ intervallum $h = 5$ hosszúságú részintervallumokra való beosztásához).
b) Számítsuk ki az empirikus várható értéket, az empirikus szórást és a korrigált empirikus szórást.

2.▷ Az előző feladat adatait használva becsüljük meg annak valószínűségét, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott mintadarab szakítószilárdsága kisebb, mint $361 N/m^2$.

3.▷ Egy ipari robot kezének a működés egyik fázisában egy egyenestől való távolságára a minőségi előírás 5.2 ± 1 mm. A robot működési pontosságának vizsgálatára végzett 40 mérésről csak annyit tudunk, hogy a mért ξ érték hányszor esett a következő táblázat szerinti intervallumokba:

$\xi \in$	[1, 2)	[1, 2)	[1, 2)	[1, 2)	[1, 2)	[1, 2)	[1, 2)
Gyakoriság	1	5	7	14	7	4	2

a) Mutassuk meg, a hisztogram megszerkesztésével, hogy a vizsgált statisztikai sokaságot leíró ξ valószínűségi változó jó közelítéssel normális eloszlású.
b) Várhatóan milyen valószínűséggel teljesülnek a minőségi előírások?

4. Automata töltőgép motorolajat tölt dobozokba. A dobozokba töltött olaj mennyisége az előírt 1 litertől felfelé is, lefelé is eltérhet. Egy 15 mérésből álló méréssorozat során tapasztalt eltéréseket tartalmazza a következő táblázat:

Eltérés ml-ben	[-15,-10)	[-10,-5)	[-5,0)	[0,5)	[5,10)	[10,15)
Eltérés gyakorisága	1	2	5	4	2	1

Szerkesszük meg az adatokhoz tartozó
a) empirikus eloszlásfüggvényt,
b) sűrűséghisztogramot.
Számítsuk ki
c) az empirikus várható értéket,
d) az empirikus szórást és a korrigált empirikus szórást.

5. Bizonyos iparágban dolgozó szakmunkások havi keresetének eloszlását akarják meghatározni. E célból véletlenszerűen kiválasztanak 220 szakmunkást,

és feljegyezik havi keresetüket. Az így kapott adatokat (9 osztályba sorolva) az alábbi táblázat tartalmazza. A második sorban lévő számok azt mutatják, hogy hány szakmunkásnak a keresete esik az illető számmal egy oszlopban lévő intervallumba, melynek határai eFt-ban értendők.

[6, 6.5)	[6.5, 7)	[7, 7.5)	[7.5, 8)	[8, 8.5)	[8.5, 9)	[9, 9.5)	[9.5, 10)	[10, 10.5)
3	7	30	48	72	40	10	7	3

a) Rajzoljuk meg az adatokhoz tartozó empirikus eloszlásfüggvényt és a hisztogramot.
b) Számítsuk ki a mintához tartozó empirikus várható értéket.
c) Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott szakmunkás havi keresete legalább akkora, mint a felmérésben résztvevő munkások átlagkeresete.

6. Egy videofilm-kölcsönzőben felmérést végeztek arról, hogy egy bizonyos kategóriába tartozó új film megjelenésének napján mennyi volt a kölcsönzések száma. A felmérésre vonatkozó 10 elemű mintának egy adott mintavétellel kapcsolatos konkrét értékei a következők:

16	27	21	30	26	11	21	31	19	28

a) Ábrázoljuk az adatokhoz tartozó empirikus eloszlásfüggvényt.
b) Várhatóan milyen valószínűséggel lesz egy új film megjelenésének első napján a kölcsönzések száma 20-nál kevesebb?

7. Egy szabadidő-központban azt vizsgálták, hogy a hétfői napokon egy személy összesen hány percet tölt egy bizonyos sportszer használatával. Egy 50 elemű minta adott mintavétellel kapcsolatos konkrét értékei a következők:

8	5	9	12	15	18	2	3	5	4
2	8	6	10	13	14	8	10	9	13
20	2	4	3	7	7	6	7	6	16
19	11	3	3	8	4	11	10	9	8
6	6	6	7	8	12	6	7	19	7

a) Ábrázoljuk az adatokhoz tartozó empirikus eloszlásfüggvényt!
b) Várhatóan milyen valószínűséggel fog egy személy legalább 10 percet tölteni a sportszerrel?
c) Készítsük el az $[1, 21)$ intervallum 4 egység hosszúságú részintervallumokra való bontásához tartozó hisztogramot.

8. Egy rendelőintézetben a fogtömések számára vonatkozóan statisztikai megfigyeléseket végeztek. A véletlenszerűen kiválasztott 30 napon, a naponként végzett fogtömések számát feljegyezve, a következő számok adódtak:

8	9	15	5	13	14	5	6	12	13
3	6	5	11	6	7	4	11	23	25
32	25	21	6	7	11	12	8	15	16

a) Készítsük el az adatokhoz tartozó empirikus eloszlásfüggvényt.
b) Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott napon a fogtömések száma 20-nál kisebb.
c) Készítsük el az adatokhoz tartozó hisztogramot úgy, hogy a $[3, 33)$ intervallum olyan beosztását tekintjük, amelyben a szomszédos osztópontok távolsága 3-mal egyenlő.

9. Egy áruház megnyitásakor a vásárlók életkorának vizsgálatára egy 30 elemű mintát vettek. Az adatok a következők:

43	33	18	23	19	16	51	55	18	26
25	21	17	30	28	27	27	17	32	21
35	40	39	36	48	47	38	41	50	19

Szerkesszük meg az adatokból a hisztogramot a $[16, 56)$ intervallum 4 egyenlő részre osztásával.

10. A Budapesti Műszaki Egyetem Közlekedésmérnöki Karán tanuló másodéves hallgatók közül 20 véletlenszerűen kiválasztott szigorlatozó az első szigorlati írásbelin a következő pontszámokat érte el:

17	22	21	15	1	12	31	32	21	44
11	59	21	20	30	31	40	13	11	20

Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott másodéves hallgató az első szigorlati írásbelijén
a) 30 pontnál többet,
b) 20 pontnál kevesebbet
ért el.

Paraméterbecslések

D 35.10 Legyen megadva egy S statisztikai sokaság, és tegyük fel, hogy az S-et leíró valószínűségi változó eloszlásfüggvénye – egy vagy több paraméter értékének kivételével – ismeretes; az egyetlen ismeretlen paramétert, illetve az ismeretlen paraméterekből mint koordinátákból képezett vektort jelöljük a-val. Az a paraméter becsléséhez az S sokaságból n elemű mintát veszünk, és a $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ mintaelemek valamely

$$\hat{a} : (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \longmapsto \hat{a}(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$$

függvényét képezzük. Ha ez a függvény bizonyos (a probléma természete által megkívánt) követelményeknek (torzítatlanság, aszimptotikusan torzítatlanság, konzisztencia, ...l. Szász Gábor Matematika III) eleget tesz, akkor a mintaelemek bármely konkrét $x_1, x_2, ..., x_n$ értékrendszeréhez tartozó

$$\hat{a}_0 = \hat{a}(x_1, x_2, ..., x_n)$$

függvényértéket az a paraméter közelítő értékének fogadjuk el.

D 35.11 Egy n elemű minta elemeinek tetszőleges függvényét **statisztikai függvény**nek nevezzük. Az olyan statisztikai függvényt, amelyet egy paraméter közelítésére használunk, az illető paraméter becslésének mondjuk.

M 35.12 A következő definíció néhány, gyakran előforduló statisztikai függvényre vonatkozik.

D 35.13 Valamely statisztikai sokaságot leíró ξ valószínűségi változóra vonatkozó $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ mintához rendelt

$$\bar{\xi} = \frac{1}{n}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) \tag{6}$$

statisztikai függvényt **mintaátlag**nak, a

$$\sigma_\xi = \sqrt{\frac{1}{n}\left[(\xi_1 - \bar{\xi})^2 + \ldots + (\xi_n - \bar{\xi})^2\right]} \tag{7}$$

statisztikai függvényt a **minta szórásának**, a

$$\sigma_\xi^* = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left[(\xi_1 - \bar{\xi})^2 + \ldots + (\xi_n - \bar{\xi})^2\right]} \tag{8}$$

statisztikai függvényt pedig a **minta korrigált szórásának** nevezzük.

A legnagyobb valószínűség módszere

M 35.14 A leginkább elterjedt paraméterbecslési eljárások egyike a legnagyobb valószínűség (angolul: maximum-likelihood) módszere. A módszer lényege az, hogy egy speciális statisztikai függvénynek a legnagyobb értékét (abszolút maximumát) keressük, és azt az értéket fogadjuk el a szóban forgó paraméter becsléseként, ahol a függvény ezt a legnagyobb értéket felveszi.

D 35.15 Legyen ξ az S statisztikai sokaságot leíró valószínűségi változó, és legyen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ az S sokaságból képzett n elemű minta. Ha ξ diszkrét, akkor az

$$l:\ \xi \longmapsto P(\xi = \xi_1)P(\xi = \xi_2)\ldots P(\xi = \xi_n) \tag{9}$$

függvényt, ha pedig ξ folytonos és sűrűségfüggvénye f, akkor az

$$l:\ \xi \longmapsto f(\xi_1)f(\xi_2)\ldots f(\xi_n) \tag{10}$$

függvényt a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ mintához tartozó **likelihood-függvény**nek nevezzük.

M 35.16 A konkrét számításhoz az n elemű minta olyan rögzített

$$\xi_i = x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

értékrendszerét vesszük, ahol a likelihood-függvény mindegyik tényezője pozitív, és ezt az értékrendszert a likelihood-függvénybe helyettesítjük. A helyettesítés után a likelihood-függvényben változóként csak az ismeretlen a valós paraméter, illetve az $a_1, a_2, \ldots, a_r$ valós paraméterek maradnak. Végül meghatározzuk azt a $\hat{a}$, illetve $(\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_r)$ helyet, ahol a likelihood-függvény értéke a legnagyobb, és ezt fogadjuk el az ismeretlen paraméter(ek) becsléseként. Ha az l függvény több helyen is felveszi legnagyobb értékét, akkor a paraméter(ek) becsléseként azt a helyet választjuk, amelyik a problémára vonatkozó egyéb ismereteinkkel leginkább összhangban van. Ha a likelihood-függvény az ismeretlen paraméter szerint legalább kétszer folytonosan differenciálható (illetve, több paraméter esetén, a paraméterek szerint legalább kétszer parciálisan differenciálható és az összes második parciális derivált folytonos), akkor a legnagyobb valószínűségű becslés kiszámításához a differenciálszámítást is segítségül vehetjük (I.T 11.2, T 11.3 és T 11.7, illetve T15.7 és T 15.8).

Feladatok

11.ᐅ Egy városrészben 10, véletlenszerűen kiválasztott napon összesítették a közlekedési balesetek számát. Az adatok a következők:

9	6	10	7	9	8	12	5	7	10

Korábbi elemzések azt mutatták, hogy a balesetek száma Poisson-eloszlású valószínűségi változó. A fenti adatok alapján adjunk legnagyobb valószínűségű becslést az eloszlás λ paraméterére.

12.ᐅ Legyen ξ valamely exponenciális eloszlású valószínűségi változó

$$f(x;\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

sűrűségfüggvénnyel. Határozzuk meg a λ legnagyobb valószínűségű becslését.

13.ᐅ Legyártott alkatrészek egy bizonyos méretének (jelöljük ξ-vel) ellenőrzésére vonatkozó 10 elemű mintának egy konkrét mintavétellel kapcsolatos értékei (mm-ben) a következők:

10.3	10.1	9.9	10.4	10.3	11.1	10.8	10.7	9.8	10.2

A tapasztalat szerint ξ normális eloszlású valószínűségi változó ismeretlen várható értékkel, illetve szórással. Határozzuk meg ξ várható értékének és szórásának legnagyobb valószínűségű becslését.

14.ᐅ Legyen az S statisztikai sokaságot leíró valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x;a,b) = \begin{cases} \frac{1}{2(\sqrt{b}-\sqrt{a})\sqrt{x}}, & \text{ha } x \in (a,b), \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

ahol $0 < a < b$. Adjunk legnagyobb valószínűségű becslést az a és b paraméterekre.

15. Legyen az S statisztikai sokaságot leíró valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x;a) = \begin{cases} a e^{-a(x-1)}, & \text{ha } x \geq 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Határozzuk meg az a paraméter legnagyobb valószínűségű becslését.

16. Legyen ξ az (a,b) intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg az a és b paraméterek legnagyobb valószínűségű becslését.

17. Az S statisztikai sokaság eloszlásának sűrűségfüggvényéről tudjuk, hogy

$$f(x;a)=\begin{cases} e^{-(x-a)}, & \text{ha } a \le x, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

alakú, ahol a tetszőlegesen megadott valós szám. Állapítsuk meg az a paraméter legnagyobb valószínűségű becslését.

18. Adjunk a b paraméterre legnagyobb valószínűségű becslést, ha tudjuk, hogy az S statisztikai sokaságot leíró valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f(x;b)=\begin{cases} \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} b-1}, & \text{ha } 0 \le x \le b, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

19. Húsz, azonos típusú személygépkocsi 100 kilométerenkénti fogyasztását tizedliter pontossággal mérve, a következő adatokat kapták:

6.3	6.6	6.5	6.6	6.8	6.4	6.7	6.9	6.7	6.6
6.6	6.7	6.8	6.5	6.5	6.6	6.4	6.6	6.7	6.5

a) Az adatokhoz és a [6.3, 7) intervallum

$$6.3 < 6.4 < 6.5 < \ldots < 6.9 < 7$$

beosztásához tartozó sűrűséghisztogram megrajzolásával szemléltessük, hogy a szóban forgó statisztikai sokaságot leíró valószínűségi változó jól közelíthető normális eloszlással.
b) A statisztikai sokaságot leíró valószínűségi változót normális eloszlásúnak feltételezve, határozzuk meg a sűrűségfüggvényében szereplő paraméterek legnagyobb valószínűségű becslését.

20. Legyen ξ folytonos valószínűségi változó

$$f(x;m,\sigma)=\begin{cases} 0, & \text{ha } x<0, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}e^{\frac{-(\ln x-m)^2}{2\sigma^2}}, & \text{ha } x>0 \end{cases}$$

sűrűségfüggvénnyel (az ilyen valószínűségi változót lognormálisnak nevezzük). Határozzuk meg az m paraméter legnagyobb valószínűségű becslését.

21.[P] Legyen ξ diszkrét valószínűségi változó

$$P(\xi=k)=p^k q \quad (0<p<1, \quad q=1-p; \quad k=0,1,\ldots)$$

eloszlással (az ilyen valószínűségi változót végtelen geometriai eloszlásúnak nevezzük). Határozzuk meg a p paraméter legnagyobb valószínűségű becslését.

Megbízhatósági intervallum

D 35.17 Legyen a valamely statisztikai sokaságot leíró valószínűségi változó (egyik) paramétere, p pedig a $(0,1)$ intervallum tetszőlegesen választott eleme. Ha a_1 és a_2 olyan valós számok, hogy $a_1 < a_2$ és $P(a_1 \leq a \leq a_2) = 1 - p$, akkor az $[a_1, a_2]$ intervallumot az a paraméter $100(1-p)$%-os **megbízhatósági intervallumának**, a $100(1-p)$ számot pedig a **megbízhatóság szintjének** nevezzük.

D 35.18 Egy η valószínűségi változót n szabadságfokú **t-eloszlásúnak** (vagy n szabadságfokú **Student-eloszlásúnak**) nevezünk, ha megadhatók olyan standard normális eloszlású és egymástól független $\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_n$ valószínűségi változók, hogy

$$\eta = \frac{\sqrt{n}\xi_0}{{\xi_1}^2 + {\xi_2}^2 + \ldots + {\xi_n}^2}. \tag{11}$$

D 35.19 Egy η valószínűségi változót n szabadságfokú χ^2**-eloszlásúnak** nevezünk, ha megadhatók olyan standard normális eloszlású és egymástól független $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ valószínűségi változók, hogy

$$\eta = {\xi_1}^2 + {\xi_2}^2 + \ldots + {\xi_n}^2. \tag{12}$$

T 35.20 Legyen ξ egy adott statisztikai sokaságot leíró ismert σ szórású, de ismeretlen m várható értékű normális eloszlású valószínűségi változó, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pedig a ξ-hez tartozó valamely minta adott mintavétellel kapcsolatos konkrét értékei. Az m-nek az $\overline{x}$ empirikus várható értékre szimmetrikus $100(1-p)$%-os megbízhatósági intervalluma:

$$\left[\overline{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_p,\ \overline{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_p\right], \tag{13}$$

ahol u_p a standard normális eloszlás Φ eloszlásfüggvényével képezett

$$\Phi(u_p) = 1 - \frac{p}{2} \tag{14}$$

egyenlet megoldása.

T 35.21 Legyen ξ egy adott statisztikai sokaságot leíró ismeretlen σ szórású és ismeretlen m várható értékű normális eloszlású valószínűségi változó, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pedig a ξ-hez tartozó valamely minta adott mintavétellel kapcsolatos konkrét értékei. Az m-nek az $\overline{x}$ empirikus várható értékre szimmetrikus $100(1-p)$%-os megbízhatósági intervalluma:

$$\left[\overline{x} - \frac{s^*}{\sqrt{n}}t_p,\ \overline{x} + \frac{s^*}{\sqrt{n}}t_p\right], \tag{15}$$

ahol t_p az a pozitív valós szám, amely az $n-1$ szabadságfokú Student-eloszlású t valószínűségi változóra felírt

$$P(\mid t \mid > t_p) = p \tag{16}$$

egyenlet megoldása.

T 35.22 Legyen ξ egy adott statisztikai sokaságot leíró ismeretlen σ szórású normális eloszlású valószínűségi változó, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pedig a ξ-hez tartozó valamely minta adott mintavétellel kapcsolatos konkrét értékei. A σ szórás $100(1-p)$%-os megbízhatósági intervalluma:

$$\left[s\sqrt{\frac{n}{v_{1p}}},\ s\sqrt{\frac{n}{v_{2p}}}\right], \tag{17}$$

ahol v_{1p} és v_{2p} olyan pozitív valós számok, amelyek az $n-1$ szabadságfokú χ^2-eloszlású v valószínűségi változóra felírt

$$P(v > v_{1p}) = \frac{p}{2}, \text{ illetve } P(v > v_{2p}) = 1 - \frac{p}{2} \tag{18}$$

egyenlet megoldásai.

M 35.23 Az előző három tételben szereplő u_p, t_p, illetve v_{1p}, v_{2p} értékek az 1., 3., illetve 4. táblázatokból olvashatók ki.

Feladatok

22.$^{\triangleright}$ Villanyégők élettartamát normális eloszlásúnak találták $\sigma = 180$ óra szórással; 100 elemű mintavétel során a megvizsgált égők élettartamának átlagára $\overline{x} = 1000$ óra adódott. 99%-os megbízhatósági szinten mely intervallumba esik az egész sokaság várható értéke?

23.$^{\triangleright}$ Egy tó vizének szennyezettségére a víz forráspontjából akarnak következtetni. A tó 10, véletlenszerűen kiválasztott részéből vett vízminta esetén az elméleti forrásponttól való következő ξ eltéréseket tapasztalták ($^\circ C$-ban):

0.2	1	-1.2	-0.7	1.1	0.3	-0.3	1.5	3.7	-1.3

Feltéve, hogy a ξ valószínűségi változó normális eloszlású $\sigma = 1.4$ szórással, adjunk 95%-os szinten megbízhatósági intervallumot ξ várható értékére nézve.

24.$^{\triangleright}$ Tegyük fel, hogy egy S statisztikai sokaságot leíró ξ valószínűségi változó normális eloszlású, de ξ várható értéke is, és szórása is ismeretlen. Az S-ből képezett 16 elemű mintának egy adott mintavétellel kapcsolatos konkrét szám-
értékeiből képezett $\overline{x}$ empirikus várható érték 42-vel, az s empirikus szórás pedig 4.6-del egyenlő. Adjunk 95%-os megbízhatósági szinten $\overline{x}$-ra szimmetrikus megbízhatósági intervallumot a ξ elméleti várható értékére.

25.$^{\triangleright}$ Bizonyos ón-ólom ötvözet ξ olvadáspontjának megállapítására 24 véletlenszerűen kiválasztott mintadarabon mérést végeztek. A mérési eredményeket (az egyes mintadaraboknál mért olvadáspontokat $^\circ C$-ban) a következő táblázat tartalmazza:

330	328.6	342.4	334	337.5	341	343.3	329.5
322	331	336.4	326.5	327.3	338	331	332.3
345	338.5	329.7	325.8	322.6	333	339.2	340

a) A $[320, 350]$ intervallum

$$320 < 325 < 330 < \ldots < 345 < 350$$

beosztásához és a fenti adatokhoz tartozó hisztogram megrajzolásával szemléltessük, hogy ξ jól közelíthető normális eloszlással.
b) A ξ-ről most már feltételezve, hogy normális eloszlású valószínűségi változó, adjunk az ismeretlen várható értékre 90%-os, majd 95%-os megbízhatósági szinten az empirikus várható értékre szimmetrikus megbízhatósági intervallumot.

26.* Mosógépet gyártó vállalatnál a termelés egyik fázisának megtervezésében előzetes becslést kell adni arra, hogy lemezből készült alkotórészén mennyi a zománcfesték ξ száradási ideje. Egy 30 elemű mintának egy adott mintavétellel kapcsolatos konkrét értékeihez tartozó empirikus várható értékre 56 perc, az empirikus szórásra 12 perc adódott. Feltéve, hogy ξ normális eloszlású valószínűségi változó, adjunk ξ elméleti várható értékére 95%-os szinten megbízhatósági intervallumot.

27.* Egy szolgáltató vállalatnál abból a célból, hogy megfigyeljék az egy ügyféllel való foglalkozás átlagos idejét, felmérést végeztek. Az adatokat (percben) a következő táblázat tartalmazza:

11	14	23	17	19	21	25	28	18	18
21	19	29	17	16	24	20	10	19	17

Feltételezve, hogy az egy ügyféllel való foglalkozás ξ ideje normális eloszlású valószínűségi változó,
a) határozzuk meg a ξ várható értékére vonatkozó megbízhatósági intervallumot 95%-os szinten, valamint
b) adjunk 90%-os szinten megbízhatósági intervallumot a ξ elméleti szórására.

28.* Legyártott alkatrészekből 10 elemű mintát véve, egy bizonyos furat ξ átmérőjére cm-ben a következő mérési eredmények adódtak:

9.68	9.76	9.78	9.61	9.62	9.71	9.73	9.65	9.61	9.76

Feltéve, hogy ξ normális eloszlású valószínűségi változó, adjunk ξ szórására megbízhatósági intervallumot 90%-os szinten.

29.* Egy bizonyos lőporkeverék egy egységének ξ égési idejére mérést végezve, a következő értékek adódtak (másodpercben):

50.6	54.8	54.4	44.9	42.1	69.8	53.6	66.1	48	37.8

Feltéve, hogy ξ normális eloszlású, adjunk várható értékére 90%-os, szórására pedig 98%-os megbízhatósági szinten megbízhatósági intervallumot.

Statisztikai próbák

D 35.24 A valószínűségi változók eloszlására, illetve paramétereire vonatkozó feltevéseket **statisztikai hipotéziseknek** (röviden: hipotéziseknek), az ezek ellenőrzésére szolgáló módszereket **statisztikai próbáknak** nevezzük.

M 35.25 A statisztikai hipotézisek néhány fontos típusa a következő:
1. Valamely valószínűségi változó a paraméterének értéke
a) adott a_0 számmal egyenlő,
b) adott a_0 számtól (lényegesen) különböző.
2. Két valószínűségi változó várható értéke
a) egyenlő,
b) különböző.
3. Két valószínűségi változó szórása
a) egyenlő,
b) különböző.
4. Valamely valószínűségi változó eloszlásfüggvénye egy megadott F függvény.
5. Két valószínűségi változó azonos eloszlású.
6. A vizsgálandó valószínűségi változók függetlenek.

D 35.26 Legyen S statisztikai sokaság, H_0 pedig az S eloszlásával kapcsolatos hipotézis. Statisztikai próbához a hipotézist leíró mennyiségekből és az S-re vonatkozó mintából egy olyan η statisztikai függvényt képezünk, amelynek eloszlását meg tudjuk állapítani. Az η-t **próbafüggvénynek** nevezzük.

M 35.27 A statisztikai próba azzal kezdődik, hogy egy 0-hoz közeli p valószínűséghez meghatározunk egy J_0 intervallumot úgy, hogy

$$P(\eta \in J_0) = 1 - p$$

teljesüljön (az, hogy p-t mekkorának választjuk, a konkrét problémától függ). Ezután mintát veszünk az S statisztikai sokaságból, és kiszámítjuk a próbafüggvénynek a mintaelemek konkrét adataihoz tartozó $\hat{\eta}$ értéket. Ha $\hat{\eta} \in J_0$, akkor azt mondjuk, hogy a tényleges és a H_0 szerinti érték között nincs szignifikáns eltérés $100(1-p)$%-os szinten. Ha $\hat{\eta} \notin J_0$, akkor pedig azt mondjuk, hogy a tényleges és a H_0 szerinti érték között szignifikáns eltérés van $100(1-p)$%-os szinten.
Az 1.a, 2.a, 3.a, 4., 5., 6. típusú vizsgálatok esetén számunkra az a kedvező, ha nincs szignifikáns eltérés; az 1.b, 2.b, 3.b típusúaknál viszont éppen az a kedvező, ha szignifikáns eltérés mutatkozik.
Ha a próba eredménye kedvezőtlen, akkor az előbbi esetekben a p csökkentésével, az utóbbi esetekben pedig a p növelésével próbálkozhatunk, feltéve, hogy ezt a konkrét probléma természete megengedi. A statisztikai próbáknál az előzőekben definiált t-eloszlás és χ^2-eloszlás mellett a következőkben definiált F-eloszlás játszik még fontos szerepet.

D 35.28 A ζ valószínűségi változót (m, n) szabadságfokú **F-eloszlású** valószínűségi változónak nevezzük, ha megadhatók olyan standard normális eloszlású és egymástól független

$$\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m; \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$$

valószínűségi változók, hogy

$$\zeta = \frac{\frac{1}{m}(\xi_1^2 + \ldots + \xi_m^2)}{\frac{1}{n}(\eta_1^2 + \ldots + \eta_n^2)}. \tag{19}$$

Feladatok

30.[P] **(Egymintás u-próba)** Az S statisztikai sokaságot leíró ξ valószínűségi változó legyen normális eloszlású ismert $\sigma = 2.5$ szórással, de ismeretlen várható értékkel. Állapítsuk meg, hogy elfogadható-e a

$$H_0: \quad M(\xi) = m_0 = 51$$

hipotézis 95%-os szignifikancia-szinten, ha a minta konkrét értékei:

50.9	52	50	51	51.3	51.4	50.7	51.3	50.7

31.[P] Egy alkatrész gyártásának beindításakor nagy minta alapján meghatározták a gyártmány valamely méretének m_0 várható értékét és σ szórását: $m_0 = 35$ és $\sigma = 0.59$. A tapasztalat szerint az adott gépen a szórás nem szokott változni, ellenben a várható érték néha "elcsúszik". Ezért óránként egy-egy 10 elemű minta alapján ellenőrzik, hogy a várható értékben nem történt-e változás. Egy ilyen ellenőrzés alkalmával a következő adatokat mérték:

37.8	37.9	36.5	37.2	37.9	38.5	37.8	38.4	38.1	38.5

Elfogadhatják-e 99%-os szignifikancia-szinten azt, hogy a várható érték nem változott meg?

32.[P] Egy megadott útszakaszon gépjárművek sebességét mérve az átlagsebesség 55 km/h értékre adódott, a szórás mértéke 17 km/h volt. Bizonyos forgalomelterelési megoldásnak az átlagsebességre gyakorolt befolyását vizsgálva 50 mérést végzünk, ezek átlaga 59 km/h. Döntsük el 95%-os szignifikancia-szinten, hogy az alkalmazott megoldás átlagsebesség-változással járt-e a forgalom egészére nézve (feltéve, hogy a szórás nem változott).

33.[P] **(Kétmintás u-próba)** Az S_1 és S_2 statisztikai sokaságot leíró ξ és η valószínűségi változók legyenek normális eloszlásúak ismert $\sigma_\xi = 1.4$ és $\sigma_\eta = 4$ szórásokkal. Tekintsünk ξ-re egy $n = 15$ elemű, η-ra pedig egy $m = 10$ elemű mintát. Legyenek a mintaelemeknek egy adott mintavétellel kapcsolatos konkét értékei a következők:

ξ	17	19	16	15	20	17	18	18	16	17	18	17	19	15	16
η	10	18	24	22	12	17	16	19	18	15					

Elfogadható-e a

$$H_0: \; M(\xi) = M(\eta)$$

hipotézis 99%-os szignifikancia-szinten?

34.▷ Két gép (I és II) ugyanazt az alkatrészt gyártja. Az alkatrészek egy bizonyos méretére vonatkozó szórások értékei $\sigma_{\mathrm{I}} = 0.45$ mm, illetve $\sigma_{\mathrm{II}} = 0.49$ mm. A két gépen gyártott alkatrészekből a szóban forgó méretre vonatkozó méréssorozat kapcsán a következő eredmények adódtak mm-ben:

I.	3.72	4.01	3.81	3.67	3.77	
II.	3.68	3.96	3.82	4.02	3.71	4

Állapítsuk meg, hogy 95%-os szignifikancia-szinten azonosnak tekinthető-e a két gépen a beállított méret.

35.▷ (**F-próba**) Az S_1 és S_2 statisztikai sokaságot leíró ξ és η valószínűségi változók legyenek normális eloszlásúak. Tekintsünk ξ-re egy $m = 10$ elemű, η-ra pedig egy $n = 21$ elemű mintát. A mintaelemeknek egy adott mintavétellel kapcsolatos x_i, $i = 1, 2, \dots, m$; y_j, $j = 1, 2, \dots, n$ konkrét értékeiből számított korrigált empirikus szórásnégyzetek $s_\xi^{*2} = 0.1$ és $s_\eta^{*2} = 0.9$. Elfogadható-e a

$$H_0 : D(\xi) = D(\eta)$$

hipotézis 95%-os szignifikancia-szinten?

36.▷ Két sportpuskával 10-10 lövést adunk le; a lövési eredmények a következők:

I.	9	10	8	8	9	10	10	10	9	8
II.	7	10	8	9	9	9	10	10	8	9

Döntsük el 95%-os szignifikancia-szinten, hogy a fenti lövési eredmények alapján azonosnak tekinthető-e a két puska szórása.

37.▷ (**Egymintás t-próba**) Legyen ξ az S statisztikai sokaságot leíró ismeretlen szórású normális eloszlású valószínűségi változó. Tekintsünk ξ-re egy $n = 10$ elemű mintát, s legyenek a mintaelemeknek egy adott mintavétellel kapcsolatos konkrét értékei a következők:

16	27	21	30	26	11	21	31	19	28

Elfogadható-e a

$$H_0 : M(\xi) = m_0$$

hipotézis 90%-os szignifikancia-szinten, ha $m_0 = 27$?

38.▷ Egy adott típusú személygépkocsi átlagos fogyasztása, amelyet ξ-vel jelölünk, a gyári adatok szerint 8.5 l/100 km. 30 különböző fogyasztásmérést végezve a járművel, az átlagos fogyasztásra a mérési eredmények alapján 9.1 l/100 km adódott; az s^* korrigált empirikus szórásra pedig 4.2 l/100 km értéket kaptunk. A mérési eredmények alapján elfogadható-e a gyári adat 95%-os szignifikancia-szinten?

39.▷ Jelölje ξ a **36.** feladatban szereplő I. számú sportpuskával véletlenszerűen leadott lövés eredményét. Az említett feladatbeli adatok alapján döntsük el, hogy 99%-os szignifikancia-szinten ξ várható értéke egyenlőnek tekinthető-e 9-cel (feltéve, hogy ξ normális eloszlású valószínűségi változó).

40.▷ (**Kétmintás t-próba**) Legyenek ξ és η ismeretlen szórású normális eloszlású valószínűségi változók. Tekintsünk ξ-re egy $n = 10$ elemű, η-ra pedig egy $m = 15$ elemű mintát. Legyenek a mintaelemeknek egy adott mintavétellel kapcsolatos konkrét értékei a következők:

ξ	10	18	24	22	12	17	16	19	18	15					
η	17	19	16	15	20	17	18	18	16	17	18	17	19	15	16

Elfogadható-e a

$$H_0: \ M(\xi) = M(\eta)$$

hipotézis 95%-os szignifikancia-szinten?

41.▷ Egy bizonyos alkatrészt két gép (I. és II.) gyárt. Az alkatrészek vizsgálandó méretére vonatkozó szórások ismeretlenek, de feltehető, hogy a két gépre vonatkozóan különbözők. A két gépen gyártott alkatrészekből mintát véve a **34.** feladatbeli eredmények adódtak. Állapítsuk meg, hogy 95%-os szignifikancia-szinten azonosnak tekinthető-e a két gépen a beállított méret.

42.▷ (**χ^2-próba**) Döntsük el, hogy 95%-os szignifikancia-szinten szabályosnak tekinthető-e az az érme, amelyet $N = 1000$-szer feldobva a következő dobási eredményeket kapjuk: fej 485-ször, írás 515-ször.

43.▷ 95%-os szignifikancia-szinten szabályosnak tekinthető-e az a kocka, amelyet 1000-szer feldobva a következő kimeneteleket kapjuk:
1-es dobás: 175, 4-es dobás: 150,
2-es dobás: 158, 5-ös dobás: 182,
3-as dobás: 166, 6-os dobás: 169.

44.▷ (**Tiszta illeszkedésvizsgálat diszkrét valószínűségi változó esetén**) Legyen ξ diszkrét valószínűségi változó véges sok $x_1, x_2, \ldots x_r$ lehetséges értékkel. Vizsgálandó a

$$H_0: \ P(\xi = x_i) = p_i; \quad i = 1, 2, \ldots, r \quad (\sum_{i=1}^{r} p_i = 1)$$

hipotézis.

45.▷ (**Tiszta illeszkedésvizsgálat folytonos valószínűségi változó esetén**) Legyen ξ folytonos valószínűségi változó. Vizsgálandó a

$$H_0: \ P(\xi < x) = F(x)$$

hipotézis $100(1-p)\%$ szignifikancia-szinten, ahol F egy adott eloszlásfüggvény.

46.▷ A ξ folytonos valószínűségi változóra vonatkozó 3840 elemű minta elemeinek egy adott mintavétellel kapcsolatos konkrét értékeiről csak a táblázatbeli intervallumokba esés gyakoriságát ismerjük:

$J_1 = (-\infty, -\operatorname{tg}\frac{\pi}{4})$	955
$J_2 = [-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}, -\operatorname{tg}\frac{\pi}{8})$	480
$J_3 = [-\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}, -\operatorname{tg}\frac{\pi}{12})$	163
$J_4 = [-\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}, -\operatorname{tg}\frac{\pi}{16})$	77
$J_5 = [-\operatorname{tg}\frac{\pi}{16}, -\operatorname{tg}\frac{\pi}{20})$	53
$J_6 = [-\operatorname{tg}\frac{\pi}{20}, \operatorname{tg}\frac{\pi}{20})$	384
$J_7 = [\operatorname{tg}\frac{\pi}{20}, \operatorname{tg}\frac{\pi}{16})$	48
$J_8 = [\operatorname{tg}\frac{\pi}{16}, \operatorname{tg}\frac{\pi}{12})$	80
$J_9 = [\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}, \operatorname{tg}\frac{\pi}{8})$	155
$J_{10} = [\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}, \operatorname{tg}\frac{\pi}{4})$	484
$J_{11} = [\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}, \infty)$	961

Az adatok alapján döntsük el, hogy elfogadható-e a

$$H_0: \quad P(\xi < x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x$$

hipotézis 95%-os szignifikancia-szinten.

47.* (**Homogenitás-vizsgálat**) Legyenek ξ és η valószínűségi változók. A ξ-re vonatkozó $n = 100$ elemű és az η-ra vonatkozó $m = 200$ elemű mintának egy adott mintavétellel kapcsolatos konkrét értékei olyanok, hogy a $(-\infty, \infty)$ intervallumnak a

$$J_1 = (-\infty, z_1), J_2 = [z_1, z_2), \dots, J_{10} = [z_9, \infty)$$

felosztása esetén a ξ-re vonatkozó mintaelemek közül minden részintervallumba 10-10 esik, az η-ra vonatkozó mintaelemek közül pedig a $J_1, J_2, \dots, J_8$ intervallumokba 20-20, a J_9-be 15, a J_{10}-be 25. A minta, valamint a $(-\infty, \infty)$ intervallum szóbanforgó beosztása alapján döntsük el, hogy a

$$H_0: \ (\forall x \in \mathbf{R}) \quad P(\xi < x) = P(\eta < x)$$

hipotézis 95%-os szignifikancia-szinten elfogadható-e.

48.* Jelölje ξ, illetve η egy középiskolás csoportból véletlenszerűen kiválasztott lány, illetve fiú történelem osztályzatát. 100 lány, illetve 150 fiú osztályzatát elemezve, azokra az alábbi gyakoriságok adódtak:

	lányok	fiúk
1-es	2	10
2-es	20	48
3-as	59	69
4-es	15	11
5-ös	4	12

Döntsük el, hogy 95%-os szignifikancia-szinten ξ és η eloszlásfüggvényei azonosaknak tekinthetők-e?

49.ᴾ **(Függetlenségvizsgálat)** Legyenek ξ és η valószínűségi változók. Tekintsünk a (ξ, η) párra egy n elemű (ξ_1, η_1), $(\xi_2, \eta_2), \ldots, (\xi_n, \eta_n)$ mintát, és képezzük az xy-sík egy felosztását a következőképpen: Legyen az x- és az y-tengely egy-egy beosztása

$$I_1 = (-\infty, u_1),\ I_2 = [u_1, u_2), \ldots, I_r = [u_{r-1}, \infty),$$

valamint

$$J_1 = (-\infty, v_1),\ J_2 = [v_1, v_2), \ldots, J_s = [v_{s-1}, \infty),$$

és legyen

$$T_{ij} = \{(x, y);\ x \in I_i,\ y \in J_j\}, \quad i = 1, 2, \ldots, r;\ j = 1, 2, \ldots, s;$$

ily módon az xy-síkot rs számú, páronként idegen részhalmazra bontottuk fel. Dolgozzunk ki módszert annak eldöntésére, hogy elfogadható-e a

$$H_0 :\ (\forall x, y \in \mathbf{R})\ P(\xi < x, \eta < y) = P(\xi < x)P(\eta < y)$$

hipotézis 95%-os szignifikancia-szinten, ha a mintaelemeknek egy adott mintavétellel kapcsolatos (x_1, y_1), $(x_2, y_2), \ldots (x_n, y_n)$ konkrét értékpárjai az xy-síkon úgy helyezkedik el, hogy a T_{ij} halmazba k_{ij} elempár esik. Alkalmazzuk módszerünket arra az esetre, amikor $n = 300$, $r = 5$, $s = 6$, $u_i = -40 + (i-1)20$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, $v_j = -40 + (j-1)10$ $(j = 1, 2, 3, 4, 5)$, $p_i = P(\xi \in I_i) = \frac{1}{5}$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$, $q_j = P(\eta \in J_j) = \frac{1}{6}$ $(j = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$, $k_{ij} = 10$ ha $ij \neq 1$ és $ij \neq 30$, $k_{1,1} = 5$, $k_{5,6} = 15$.

50.ᴾ Jelölje ξ, illetve η egy hallgatócsoportból véletlenszerűen kiválasztott hallgató matematika, illetve fizika osztályzatát. Egy 100 elemű minta adatai a következők:

(4,4)	(2,3)	(1,2)	(3,3)	(3,4)	(1,3)	(4,3)	(4,2)	(2,1)	(2,2)
16	20	21	18	11	6	2	3	1	1

ahol az alsó sorban szereplő számok a velük egy oszlopban lévő adat gyakoriságát jelölik.
A ξ és η értékeinek valószínűsége korábbi felmérések szerint:

k	1	2	3	4	5
$P(\xi = k)$	0.1	0.4	0.3	0.1	0.1
$P(\eta = k)$	0.2	0.3	0.3	0.1	0.1

Elfogadható-e 99%-os szignifikancia-szinten az a hipotézis, hogy ξ és η független valószínűségi változók?

Regressziós görbék

D 35.29 Az η valószínűségi változónak a ξ valószínűségi változóra vonatkozó **regresszióján** az egyváltozós

$$g_0 : x \longmapsto M(\eta \mid \xi = x); \quad x \in \mathbf{R}$$

függvényt értjük; ennek grafikonját, az

$$y = M(\eta \mid \xi = x)$$

egyenletű görbét az η valószínűségi változónak a ξ valószínűségi változóra vonatkozó **regressziós görbéjének** nevezzük.

T 35.30 Legyen ξ és η két olyan valószínűségi változó, amelyek között sztochasztikus kapcsolat áll fenn. Ha a g_0 függvény az η-nak ξ-re vonatkozó regressziója, akkor az összes $\eta \approx g(\xi)$ közelítő függvénykapcsolatok közül g_0 a legjobb (az optimális) abban az értelemben, hogy minden más g-re

$$M\left((\eta - g(\xi))^2\right) \geq M\left((\eta - g_0(\xi))^2\right).$$

D 35.31 Ha az összes $\eta \approx g(\xi)$ közelítő függvénykapcsolat közül csak a lineáris, $\eta \approx a\xi + b$ alakúakat vesszük figyelembe, és ezek közül választjuk ki azt, amelyre az

$$M\left((\eta - a\xi - b)^2\right)$$

várható érték a lehető legkisebb, akkor ezt az eljárást **lineáris regressziónak**, a regressziós görbét **regressziós egyenesnek** nevezzük. Ha az összes $\eta \approx g(\xi)$ függvénykapcsolat közül csak a másodfokú, $\eta \approx a\xi^2 + b\xi + c$ alakúakat vesszük figyelembe, és ezek közül azt választjuk ki, amelyre az

$$M\left((\eta - a\xi^2 - b\xi - c)^2\right)$$

várható érték a lehető legkisebb, akkor ezt az eljárást **kvadratikus regressziónak**, a regressziós görbét **regressziós parabolának** nevezzük.

T 35.32 Legyen ξ és η két olyan valószínűségi változó, amelyeknek létezik a korrelációs együtthatójuk. Az a-tól és b-től függő

$$M\left((\eta - a\xi - b)^2\right)$$

függvény azon az (a_0, b_0) helyen veszi fel legkisebb értékét, amelyre

$$a_0 = r(\xi, \eta)\frac{D(\eta)}{D(\xi)} \quad \text{és} \quad b_0 = M(\eta) - a_0 M(\xi),$$

ahol $r(\xi, \eta)$ a ξ és η korrelációs együtthatóját (l. **D** ??.?) jelenti.

M 35.33 A gyakorlatban többnyire az a helyzet, hogy a tételbeli várható értékeket, szórásokat és a korrelációt nem ismerjük. Ilyenkor ezeket az (elméleti) értékeket az empirikus várható értékekkel, az empirikus szórásokkal és a következőképpen definiált empirikus korrelációval helyettesítjük:

D 35.34 Legyen ξ és η ugyanahhoz a véletlenszerű jelenséghez tartozó két valószínűségi változó; egy adott kísérletsorozatban a ξ és η összetartozó értékpárjai legyenek

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n).$$

Jelölje $\overline{x}$ a ξ empirikus várható értékét, $\overline{y}$ az η empirikus várható értékét, $\overline{xy}$ a $\xi\eta$ empirikus várható értékét, s_ξ a ξ empirikus szórását, s_η az η empirikus szórását (l. **D 35.6**). A ξ és η valószínűségi változóknak (az adott minták szóban forgó konkrét értékeihez tartozó) empirikus kovarianciáját a

$$\gamma(\xi, \eta) := \overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y},$$

empirikus korrelációját a

$$\varrho(\xi, \eta) := \frac{\gamma(\xi, \eta)}{s_\xi s_\eta} \tag{20}$$

képlettel definiáljuk.

M 35.35A gyakorlatban tehát a lineáris regressziónál úgy járunk el, hogy a ξ és η valószínűségi változókra vonatkozó adott minta összetartozó (x_i, yi) $(i = 1, 2, \ldots, n)$ értékpárjaival meghatározzuk azt az $y = ax + b$ egyenletű **empirikus regressziós egyenest**, amelyre

$$a = \varrho(\xi, \eta)\frac{s_\eta}{s_\xi} = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{{s_\xi}^2},$$

$$b = \overline{y} - a\overline{x}$$

teljesül. Kimutatható, hogy ez az (a, b) számpár a

$$g(a, b) := \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$$

függvény minimumhelye, és mint ilyen, az a és b szerinti parciális deriváltak felírásával adódó

$$\begin{aligned} \overline{x^2}a + \overline{x}b &= \overline{xy} \\ \overline{x}a + b &= \overline{y} \end{aligned} \tag{21}$$

egyenletrendszer megoldása. (Itt $\overline{x^2}$ a ξ^2, $\overline{xy}$ pedig a $\xi\eta$ valószínűségi változó empirikus várható értéke.)

A lineáris regressziót akkor tekintjük elegendően pontos közelítésnek, ha az empirikus korrelációs együttható abszolút értéke közelítőleg egyenlő 1-gyel. Ha ez az eset nem áll fenn, de a kísérleti adatok elfogadhatóvá teszik azt a feltevést, hogy a regressziós görbe parabolával jól közelíthető, akkor kvadratikus regressziót alkalmazunk. Megmutatható, hogy a fenti adatokhoz tartozó **empirikus regressziós parabola** $y = ax^2 + bx + c$ egyenletében szereplő (a, b, c) számhármas a következő egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{aligned} \overline{x^4}a + \overline{x^3}b + \overline{x^2}c &= \overline{x^2y}, \\ \overline{x^3}a + \overline{x^2}b + \overline{x}c &= \overline{xy}, \\ \overline{x^2}a + \overline{x}b + c &= \overline{y} \end{aligned} \tag{22}$$

(Tetszőleges r és t nemnegatív egész számok esetén $\overline{x^r y^t}$ a $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^r y_i^t$ összeget jelöli.)

Feladatok

51.ᴾ Egy készülék (hónapokban mért) η élettartamának és az egyik fő alkatrész havonkénti cseréjének ξ átlagos száma közötti kapcsolatra utalnak a következő táblázat adatai:

ξ	1	2	3	4	5	6
η	8	22	59	164	448	1210

a) Mutassuk meg, hogy ξ és η között $\eta \approx ae^{b\xi}$ kapcsolat feltételezhető.
b) Határozzuk meg az adatokhoz tartozó $y = ae^{bx}$ egyenletű empirikus regressziós görbét.

52.ᴾ Új készítményt vizsgáltak egereken, hogy meghatározzák a szer hatását a rákos daganatokra. Változtatva a szer egyik összetevőjének mennyiségén, 10 féle szerrel kísérletet végeztek 10 olyan egéren, amelyek mindegyikében 4 grammos daganat volt. A kísérlet adatait a következő táblázat tartalmazza, amelynek első sorában a szerek kódszáma található a szóban forgó összetevő növekvő mennyisége szerint, a második sorban pedig a daganat súlycsökkenése grammban:

a szerek kódszáma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
súlycsökkenés	1.28	1.50	1.12	0.94	0.82	0.75	0.60	0.72	0.95	1.20

Állapítsuk meg, hogy feltételezhető-e lineáris kapcsolat a kódszámok és a daganatok súlycsökkenése között. Ha nem, akkor alkalmazzunk kvadratikus regressziót.

53.ᴾ Egy keverék egyik alkotóelemének ξ víztartalma (%-ban) és a keverék η sűrűsége (grammban) közötti kapcsolatra vonatkozó méréssorozat adatait a következő táblázat tartalmazza:

ξ	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
η	7.3	9.4	10.1	12.1	13.4	15.4	16.9	18.2	19.3	21.3	22.2

Számítsuk ki a ξ és az η valószínűségi változóknak a méréssorozathoz tartozó empirikus korrelációs együtthatóját. Ha indokolt, akkor alkalmazzunk lineáris regressziót.

54.ᴾ Egy fémalkatrész korrózióját vizsgálták $500^o C$-os száraz oxigénben. Ebben a vizsgálatban a korrózió mértékére a különböző ideig történő behatás miatt bekövetkezett súlynövekedés utalt. A ξ óráig történt behatás következtében adódó η%-os súlynövekedésre a következő adatokat kapták:

ξ	1	2	2.5	3	3.5	4
η	0.02	0.03	0.035	0.042	0.05	0.054

Mutassuk meg, hogy ξ és η között lineáris kapcsolat feltételezhető. Határozzuk meg az adatokhoz tartozó empirikus regressziós egyenes együtthatóit.

Vizsgáljuk meg, hogy az empirikus regressziós egyenes egyenletéből adódó értékek mennyire egyeznek meg a táblázatbeliekkel.

55.▷ Egy gyorsolvasási verseny eredményhirdetése után 10 versenyzőtől megkérdezték, hány héten át készültek a versenyre. A felmérés alapján a ξ hét felkészülési idő és a versenyen elért η (szó/perc) eredmény közötti kapcsolatra a következő adatokat kapták:

ξ	2	3	4	5	5	5	6	7	7	10
η	21	42	50	59	68	51	72	84	90	120

Számítsuk ki ξ és η empirikus korrelációs együtthatóját. Ennek alapján alkalmazzunk lineáris vagy kvadratikus regressziót.

56.▷ Egy véletlenszerű jelenség két számszerű adatát ξ-vel és η-val jelölve, a következő adatokat kaptuk egy 10 mérésből álló méréssorozat kapcsán:

ξ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
η	5	3	1	0	-2	0.5	1.3	3.7	4.1	5.9

A ξ és η közötti empirikus korrelációs együttható kiszámítása alapján alkalmazzunk lineáris vagy kvadratikus regressziót.

57.▷ A ξ és η valószínűségi változók kapcsolatára vonatkozó 7 mérésből álló méréssorozat adatait az alábbi táblázat tartalmazza.

ξ	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
η	0.9	4.7	10.1	16.5	25	35.1	45.9

Mutassuk meg, hogy ξ és η között feltételezhető $\eta \approx a\xi^2 + b$ összefüggés. Határozzuk meg az adatokhoz tartozó empirikus regressziós parabola $y = ax^2 + b$ egyenletében szereplő a és b együtthatókat.

58.▷ A ξ és η valószínűségi változókra egy 10 mérésből álló méréssorozatban az alábbi összetartozó értékpárok adódtak:

ξ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
η	2	5.4	7.4	8.8	9.9	10.9	11.6	12.2	13	13.5

Mutassuk meg, hogy ξ és η között jó közelítéssel $\eta = a \ln \xi + b$ alakú függvénykapcsolat feltételezhető. Határozzuk meg az adatokhoz tartozó empirikus regressziós görbe $y = a \ln x + b$ egyenletében szereplő a és b együtthatókat.

59.▷ Egy autómárka reklámozásának hatékonyságára megfigyeléseket végezve, a tévében egy hét alatt adásba került hirdetések ξ száma és az ezen egy hét alatt eladott autók η száma közötti kapcsolatot a következő táblázat mutatja (a megfigyelést 10 héten keresztül végezték):

ξ	6	20	0	14	25	16	28	18	10	8
η	15	31	10	16	28	20	40	25	12	15

Számítsuk ki az adatokhoz tartozó empirikus korrelációs együtthatót, és alkalmazzunk lineáris vagy kvadratikus regressziót.

60. Egy új autótípus tesztelésével foglalkozó csoport méréseket végzett annak megállapítására, hogy 1 liter benzinnel különböző sebességek mellett milyen távolságra lehet eljutni. A ξ km/h sebesség és η km távolság közötti kapcsolatra vonatkozóan az alábbi táblázatban szereplő adatokat kapták:

ξ	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85
η	22	21.5	20.5	10	18.5	18.2	18	17.5	15	14.5	13	12.5

Számítsuk ki az adatokhoz tartozó empirikus korrelációs együtthatót, és alkalmazzunk lineáris vagy kvadratikus regressziót.

31. Kombinatorika (megoldások)

1. a) A kérdés tulajdonképpen az, hogy hányféleképpen tudjuk a négy számjegyet sorbarakni. Négy elem összes ismétlés nélküli permutációit kell képezni, ezek száma $4! = 24$.
   b) Mivel egy-egy számjegy többször is előfordulhat, négy elem negyedosztályú ismétléses variációit képezzük, ezek száma $4^4 = 256$.
2. Kilenc különböző kezdés lehetséges, mert nullával szám nem kezdődhet. Mivel egyik folytatásnál sem használhatjuk azokat a számjegyeket, amelyek eddig szerepeltek, a megoldás $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$.
3. a) Öt ember összes lehetséges sorrendje $5!$. Minden esetnek, amikor A előbb szólal fel, egyértelműen megfelel egy olyan eset, amikor később. A megoldás tehát $\frac{5!}{2} = 60$.
   b) Az AB pár rögzített, a többiekkel alkotott összes lehetséges sorrendek száma $4! = 24$.
4. a) Ha egy adott helyen egy nővel kezdjük az ültetést, $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$ különböző ülésrend létezik, és mivel kezdhetünk egy férfival is, a megoldás $2(5!)^2 = 28800$.
   b) Az ültetést 10 különböző helyen kezdhetjük, így $\frac{2(5!)^2}{10} = 2880$.
5. a) $24^3 \cdot 10^3$.
   b) A három szám helyét a betűk előtt, között, után összesen négyféleképpen jelölhetjük ki, így $4 \cdot 24^3 \cdot 10^3$.
6. a) $m!n!$.
   b) A fekete tömb kezdődhet az elsőtől az $n+1$-ik helyig, így $(n+1)m!n!$.
7. Az 1 és 2 számjegyekkel 2^5 különböző számot írhatunk fel. Ha ezeket egymás alá írjuk, minden oszlopban ugyanannyi kettes és egyes lesz, hiszen minden számnak megfelel egy másik, ahol az egyesek helyén kettesek, a kettesek helyén egyesek állnak. Az egy oszlopban levő jegyek összege $2^4 \cdot 1 + 2^4 \cdot 2 = 48$. A megoldás: $48 + 48 \cdot 10 + 48 \cdot 100 + 48 \cdot 1000 + 48 \cdot 10000 = 533328$
8. $(n-1)!$ egyessel kezdődő szám van, ugyanennyi kettessel, stb. és ez vonatkozik a második helyen álló számjegyekre, stb. Így a számokat egymás alá írva a számjegyek összege minden oszlopban $(1+2+\ldots+n)(n-1)! = \frac{(1+n)n}{2}(n-1)! = \frac{1}{2}(n+1)!$. A megoldás tehát $\frac{(n+1)!}{2}\sum_{i=0}^{n-1} 10^i$.
9. Tíz elem másodosztályú ismétlés nélküli kombinációit kell képeznünk, ezek száma $\binom{10}{2} = 45$.
10. Egyik is, másik is kiválaszt kettőt: $\binom{7}{2}\binom{9}{2} = 756$.
11. A 14 lépésből a hét lefelé lépés helyét $\binom{14}{7} = 3432$ féleképpen választhatjuk ki.

12. A kettesek helyét kijelölve $\binom{n+k}{n}$, vagy az egyesek helyét kijelölve $\binom{n+k}{k}$ adódik, (és ez a két érték egyenlő, l. **T 6.8**).

13.

a) Mivel bármelyik helyre bármelyik írható, három elem ötödosztályú ismétléses variációi; ezek száma $3^5 = 243$.

b) A fenti eredményből kivonjuk azok számát, amelyekben legfeljebb kettő szerepel. Csak egy szerepel $\binom{3}{1}$ számban, kettőt $\binom{3}{2}$-féleképpen választhatunk ki, és mindegyik párral 2^5 számot tudunk felírni. A megoldás: $3^5 - \binom{3}{2}2^5 - 3 = 144$.

14.

a) $\binom{3}{1}$-féleképpen választhatjuk ki azt a páratlan számot, amelyre a szám végződik; bármely kiválasztott utolsó jegyhez $\binom{4}{2}$-féleképpen az első kettőt, amelyek összes lehetséges sorrendje 2!. A megoldás $\binom{3}{1}\binom{4}{2}2! = 36$.

b) $5^2 \cdot 3 = 75$.

15. a) Ha először a 8, azután a 6 és végül a 4 személyes csónakba ültetjük az embereket, akkor az első csónakba ülőket $\binom{18}{8}$, a másodikba ülőket $\binom{10}{6}$, a harmadikba ülőket $\binom{4}{4}$-féleképpen választhatjuk ki. Logikus azt gondolnunk, hogy a csónakok sorrendjének megválasztása az eredményt nem befolyásolhatja. Ez így is van:
$\binom{18}{8}\binom{10}{6}\binom{4}{4} = \binom{18}{6}\binom{12}{4}\binom{8}{8} = \ldots = \frac{18!}{8!6!4!} = 9189180$.

b) Mivel a személyek sorrendjét minden csónakban a többitől függetlenül változtathatjuk, a megoldás 18!.

16. Meg kell különböztetnünk azokat az eseteket, amikor a két ember a 8, a 6, vagy a 4 személyes csónakba ül.

a) $\binom{16}{6}\binom{10}{6}\binom{4}{4} + \binom{16}{8}\binom{8}{4}\binom{4}{4} + \binom{16}{8}\binom{8}{6}\binom{2}{2} = 2942940$.

b) $2942940 \cdot 8! \cdot 6! \cdot 4!$.

17. $\binom{n}{2}$-féleképpen választhatunk ki n emberből kézfogó párt. $\binom{n}{2} = 45$, ebből $n = 10$.

18. $\binom{8}{2}$-féleképpen választhatunk ki két nyelvet, így összesen $2 \cdot \binom{8}{2} = 56$ szótár kell.

19. $\binom{9}{4}$-féleképpen választhatják ki a négy tisztségviselőt, 4!-féleképpen oszthatják ki közöttük a feladatokat. De úgy is okoskodhatunk, hogy kilenc elem negyedosztályú ismétlés nélküli variációja, mert kilencféleképpen választhatnak elnököt, mellé nyolcféleképpen helyettest, stb.
Azaz a megoldás $\binom{9}{4} \cdot 4! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$.

20. Első megoldás. Összesen $\binom{n}{3}$-féleképpen választhatunk ki különböző ponthármasokat, ezek közül el kell hagynunk azokat, amelyeknél mindhárom az egy egyenesen fekvő p darabból kerül ki.
Második megoldás. Felírjuk azoknak a ponthármasoknak a számát, amelyekben nincs, amelyekben egy, illetve amelyekben két pont van az adott p pont

közül.
A megoldás: $\binom{n}{3} - \binom{p}{3} = \binom{n-p}{3} + p\binom{n-p}{2} + \binom{p}{2}(n-p)$.

21. A **15.** feladathoz hasonlóan
a) $\binom{32}{8}\binom{24}{8}\binom{16}{8}\binom{8}{8} = \frac{32!}{(8!)^4}$.
b) $\binom{32}{4}\binom{28}{4}\binom{24}{4}\binom{20}{4} = \frac{32!}{(4!)^4 \cdot 16!}$.

22. Öt elem huszadosztályú ismétléses kombinációit kell képeznünk.
$\binom{5+20-1}{20} = \binom{24}{20} = 10626$.

23. a) Mivel bármelyik értéket akárhányszor választva a kiválasztott számhármas eleget tesz a háromszög-egyenlőtlenségnek, így a megoldás négy elem harmadosztályú ismétléses kombinációja. Okoskodhatunk úgy is, hogy összeszámoljuk azokat az eseteket, amikor egy, két, illetve három különböző oldal van.
$\binom{4+3-1}{3} = \binom{4}{1} + 2\binom{4}{2} + \binom{4}{3} = 20$.
b) Itt már vannak a háromszögegyenlőtlenségnek eleget nem tevő számhármasok, ezeket most könnyebb a második gondolatmenettel "elhagyni", például a (2,2)-höz a 4-nél, a (3,3)-hoz csak a hatnál, a (2,3)-hoz csak az ötnél kisebbek jöhetnek számításba, stb. $\binom{4}{1} + 9 + 2 = 15$.

24. Az előző feladat a) pontjához hasonló gondolatmenettel a 2,3,...,9 értékek közül választva, $\binom{8+3-1}{3} = \binom{8}{1} + 2\binom{8}{2} + \binom{8}{3} = 120$.

25. a) $\binom{10}{8} = 45$.
b) Mivel akár mind a nyolc ugyanolyan lehet, $\binom{10+8-1}{8} = \binom{17}{8} = 24310$.
c) $\binom{10+12-1}{12} = \binom{21}{12} = 293930$.

26. x^n hatványt úgy kapunk, hogy a k db tényező mindegyikéből választunk egy x^{i_j}-t ($j = 1, \ldots, k$) úgy, hogy a kitevők összege n legyen, x^n együtthatója pedig egyenlő annyival, ahányféleképpen ezt megtehetjük. Azaz n-t az összes lehetséges módon fel kell bontani nemnegatív egész számok összegére úgy, hogy az összeadandók sorrendje számít, hiszen nem mindegy, hogy egy adott hatványt melyik tényezőből vettünk. Ez pontosan annak felel meg, mintha k különböző színű golyókupac mindegyikéből választunk néhányat –esetleg nulla darabot–úgy, hogy összesen n db legyen. A kérdés az, hányféleképpen tehetjük ezt meg. A megoldás tehát k elem n-ed osztályú ismétléses kombinációinak száma: $\binom{k+n-1}{n}$.

27. A nyolcvanat kell tíz nemnegatív egész szám összegére bontani. Az előző feladat megoldása szerint az eredmény $\binom{10+80-1}{80} = \binom{89}{80} \approx 6.35623 \cdot 10^{11}$.

28. Először mind a hét dobozba teszünk öt-öt golyót, a maradék ötvenöt golyót pedig elosztjuk. $\binom{7+55-1}{55} = \binom{61}{55} = 55525372$.

29. Mivel minden x_i legalább egy, az előző feladathoz hasonlóan $\binom{20+180-1}{180} = \binom{199}{180} \approx 1.61358779 \cdot 10^{26}$

30. A hetet kell öt szám összegére bontani úgy, hogy mindegyik összeadandó legalább egy legyen. (Másszóval az öt különböző színű virág mellé az öt színből még kettőt kell választani, amelyek azonban egyszínűek is lehetnek.) Mivel $\binom{5+2-1}{2} = \binom{6}{2} = 15$, nem tudunk tizenhét csokrot összeállítani.

31. Meg kell különböztetnünk azokat az eseteket, amikor pontosan három, négy, illetve öt különböző színű virágot használunk. $\binom{5}{3}\binom{3+4-1}{4} + \binom{5}{4}\binom{4+3-1}{3} + \binom{5}{5}\binom{5+2-1}{2} = 265$. Akár kétszerannyit is készíthetünk.

32. Ötszázasokban számolva 60-at kell három szám összegére bontani úgy, hogy mindegyik legalább 12 legyen. A 28-as feladat alapján ezt $\binom{3+24-1}{24} = 325$-féleképpen tehetjük meg.

33. Monoton növekvő sorozat esetén elegendő megmondani, hogy az egymás után következő számok hányszor fordulnak elő úgy, hogy az előfordulásuk összege $3n$ legyen. Ezt $\binom{n+3n-1}{3n}$-féleképpen írhatjuk elő. Minden ilyen sorozat visszafelé monoton csökkenő sorozatot alkot, így $2\binom{4n-1}{3n}$ monoton $3n$-elemű sorozat lesz.

34. A **26.** feladat megoldásakor alkalmazott gondolatmenethez hasonlóan, ez a szám megegyezik x^{80} együtthatójával az $(1+x+x^2+\ldots+x^{20})^{10}$ hatványban. Ennek pontos értékét számítógéppel érdemes kiszámítani, hozzávetőlegesen $2.33863592655 \cdot 10^{12}$.

35. Ez a szám megegyezik x^{20} együtthatójával az $(1+x+\ldots+x^{12})^5$ hatványban, értéke: 48378 .

36. A **T 31.13** tétel segítségével oldjuk meg. Jelentse A_i azon számok halmazát, amelyekben az i az i-edik helyen áll. A_i elemeinek száma annyi,ahányféleképpen a többi öt elemet az összes lehetséges módon el lehet rendezni, azaz $5!$. Az $A_i \cap A_j$ halmazban az i-edik és j-edik elem is a helyén van, ezért ennek elemszáma $4!$, stb.
$n(A_1 \cup \ldots \cup A_6) = \binom{6}{1}5! - \binom{6}{2}4! + \binom{6}{3}3! - \binom{6}{4}2! + \binom{6}{5}1! - \binom{6}{6}0! = 455$.

37. Az összes beérkezési sorrend száma $12!$, ebből vonjuk ki azokat, ahol legalább az egyik a rajtszámának megfelelő helyre fut be. Az előző feladat alapján

$$12! - \left(\binom{12}{1}11! - \binom{12}{2}10! + \ldots - \binom{12}{12}0!\right) = 12!\sum_{i=0}^{12}(-1)^i\frac{1}{i!} = 176214841 .$$

38. Nyilvánvaló, hogy $k \leq n$ és csak az $n > 1$ esettel kell foglalkoznunk. Az előző feladatok alapján azon esetek száma, amikor egyik sincs a helyén, azaz amikor $k = 0$, $N_{n,0} = n!\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{1}{i!}$. Tegyük fel, hogy k legalább 1, és ismerjük azon esetek számát, amikor $n-1$ cédulából $k-1$ darab van a helyén, azaz ismerjük $N_{n-1,k-1}$-t. Válasszunk az n számból egyet, jelöljük ezt i-vel és tegyük ezt a helyére. $N_{n-1,k-1}$ olyan eset van, hogy az i-ediken kívüli $n-1$ elemből $k-1$ a helyén van, azaz összesen k van a helyén úgy, hogy az i-edik is ott van. Így, mivel i-t n-féleképpen választhatjuk, $n \cdot N_{n-1,k-1}$ eset adódna, csakhogy minden esetet többször is figyelembe vettünk. Nézzük, például, hányszor vettük figyelembe azt, hogy az első k db a helyén van, a többi nem? Amikor az 1-et választottuk, és a 2,3,...,k elemek voltak a helyükön, amikor a 2-t választottuk és az 1,3,...,k elemek voltak a helyükön, stb. Látjuk, hogy bármely k db

elem esetén azt, hogy éppen azok vannak a helyükön, pontosan k-szor vettük figyelembe. Így
$N_{n,k} = \frac{n}{k} N_{n-1,k-1} = \frac{n(n-1)}{k(k-1)} N_{n-2,k-2} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} N_{n-k,0}$.

39.

a) A sorokat 1-től 6-ig számozva, írjuk minden korong mellé a megfelelő sor számát. Mivel bármely korong mellé bármely szám kerülhet, tízjegyű számokat készítünk az 1,...,6 számjegyekkel. Ezek száma $6^{10} = 60466176$.

b) Az első sortól indulva, ötször kell sort váltani. Vegyünk hozzá a korongokhoz öt "fiktív" korongot. (Az első fiktív korongot megelőzőek kerülnek az első sorba, az első és második fiktív korong közé esők a második sorba, stb.) A 15 db korongot 15! -féleképpen tehetjük sorba. Ha csak a fiktív korongokat cserélgetjük egymás között, ami 5! -féleképpen lehetséges, a sorokban a valódi korongok elhelyezése nem változik. Így a megoldás $\frac{15!}{5!} = 1.08973 \cdot 10^{10}$.

40. Az előző feladat és a **T 31.13** tétel segítségével

a) 5^{20} ; b) $\frac{24!}{4!}$.

c) Jelentse A_i azon elrendezések halmazát, amikor az i-edik polcon nincs könyv. Ekkor $A_1 \cup ... \cup A_5$ azon elrendezések halmaza, amikor van olyan polc, amelyiken nincs könyv. (A_i elemszáma $\frac{23!}{3!}$, hiszen a könyveket a többi négy polcon rendeztük el valahogy, $A_i \cap A_j$ elemszáma $\frac{22!}{2!}$, stb.) A megoldás tehát:
$\frac{24!}{4!} - \left(\binom{5}{1}\frac{23!}{3!} - \binom{5}{2}\frac{22!}{2!} + \binom{5}{3}\frac{21!}{1!} - \binom{5}{4}\frac{20!}{0!}\right)$.
Ez az érték hozzávetőlegesen $9.429928184 \cdot 10^{21}$.

41. A **39.** feladathoz hasonlóan

a) 10^{80} ; b) $\frac{89!}{9!}$.

42. a) Az A halmaz első, második stb. eleméhez B-ből n-féleképp választhatunk. Ezért az ilyen leképezések száma: $V_n^{k,i} = n^k$.

b) $n < k$ esetén nincs ilyen leképezés; $n \geq k$ esetén B-ből a már kiválasztottakat újra nem választhatjuk, ezért az ilyen leképezések száma: $V_n^k = n(n-1)...(n-k+1)$.

c) A monotonitás miatt elég minden B-beli elem mellé "odaírni", hányszor használtuk fel, azaz k-t kell n db nemnegatív szám összegére bontani (l. a **26.** feladatot). Ezért a leképezések száma: $C_n^{k,i} = \binom{n+k-1}{k}$.

d) $n < k$ esetén nincs ilyen leképezés; $n \geq k$ esetén a szigorú monotonitás miatt B elemei mellé a fent leírt módon 1-et vagy 0-át írunk. Ezért a leképezések száma: $C_n^k = \binom{n}{k}$.

43. a) Bármelyik húzáskor bármelyik golyót választhatjuk, a megoldás: $V_n^{k,i} = n^k$.

b) A kihúzottakat már nem húzhatjuk, a megoldás: $V_n^k = n(n-1)...(n-k+1)$.

c) Mivel a sorrend nem számít, csak azt kell nézni, melyik golyót hányszor húztuk (l. **26.** feladat). A megoldás: $C_n^{k,i} = \binom{n+k-1}{k}$.

d) n golyóból kell k-t kiválasztani: $C_n^k = \binom{n}{k}$.

44. a) Számozzuk meg a dobozokat, és írjuk minden érme mellé annak a doboznak a számát, amelyikbe került. Mivel mindegyik érme mellé minden doboz száma kerülhet, a megoldás: $V_n^{k,i} = n^k$.

b) Az $n < k$ esetben a feladat megoldhatatlan. Az $n \geq k$ esetben az első érme mellé n, a második mellé $n-1$ stb. különböző számot írhatunk. A megoldás: $V_n^k = n(n-1)...(n-k+1)$.

c) Írjuk minden doboz mellé, hány érme került bele, azaz a k-t n db nemnegatív szám összegére bontjuk (l. **26.** feladatot). A megoldás: $C_n^{k,i} = \binom{n+k-1}{k}$.

d) n dobozból kell k-t kiválasztani. Az $n < k$ esetben ez lehetetlen, $n \geq k$ esetén a lehetséges szétosztások száma: $C_n^k = \binom{n}{k}$.

32. Valószínűségi algebra (megoldások)

1. Legyen $n = p_1p_2...p_k$. Egyszerű számítással ellenőrizhetők a műveletek tulajdonságai, pl. a disztributivitás: Legyen $a = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$, $b = p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}...p_k^{\beta_k}$, $c = p_1^{\gamma_1}p_2^{\gamma_2}...p_k^{\gamma_k}$ ahol α_i, β_i, γ_i mindegyike 0 vagy 1. Jelöljük a feladatbeli "összegzést", azaz a legkisebb közös többszörös képzését a $\oplus$ jellel, a "szorzást", azaz legnagyobb közös osztó képzését pedig $\otimes$-tel. $(a \oplus b) \otimes c = p_1^{\delta_1}p_2^{\delta_2}...p_k^{\delta_k}$, $a \otimes c \oplus b \otimes c = p_1^{\tau_1}p_2^{\tau_2}...p_k^{\tau_k}$, ahol
$$\delta_i = \min((\max(\alpha_i, \beta_i))\gamma_i) = \max(\min(\alpha_i\gamma_i), \min(\beta_i\gamma_i)) = \tau_i$$
Ennek a Boole-algebrának nulleleme 1, egységeleme n, a komplementuma n/a.
2. A megadott műveletek kommutatívak, asszociatívak, idempotensek és egymásra nézve disztributívak. A 0 rendelkezik a nullelem, az 1 az egységelem tulajdonságaival. Ez a struktúra mégsem Boole-algebra, mert az intervallum belső elemeinek nincs komplementumuk.
3. Azt kell belátnunk, hogy az adott T bármely két elemének összege és szorzata is T-ben van. Ha $A, B \in T$, akkor a feltételek folytán $(H - A) \in T$, és $(H - B) \in T$. Mivel $AB = B - (H - A)$, ezért $AB \in T$; mivel $A + B = H - (H - A)(H - B)$, ezért $A + B \in T$.
4. a) Felhasználva először a disztributív, majd a kommutatív, idempotens és elnyelési tulajdonságokat, a bal oldal a jobb oldallal megegyező kifejezéssé alakítható.
   b) Használjuk a De Morgan azonosságokat!
5. A műveletek definícióját felhasználva igazolhatók az egyenlőségek. Pl. c) a De Morgan azonosságok és a + -szal jelölt művelet idempotens tulajdonsága alapján :
$$\overline{(\overline{a} + \overline{b})} + \overline{(\overline{a} + \overline{b})} = \overline{(\overline{a} + \overline{b})} = \overline{\overline{ab}} = ab\ .$$
6. Az adott eseményeket többféleképpen is felírhatjuk. Egy-egy megoldás:
   a) $F_1F_2F_3$, b) $\overline{K_1}\overline{K_2}K_3$, c) $\overline{F_1}\overline{F_2}\overline{F_3}$,
   d) $F_1K_2S_3 + F_1S_2K_3 + K_1F_2S_3 + K_1S_2F_3 + S_1K_2F_3 + S_1F_2K_3$.
   e) $F_1 = \overline{K_1}\overline{S_1} = \overline{K_1 + S_1}$ és F_1 más eseményekkel nincs összefüggésben.
7. Mivel BC azt jelenti, hogy 3-at dobunk, $A - BC = A$; továbbá mivel $B + C = \Omega$, $(A - B) - C = A - (B + C) = \emptyset$. Így $D = A$.
8. a) Csak a másodikon folyik. b) Csak az elsőn folyik. c) Egyiken sem folyik.
   d) és f) Nincs mindkettő nyitva, azaz vagy csak az egyiken, vagy egyiken sem folyik.
   e) Csak az egyiken folyik.
9. a) $A_1\overline{A_2}\overline{A_3}$; b) $A_1\overline{A_2}\overline{A_3} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3} + \overline{A_1}\overline{A_2}A_3$;
   c) $\overline{A_1}\overline{A_2}\overline{A_3} + A_1\overline{A_2}\overline{A_3} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3} + \overline{A_1}\overline{A_2}A_3$; d) $A_1 + A_2 + A_3$.

10. Az összeg i-edik tagja azt jelenti, hogy az A_j eseményekből az i-edik bekövetkezik, a többi nem. Az összeg tehát az az esemény, hogy az A_i eseményekből pontosan egy következik be.
11. Mindkettő az $A - B \equiv A\overline{B}$ azonosságból adódik.
12. $A + B = A(B + \overline{B}) + (A + \overline{A})B = AB + A\overline{B} + AB + \overline{A}B$ és $A\overline{B}\,\overline{A}B = \emptyset$, $A\overline{B}AB = \emptyset$, $\overline{A}BAB = \emptyset$.
13. Páronként kizárják egymást, és
$$AB + \overline{A}B + A\overline{B} + \overline{A}\,\overline{B} = (A + \overline{A})B + (A + \overline{A})\overline{B} = B + \overline{B} = \Omega \quad .$$
14. a) A bal oldal: $A+(B-C) = A+B\overline{C}$; a jobb oldal $(A+B)-C = (A+B)\overline{C} = A\overline{C} + B\overline{C}$. A bal oldalhoz mindenképpen hozzátartozik az egész A, a jobb oldalhoz viszont A-nak csak azok az elemei, amelyek $\overline{C}$-ben is benne vannak, azaz C-ben nincsenek benne. Az egyenlőség akkor áll fenn, ha $AC = \emptyset$.
b) Egyenlőség akkor áll fenn, ha $\overline{A}C = \emptyset$.
c) Egyenlőség akkor áll fenn, ha $AB = \emptyset$.
15. Mivel minden eseménnyel kapcsolatban csak annyit mondhatunk, hogy bekövetkezett vagy nem, a "legalább az egyik bekövetkezik" esemény:
$$A + B + C = ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC + A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C$$
16. A színeket kezdőbetűikkel rövidítve az elemi események: (RRR), (PPP), (FFF), (RRP), (RRF), (PPF), (PPR), (FFR), (FFP), (RFP).
17. Az előző feladat megoldását felhasználva A=(RRR)+(PPP)+(FFF) . Mivel az elemi események tovább nem bonthatók, a maximális számú eseményt tartalmazó teljes eseményrendszer 8 elemű.
18. Ha P_i, illetve K_i $(i = 1, 2, ..., 6)$ jelöli azokat az eseményeket, hogy a piros, illetve kék kockán az i szám került fölülre, akkor az elemi események: (P_1K_1), (P_1K_2), (P_2K_1), ... , (P_6K_6), összesen 36 db.
19. Mivel a kockák most megkülönböztethetetlenek, csak a különböző számpárokat tudjuk felismerni. 21 db különböző számpár van.
20. Jelölje k a kihúzott ászok számát. Mivel A:$k \geq 2$, ezért, B:$k = 1$, C:$k = 0$ esetén az A, B, C események eleget tesznek a követelményeknek. (Természetesen más megoldás is lehetséges).
21. a) és b) következik az ellentétes események alaptulajdonságaiból.
c) és d) igazolásakor pedig az A illetve $A + B$ eseményeket bontjuk egymást kizáró események összegére: $A = A(B + \overline{B}) = AB + A\overline{B}$,
$A + B = (A + B)(A + \overline{A}) = (A + B)A + (A + B)\overline{A} = A + B\overline{A}$.
e) Következik c)-ből, mivel $P(A\overline{B}) \geq 0$.
d) Következik d)-ből és e)-ből, $P(A + B) = P(A) + P(B\overline{A}) \leq P(A) + P(B)$.
g) Következik d)-ből, mivel $P(B\overline{A}) \geq 0$.
h) Következik g)-ből, ugyanis $P(AB + CD) \leq P(AB + A\overline{B} + CD + C\overline{D}) = P(A + C)$.
22. Az $A + B = A + \overline{A}B = B + A\overline{B} = AB + \overline{A}B + A\overline{B}$ egyenlőségekből kiindulva $P(A + B) = P(B) + P(A\overline{B}) = 0.9$ és $P(A + B) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) + P(AB)$, amiből $P(AB) = 0.5$. Így $P(A) = P(A + B) - P(B) + P(AB) = 0.8$.

23. a) $1 \geq P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 1.7 - P(AB)$.
b) $1 \geq P(A+B) = P(A) + 0.8 - 0.7$, azaz $P(A) \leq 0.9$, $P(\overline{A}) = 1 - P(A) \geq 0.1$.

24. a) $P(A+B) = (1 - P(\overline{A})) + P(B) - P(AB)$ miatt $P(\overline{A}) = 1 + p - q - r$.
b) Az előbbi feladatok azonosságaiból $P(\overline{B}) = 1 + p - r - q$.

25. I. $n = 2$-re az állítás igaz, ugyanis $P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2)$.
II. Feltéve, hogy k olyan egész, amelyre teljesül, írjuk fel $k+1$-re: $P(A_1 + \ldots + A_{k+1}) = P((A_1 + \ldots + A_k) + A_{k+1})$. Ez így két esemény összegének valószínűsége, tehát

$$P(A_1 + \ldots + A_{k+1}) = P(A_1 + \ldots + A_k) + P(A_{k+1}) - P((A_1 + \ldots + A_k)A_{k+1}) =$$
$$= P(A_1 + \ldots + A_k) + P(A_{k+1}) - P(A_1A_{k+1} + A_2A_{k+1} + \ldots + A_kA_{k+1}) \quad .$$

Az így kapott összeg első és utolsó tagjában k db esemény összege szerepel, így alkalmazhatjuk a formulát.

26. A keresett valószínűség $P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3)$, és a zárójelben álló eseményt B-vel jelölve $A_1 + A_2 + A_3 = B + (A_1A_2 + A_2A_3 + A_1A_3)$ (pl. az $A_1 = A_1A_2 + A_1\overline{A}_2 = A_1A_2 + A_1\overline{A}_2A_3 + A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$, valamint az A_2-re és A_3-ra vonatkozó hasonló előállítás miatt). A jobb oldalon álló két esemény egymást kizárja. Alkalmazzuk a Poincaré-tételt.

27. a) A **21.** feladat e)-h) egyenlőtlenségeit felhasználva:
$P(A \circ B) + P(A \circ C) \geq P((A \circ B) + (A \circ C)) = P(A\overline{B} + \overline{A}B + B\overline{C} + \overline{B}C) \geq$
$\geq P(A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}BC + AB\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C) = P(\overline{C}A(\overline{B} + B) + \overline{A}C(B + \overline{B})) =$
$= P(\overline{C}A + \overline{A}C) = P(A \circ C)$
b) $P(B \circ C) = P(B\overline{C}) + P(\overline{B}C) = 0$, amiből $P(B\overline{C}) = P(\overline{C}B) = 0$
$P(B) = P(BC) + P(B\overline{C}) = P(BC) = P(BC) + P(\overline{B}C) = P(C)$
c) $|P(AB) - P(AC)| = |P(ABC) + P(AB\overline{C}) - P(ABC) - P(A\overline{B}C)| \leq$
$\leq P(AB\overline{C}) + P(A\overline{B}C) = P(A(B \circ C)) \leq P(B \circ C)$

28. Egyrészt $P(AB) - P(A)P(B) = P(AB) - P(A)[P(AB) + P(\overline{A}B)] =$
$= P(AB) - P(A)P(AB) - P(A)P(B\overline{A}) \geq -P(A)P(B\overline{A}) \geq -P(A)P(\overline{A}) =$
$-P(A)(1 - P(A))$, másrészt
$P(AB) - P(A)P(B) = P(AB) - P(A)P(AB) - P(A)P(B\overline{A}) =$
$= P(AB)(1 - P(A)) - P(A)P(B\overline{A}) \leq P(A)(1 - P(A))$.
Az $x(1-x)$ függvény maximuma $x = \frac{1}{2}$-nél van, így $P(A)(1 - P(A)) \leq \frac{1}{4}$.

29. Ha n fehér golyót teszünk bele, a kedvező esetek száma n, az összes eseté pedig $n+5$. Fehér golyó húzásának valószínűsége $\frac{n}{n+5} > 0.9$, ha $n > 45$.

30. A **18.** feladat alapján az összes eset száma 36, a kedvezőké 30, $p = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$. Más meggodolással is számolhatunk. Bármi volt az első dobás eredménye, másodikra csak az az egy szám nem jó. A kockát feldobva annak valószínűsége, hogy a dobott szám a kedvező ötből kerül ki: $\frac{5}{6}$.

31. Az összes eset száma 36, a kedvezők: (P_2, K_6), (P_6, K_2), (P_3, K_5), (P_5, K_3), (P_4, K_4). Ezért $p = 5/36$.

32. Annak valószínűsége, hogy a dobott számok összege nyolc, nyilván nem függhet attól, hogy meg tudjuk-e különböztetni a kockákat, vagy nem; így a keresett valószínűség az előző feladat alapján 5/36. A **19.** feladatban viszont azt láttuk, hogy itt az elemi események száma 21. Csakhogy ezek nem egyenlő valószínűségűek, mert adott két különböző szám felülrekerülésének valószínűsége kétszer akkora, mint egy adott számé mind a két kockán (ld. **18.** feladat). Ezért itt nem számolhatunk a "kedvező/összes" képlettel. A feladatot úgy kell megoldanunk, hogy a kockákat megkülönböztethetőnek tekintjük.

33. Az összes eset száma 6^5 (tekintsük a dobott öt számot az $1, 2, \ldots, 6$ számjegyekből képezett ötjegyű számok első, második, ..., ötödik számjegyének).

a) A "legalább egy hatos"-t elég nehéz összeszámolni, sokkal könnyebb az "egy hatost sem" ami az ellentett esemény, és 5^5-féleképpen lehetséges. $P(\text{legalább egy hatos}) = 1 - P(\text{egy hatost sem}) = 1 - \frac{5^5}{6^5}$.

b) Kedvező esetek száma $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$, így $p = \frac{5!}{6^4}$.

c) Hattal kezdődő ötjegyű szám 5^4 db van, $p = \frac{5^4}{6^5}$.

d) Egymást kizáró események, hogy mind az öt, vagy pontosan négy, vagy pontosan három egyezik meg.

$$p = \frac{6}{6^5} + \frac{6\binom{5}{4}5}{6^5} + \frac{6\binom{5}{3}5^2}{6^5} \quad .$$

e) A "legalább kettő megegyezik" eseteket nehéz összeszámolni, könnyebb az ellentétét, a "mind különböző"-t. A b) pont alapján $p = 1 - \frac{5!}{6^4}$.

f) Legalább egynek az 1, 3, 5 számok közül pontosan kétszer vagy négyszer kell előfordulnia.
Négy megegyező páratlan szám, egy tőle különböző szám: $3\binom{5}{4}5$ eset; két megegyező páratlan, három ettől különböző, de egymással megegyező: $3\binom{5}{2}5$ eset stb. $p = \frac{3465}{6^5}$.

34. A három húzás eredményét háromjegyű számnak tekintve 8^3 különböző eredményt kaphatunk, és a kísérlet leírása alapján mindegyik egyformán valószínű.

a) Kedvező: (123), (234), ... ,(678); azaz 6 eset, $p = \frac{6}{8^3}$.

b) Az előző számhármasok minden permutációja jó, $p = \frac{3!6}{8^3}$.

35. Kedvező, ha a jók az első hat helyen vannak. $p = \frac{6!4!}{10!}$.

36. A kihúzott számok bármely sorrendje egyformán valószínű, az összes eset száma 5! , ezekből a kedvező 1. Így $p = \frac{1}{5!}$. (Megjegyezzük, hogy ez pl. 1990-ben be is következett).

37. Az összes eset száma 20!.

a) A három kötet egymás mellett növekvő sorszám szerint 18 különböző helyen lehet, a többi mellettük 17!-féleképp. $p = \frac{18 \cdot 17!}{20!} = \frac{1}{380}$.

b) A három kötet helyét $\binom{20}{3}$ féleképpen jelölhetjük ki. $p = \frac{\binom{20}{3}17!}{20!} = \frac{1}{3!}$.
Okoskodhatunk úgy is, hogy bárhol is van a három könyv, mindegyik sorrendjük egyformán valószínű, de csak egy a kedvező.

38. Az összes eset száma 10!

a) A két szélső közé a többit 8!-féleképpen állíthatjuk. $p = \frac{8!}{10!}$

b) A két egymás melletti helyet 9-féleképpen választhatjuk, és a két gyereket felcserélhetjük. $p = \frac{2 \cdot 9 \cdot 8!}{10!}$.

39. a) n kulcs közül választhatunk: $p = \frac{1}{n}$.
b) Az n kulcsot $n!$-féleképpen vehetjük sorra. (Ebből a szempontból nem érdekes, hogy ha már kinyitottuk a zárat, nem próbálkozunk tovább). A nem jó kulcsokat a k-adik helyet kihagyva $(n-1)!$-féleképpen helyezhetjük el. $p = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$.

40. Az összes csokoládét megkülönböztethetőnek tekintve $N(N-1)...(N-n+1)$ féle kihúzási sorrend létezik. Ezek közül azok száma, ahol egy meghatározott helyen tejcsokoládé van, $s(N-1)(N-2)...(N-n+1)$, mert arra a helyre s db közül választhatunk, a többire $N-1$ db-ból. $p = \frac{s(N-1)...(N-n+1)}{N(N-1)...(N-n+1)} = \frac{s}{N}$.

41. Rögzítsük a tokokat. Ezekbe a szalagokat 14!-féleképpen lehet betenni. Kedvező, ha a három szalag a három tokban van, esetleg összecserélve. Az ilyen sorrendek száma 3!11! . $p = \frac{3!11!}{14!} = \frac{1}{364}$.

42. Az összes eset száma $\binom{18}{6}$. Kedvező, ha mind a 10, 11,...,18 számok közül kerül ki.

$$p = \frac{\binom{9}{6}}{\binom{18}{6}} = \frac{1}{221} \quad .$$

43. Könnyebb az ellentétes esemény valószínűségét meghatározni. A legnagyobb (Ln) és legkisebb (Lk) különbsége több, mint tíz, ha (Ln=13, Lk=1), vagy (Ln=13, Lk=2), vagy (Ln=12, Lk=1). A másik két szám a kettő között rendre $\binom{11}{2}$, $\binom{10}{2}$, $\binom{10}{2}$-féleképpen választható.

$$p = 1 - \frac{\binom{11}{2} + 2\binom{10}{2}}{\binom{13}{4}} = \frac{114}{143} \quad .$$

44. Az összes eset száma $\binom{18}{2}$. Kedvező, ha vagy a hat egyformából kettőt, vagy a négy párból egy párt választunk.

$$p = \frac{\binom{6}{2} + 4}{\binom{18}{2}} = \frac{19}{153} \quad .$$

45. Mivel pl. a 8 mm-es csavarok különböző darabszámai egymást kizáró események:

$$p = \frac{\sum_{i=10}^{20} \binom{50}{i}\binom{60}{20-i}}{\binom{110}{20}} = \frac{\sum_{i=1}^{9} \binom{60}{i}\binom{50}{20-i}}{\binom{110}{20}} \quad .$$

46. Az összes eset száma $\binom{18}{9}$. Jelöljük A-val és B-vel a két csapatot. Ha a két legjobb A-ban van, $\binom{16}{7}$-féleképpen választhatjuk melléjük a többit, és persze lehetnek B-ben is. $p = \frac{2\binom{16}{7}}{\binom{18}{9}} = \frac{8}{17}$.

47. Az összes eset száma $\binom{18}{6}\binom{12}{6}$. A két legjobb az első csapatba $\binom{16}{4}\binom{12}{6}$-féleképpen kerülhet, és ugyanígy a többibe.

$$p = \frac{3\binom{16}{4}\binom{12}{6}}{\binom{18}{6}\binom{12}{6}} = \frac{5}{17} \quad .$$

48. Az összes eset száma $\binom{28}{4}\binom{24}{4}\ldots\binom{8}{4}$.A két ember helyét 7-féleképpen jelölhetjük ki, a többieket $\binom{26}{2}\binom{24}{4}\ldots\binom{8}{4}$-féleképp ültethetjük melléjük. $p = \frac{1}{9}$.

49. $p = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$.

50. Az α esetben a játékos 1/3 valószínűséggel választja ki az elején az ajándékot, és mivel ehhez ragaszkodik, 1/3 valószínűséggel nyer.
A β esetben 1/2 valószínűséggel választja a két doboz közül azt, amelyikben az ajándék van.
A γ esetben az első választáskor tulajdonképpen azt a dobozt jelöli ki, amelyik neki nem kell. Mivel ebben 1/3 valószínűséggel van az ajándék, 1/3 valószínűséggel veszít, azaz 2/3 valószínűséggel nyer. (Okoskodhatunk úgy is, hogy akkor és csak akkor nyer, ha elsőre krumplit választott, aminek valószínűsége 2/3.) Tehát a γ stratégia a jó.

51. a) A 32 lapból hatot visszatevéssel 32^6 sorrendben húzhatunk ki. Könnyebb az ellentett eseménnyel számolni. A nem-ász lapokat 28^6 különböző sorrendben húzhatjuk ki. $p = 1 - (\frac{28}{32})^6$.

b) A 32 lapból hatot visszatevés nélkül $32 \cdot 31 \cdot \ldots \cdot 27$-féleképpen húzhatunk ki. Ezek közül azok száma, amelyekben egyetlen ász sincs, $28 \cdot 27 \cdot \ldots \cdot 23$. $p = 1 - \frac{28 \cdot 27 \cdot \ldots \cdot 23}{32 \cdot 31 \cdot \ldots \cdot 27}$.
Okoskodhatunk így is: 32 lapból hatot $\binom{32}{6}$-féleképp választhatunk ki, és úgy, hogy nincs közöttük ász, $\binom{28}{6}$-féleképp.

Megjegyzés. Felmerül a kérdés, hogy ha a b) pontban számolhattunk az ismétlés nélküli kombinációkkal, nem számolhatnánk-e az a) pontban az ismétléses kombinációkkal? Nem, mégpedig azért nem, mert a kísérlet alapján azok az elemi események, amelyeket az ismétléses kombináció megkülönböztet, nem lennének egyenlő valószínűségűek. Pl. az ismétléses kombinációkkal számolva egy elemi esemény az, hogy mind a hatszor piros ászt húztunk, és egy másik az, hogy ötször piros ászt, és egyszer zöld hetest. A kísérlet leírása alapján ez utóbbi valószínűsége hatszor nagyobb, hiszen különböző esetet jelentenek azok, ahol a zöld hetes más-más helyen van.

52. Az összes eset száma $32 \cdot 31 \cdot \ldots \cdot 27$.

a) A harmadik helyen piros lehet úgy, hogy
ez az egyetlen; $24 \cdot 23 \cdot 8 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20$-féleképp,
két piros van; $\binom{5}{1} 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 8 \cdot 7$-féleképp,
három piros van; $\binom{5}{2} 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$-féleképp stb.
Így $p \approx 0.25$

b) Hasonló meggondolással

$$p = \frac{8 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 7 + \binom{4}{1} 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 + \dots}{32 \cdot 31 \cdot \dots \cdot 27} \approx 0.0565 \quad .$$

53. Az összes eset száma 32^6.

a) Azon esetek száma, amikor a harmadik piros: $32 \cdot 32 \cdot 8 \cdot 32 \cdot 32 \cdot 32$, így $p = \frac{1}{4}$. Okoskodhatunk úgy is, hogy mivel minden húzásnál 32 lap közül választhatunk, és nyolc piros van, a harmadik húzásnál a piros-húzás valószínűsége $p = \frac{8}{32}$.

b) $p = \frac{8 \cdot 32^4 \cdot 8}{32^6} = \frac{1}{16}$.

54. Az összes eset száma $\binom{32}{8}\binom{24}{8}\binom{16}{8}$.

a) Annak valószínűsége, hogy a négy ász egy adott emberhez kerül,

$$p = \frac{\binom{28}{4}\binom{24}{8}\binom{16}{8}}{\binom{32}{8}\binom{24}{8}\binom{16}{8}} = \frac{\binom{28}{4}}{\binom{32}{8}} \quad .$$

Okoskodhatunk úgy is, hogy mivel mindegy, hogy C-n kívül kihez mi kerül, és bármely nyolc lap C-hez kerülése egyformán valószínű, az összes eset $\binom{32}{8}$, ezek közül azok száma, amelyek a négy ászt tartalmazzák $\binom{28}{4}$.

b) Mivel, ha az egyik embernél négy ász van, a másiknál nem lehet, és négy különböző embert választhatunk:

$$p = \frac{4\binom{28}{4}}{\binom{32}{8}} \quad .$$

55. a) Az olyan sorozatok száma, amelyekben nincs zöld vagy egy zöld van, $24^8 + \binom{8}{1} 8 \cdot 24^7$ (mert az egy zöld nyolc különböző helyen lehet).

$$p = 1 - \frac{24^8 + 64 \cdot 24^7}{32^8} \, .$$

b)

$$p = 1 - \frac{\binom{24}{8} + \binom{8}{1}\binom{24}{7}}{\binom{32}{8}} \, .$$

56. a) $p_1 = \frac{\binom{12}{2}}{\binom{27}{2}} = \frac{22}{117} \approx 0.1880$. b) $p_2 = \frac{\binom{15}{2}}{\binom{27}{2}} = \frac{35}{117} \approx 0.2991$.

c) Mivel vagy egy, vagy két 40 wattos lehet $p_3 = \frac{\binom{12}{1}\binom{15}{1} + \binom{12}{2}}{\binom{27}{2}} = \frac{82}{117} \approx 0.7009$.

Számolhatunk úgyis, hogy $p_3 = 1 - p_2$.

57. Az összes eset száma 27^2.

a) $p_1 = \frac{12^2}{27^2} \approx 0.1975$. b) $p_2 = \frac{15^2}{27^2} \approx 0.3086$.

c) Vagy előszörre, vagy másodszorra húzunk negyvenest, vagy mindkettő az. $p_3 = \frac{12 \cdot 15 + 15 \cdot 12 + 12 \cdot 12}{27^2}$, vagy $p_3 = 1 - p_2 \approx 0.6914$.

58. Az összes eset száma 50^2.

a) $p = \frac{20^2}{50^2} = \frac{4}{25}$. b) $p = \frac{20\cdot 30 + 30\cdot 20}{50^2} = \frac{12}{25}$.

59. Az összes eset száma 10^4 (mivel 0-val is kezdődhet rendszám).

a) $p = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{10^4} \approx 0.504$.

b) A két azonos számjegy helyét $\binom{4}{2}$-féleképpen jelölhetjük ki.

$$p = \frac{\binom{10}{2}\binom{4}{2}}{10^4} \approx 0.027 .$$

c) Jelöljük a három megegyező számjegyet k-val. Ekkor $k \geq 1$, és k db nála kisebb van.

$$p = \frac{4\cdot 1 + 4\cdot 2 + \ldots + 4\cdot 9}{10^4} = \frac{18}{10^3} .$$

60. Rakjuk sorba a cipőket. A fűzőpárokat $\binom{20}{10}$ féleképpen tehetjük melléjük. Ebből egy esetben mindegyik megfelelő fűzőt kap, 9 ill. 8 pár fűző pedig úgy lehet a helyén, ha a helyes elrendezéshez képest egy barnát egy feketével, ill. két barnát két feketével felcserélünk.

$$p = \frac{1 + \binom{10}{1}\binom{10}{1} + \binom{10}{2}\binom{10}{2}}{\binom{20}{10}} \approx 0.0115 .$$

61. Az összes eset száma $\binom{30}{6}$. Könnyebb meghatározni azt, hányféleképpen lehet a kiválasztott 6 irattartóban legalább egy teljes kézirat. Két teljes kézirat $\binom{10}{2}$-féleképpen lehet; egy teljes kézirat úgy, hogy a fennmaradó három irattartóból két irattartó ugyanabból a kéziratból való részt, egy pedig az előzőektől különböző kéziratból való részt tartalmaz $\binom{10}{1}\binom{9}{2}2\binom{3}{2}\binom{3}{1}$-féleképpen; vagy lehet egy teljes kézirat és három különböző kéziratból való rész $\binom{10}{1}\binom{9}{3}\binom{3}{1}\binom{3}{1}\binom{3}{1}$ féleképpen; ez összesen 29205 eset. Tehát annak valószínűsége, hogy nincs teljes kézirat,

$$p = 1 - \frac{29205}{\binom{30}{6}} \approx 0.9508 .$$

62. x^2-1 akkor és csak akkor osztható tízzel, ha x^2 egyesre végződik, azaz x egyesre vagy kilencesre végződik. Az összes eset száma n, a kedvező pedig, ahány egyesre vagy kilencesre végződő n-nél nem nagyobb pozitív egész szám van. Ent y -nal jelölve y egészrészét, ha n a 0,1,2,3,4 számjegyek valamelyikére végződik, akkor Ent$\frac{n}{5}$ páros, és ha az utolsó jegy nem a 0, akkor Ent$\frac{n}{5}$-nél eggyel több 1-re ill. 9-re végződő szám van, azaz ezek száma a vizsgált esetekben Ent$\frac{n+4}{5}$. Hasonlóan okoskodunk, ha n az 5,6,7,8,9 számjegyek valamelyikére végződik.

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{Ent}(\frac{n+4}{5})}{n}, & \text{ha Ent}\frac{n}{5} \text{ páros,} \\ \dfrac{\mathrm{Ent}(\frac{n+1}{5})}{n}, & \text{ha Ent}\frac{n}{5} \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Mivel mindkét esetben a számláló $\frac{n}{5}$-től 1-nél kevesebbel tér el, $|\frac{1}{5} - p_n| < \frac{1}{n}$; ezért $\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{5}$.

63. 10 db egyjegyű szám van, és $k > 1$ esetén $9 \cdot 10^{k-1}$ db k-jegyű, az összes eset száma pedig 10^n.

Így $p = \frac{10}{10^n}$ ha $k = 1$, és $p = \frac{9 \cdot 10^k}{10^n} = 9 \cdot 10^{k-n-1}$ ha $1 < k \leq n$.

64. A k-adik akkor lesz r-rel egyenlő sorszámú, ha $k-1$ golyó száma r-nél kisebb, $(n-k)$-é pedig r-nél nagyobb. Az összes eset száma $\binom{N}{n}$. Ezért

$$p = \begin{cases} \frac{\binom{r-1}{k-1}\binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}, & \text{ha } k \leq r \text{ és } n-k \leq N-r, \\ 0 & \text{különben} . \end{cases}$$

65. Sorszámozzuk meg a nőket is és a férfiakat is úgy, hogy a házaspárok ugyanazt a számot kapják. A kedvező esetek azok, amikor egyik hölgy sem kerül a vele megegyező sorszámú férfi mellé. Ezen esetek száma a **31.36-38** feladatok és megoldásaik alapján $N_{n,0}$. Az összes eset száma $n!$.

$$p = \frac{N_{n,0}}{n!} = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{1}{i!} .$$

Érdemes észrevenni, hogy ez a valószínűség n növekedésével $\frac{1}{e}$-hez tart.

66. Az előző feladat megoldása alapján annak valószínűsége, hogy egyik sem húzza a sajátját, $\frac{N_{28,0}}{28!}$. Így

$$p = 1 - \sum_{i=0}^{28}(-1)^i\frac{1}{i!} .$$

67. Az összes beérkezési sorrend 6!. A **31.38** feladat alapján

$$p = \frac{N_{6,2}}{6!} = \frac{1}{2!}\sum_{i=0}^{4}(-1)^i\frac{1}{i!} .$$

68. A **31.38** feladat alapján

a) $$p = \frac{N_{n,k}}{n!} = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i\frac{1}{i!} .$$ b) $$p = \sum_{j=k}^{n}\frac{1}{j!}\sum_{i=0}^{n-j}(-1)^i\frac{1}{i!} .$$

69. A levelek kiosztásának összesen $30 \cdot 29 \cdot \ldots \cdot 21 = \binom{30}{10}10!$ lehetséges sorrendje van.

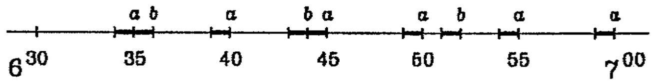
a) Kedvező esetek: ha mindenki a sajátját kapja, ez egy eset; pontosan kilencen kapják a sajátjukat, tehát tízből egy a húsz nem-címzett ládáiba kerül, a többi a helyére. Ez $\binom{10}{1}\binom{20}{1}$ eset. Így $p = \frac{1+10 \cdot 20}{\binom{30}{10}10!} \approx 1.8436 \cdot 10^{-12}$.

b) Kedvező eset minden a) pont alatti; pontosan nyolcan a saját levelüket kapják, ha vagy két levelet a címzettek között felcserél a postás, vagy egyet a nem-címzettekhez dob, a másikat pedig ennek helyére, vagy pedig két levelet a nem-címzettekhez dob. Ez $\binom{10}{2}(1 + 2\binom{20}{1} + \binom{20}{2})$ eset. Így

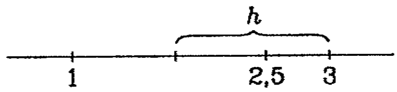
$$p = \frac{1 + 10 \cdot 20 + 45 \cdot 231}{\binom{30}{10}10!} \approx 9.7187 \cdot 10^{-11} .$$

Ha a feladatot folytatni akarnánk, azaz pl. azt kérdeznénk, mennyi a valószínűsége annak, hogy legalább ketten, vagy akár pontosan ketten a sajátjukat kapják, egy meglehetősen bonyolult feladattal állnánk szemben, amely többféleképpen is megközelíthető, és többnyire egy rekurzív formulához vezet.

70. Egy percnél kevesebbet kell a villamosra várni az ábrán vastagítással feltüntetett időintervallumokban, melyek együttes hossza 9. (Itt a geometriai mérték az intervallumok hossza.) $p = \frac{9}{30}$.

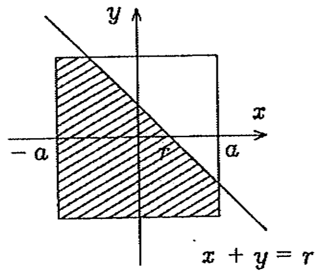


71. Jelölje h annak a részintervallumnak a hosszát, amelyen a pont elhelyezhető. $\frac{h}{2} = 0.6$, $h = 1.2$. Ezért $r = 0.7$. L. ábra:



72. A feladat alapján a rádió bekapcsolásának időpontja egy többórás intervallumban véletlenszerű. Így $p = \frac{10}{60}$.

73. A két számot tekintsük egy pont két koordinátájának. Ekkor a két szám választása megfelel annak, hogy az ábrán levő négyzet egy pontját választjuk. Itt a geometriai mérték a síkidom területe. A keresett valószínűség a vonalkázott rész és az egész négyzet területének aránya.

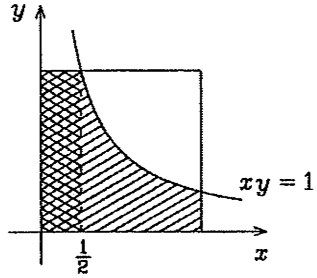


$$P(x+y<r)=\begin{cases} 0, & \text{ha } r \le -2a, \\ \frac{(2a+r)^2}{8a^2}, & \text{ha } -2a < r \le 0, \\ \frac{8a^2-(2a-r)^2}{8a^2}, & \text{ha } 0 < r \le 2a, \\ 1, & \text{ha } 2a < r . \end{cases}$$

74. A két számot egy pont két koordinátájának tekintve az előző feladat megoldásához hasonlóan járhatunk el.

a) $P(x + y < \frac{4}{5}) = \frac{\frac{8}{25}}{4} = \frac{2}{25}$.

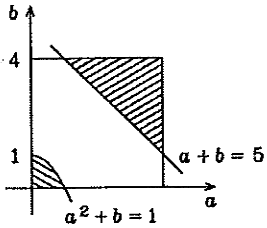
b) Az $xy < 1$ egyenlőtlenségnek eleget tevő pontok egy $\frac{1}{2} \cdot 2 + \int_{1/2}^{2} \frac{1}{x} dx$ területű alakzatot alkotnak (l. ábra).

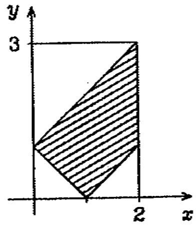


$$P(xy < 1) = \frac{1 + 2\ln 2}{4} = \frac{1}{4} + \ln\sqrt{2} \quad .$$

75. a) L. következő, bal oldali ábra. $P(a + b > 5) = \frac{9}{2} : 16 = \frac{9}{32}$

b) $P(a^2 + b < 1) = \frac{2}{3} : 4 = \frac{1}{6}$

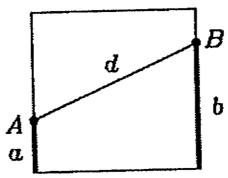




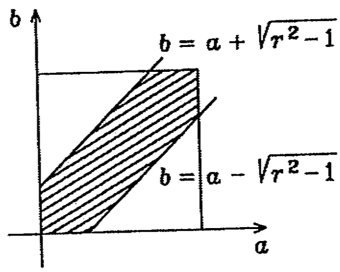
76. A határok és a háromszögegyenlőtlenségek miatt $0 < x < 2$, $0 < y < 3$, $x + y > 1$, $x + 1 > y$, $y + 1 > x$. Így $p = \frac{1}{2}$. L. fenti jobb oldali ábra.

77. Találkoznak, ha érkezésük között fél óránál kevesebb telik el. Jelöljük érkezési idejüket x-szel ill. y-nal. Mivel legkésőbb 1/2 6-ig meg kell érkezniük, $10 \le x \le 17.5$, $10 \le y \le 17.5$, $|x - y| \le 0.5$. $P(|x - y| \le 0.5) = \frac{7.25}{56.25} = \frac{29}{225}$.

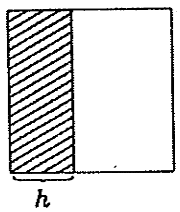
78. Tekintsük az a) ábrát. Mivel a kiválasztott A és B pontok távolsága $d = \sqrt{(a-b)^2 + 1}$, a feltétel $(a - b)^2 + 1 < r^2$, azaz $|a - b| < \sqrt{r^2 - 1}$. Mivel a és b tetszőleges olyan értékek, hogy $0 \le a \le 1$, $0 \le b \le 1$, az alaphalmaz területe a b) ábra szerint 1.



$$p = \begin{cases} 0, & \text{ha } r \le 1 \,, \\ 2\sqrt{r^2-1} - r^2 + 1, & \text{ha } 1 < r \le \sqrt{2}, \\ 1, & \text{ha } \sqrt{2} < r \,. \end{cases}$$

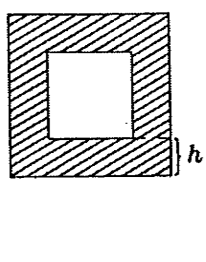


79. a) L. a) ábra. Pl. ha az a oldal adott:



$$p = \begin{cases} 0, & \text{ha } h \le 0 \,, \\ \frac{h}{3}, & \text{ha } 0 < h \le 3, \\ 1, & \text{ha } 3 < h \,. \end{cases}$$

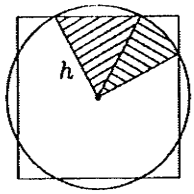
b) L. b) ábra.



$$p = \begin{cases} 0, & \text{ha } h \le 0 \,, \\ \frac{4h(3-h)}{9}, & \text{ha } 0 < h \le \frac{3}{2} \,, \\ 1, & \text{ha } \frac{3}{2} < h \,. \end{cases}$$

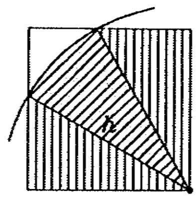
c) L. c) ábra.

$$p=\begin{cases} 0, & \text{ha } h\le 0,\\ \frac{h^2\pi}{9}, & \text{ha } 0<h\le \frac{3}{2},\\ \frac{6\sqrt{h^2-(\frac{3}{2})^2}+2h^2(\frac{\pi}{2}-2\arccos\frac{3}{2h})}{9}, & \text{ha } \frac{3}{2}<h\le\frac{3\sqrt{2}}{2},\\ 1, & \text{ha } \frac{3\sqrt{2}}{2}<h. \end{cases}$$



d) L. d) ábra.

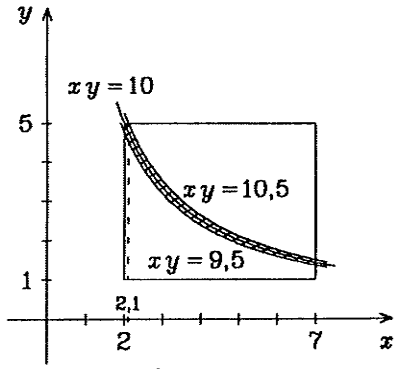
$$p=\begin{cases} 0, & \text{ha } h\le 0,\\ \frac{h^2\pi}{36}, & \text{ha } 0<h\le 3,\\ \frac{\sqrt{h^2-9}}{3}+\frac{h^2(\frac{\pi}{2}-2\arccos\frac{3}{h})}{18}, & \text{ha } 3<h\le 3\sqrt{2},\\ 1, & \text{ha } 3\sqrt{2}<h. \end{cases}$$



80. Legyen az első szám x, a második y. Az $|xy-10|\le 0.5$ egyenlőtlenségnek eleget tevő pontok halmazának területe:

$$T=\int_2^{2.1}\left(5-\frac{9.5}{x}\right)dx+\int_{2.1}^{7}\left(\frac{10.5}{x}-\frac{9.5}{x}\right)dx\,.$$

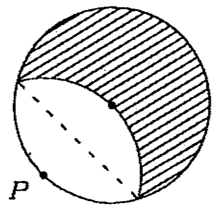
Mivel az alaphalmaz területe 20, $p=\frac{0.5+\ln 7+9.5\ln 2-10.5\ln 2.1}{20}\approx 0.0620.$



81. A legbelső körnek, ill. a körgyűrűknek a területe $t=\frac{R^2\pi}{5}$. A belső kör r_1 sugarára $r_1^2\pi=t$, az első gyűrűre $r_2^2\pi-r_1^2\pi=t$ stb. Így $r_1=R/\sqrt{5}$, $r_2=R\sqrt{\frac{2}{5}}$, $r_3=R\sqrt{\frac{3}{5}}$, $r_4=R\sqrt{\frac{4}{5}}$.

82. Bárhol is választjuk P-t, az ábrának megfelelően (a bevonalkázott rész területét T-vel jelölve)

$$p=\frac{T}{R^2\pi}=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$$



83. a) Annak valószínűsége, hogy a húr középpontja a körlap egy részére esik, egyenesen arányos a rész területével. Az alaphalmaz mértéke $R^2\pi$. Ha h-val jelöljük a húr középpontjának távolságát a kör középpontjától, a $2\sqrt{R^2-h^2}<\frac{R}{3}$ egyenlőtlenséget kapjuk (l. a) ábra). Ebből a körgyűrű pontjaira $\frac{\sqrt{35}}{6}R < h \leq R$. Így

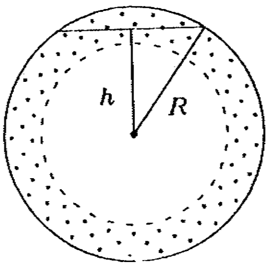
$$P(\text{húr hossza} < \frac{R}{3}) = P\left(\frac{\text{körgyűrű területe}}{\text{kör területe}}\right) = \frac{1}{36} \approx 0.0278 \ .$$

b) Annak valószínűsége, hogy bármelyik pont a körív egy darabjára esik, egyenesen arányos a darab hosszával. Az is nyilvánvaló, bárhol is legyen az egyik pont, a húr hossza attól függ, milyen messze van tőle a másik. Mivel a körív hossza egyenesen arányos a hozzá tartozó ϕ középponti szöggel, az alaphalmaz mértéke 2π, és kedvező esetben $0 \leq \phi < 2\arcsin\frac{1}{6}$ (l. b) ábra).

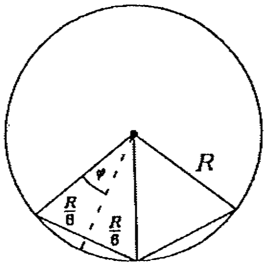
$$P\left(\text{húr hossza} < \frac{R}{3}\right) = \frac{4\arcsin\frac{1}{6}}{2\pi} \approx 0.1066 \ .$$

c) Nyilvánvaló, bárhogy is jelöljük ki az irányt, a húr hossza az átmérőn választott pontnak a középponttól való távolságától függ (l. c) ábra). Mivel a pontot az átmérőn választjuk véletlenszerűen, az alaphalmaz mértéke $2R$.

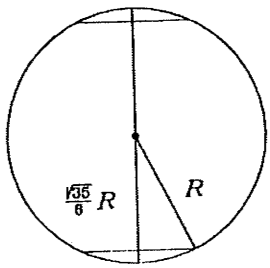
$$P\left(\text{húr hossza} < \frac{R}{3}\right) = 1 - \frac{\sqrt{35}}{6} \approx 0.0140 \ .$$



a) ábra



b) ábra



c) ábra

Látjuk, mindhárom esetben más valószínűség adódott. Ez természetes, hiszen más és más kísérletet végeztünk. Ezért fontos, hogy a kísérlet pontosan meg legyen határozva, mert csak így dönthető el, hogy mik lesznek az egyenlő valószínűségű események. Erre nagy szükség van pl. akkor, ha egy feladatot szimulációs eljárással akarunk megoldani.

84. A három számot a választás sorrendjében jelöljük x, y, z-vel, és tekintsük ezeket egy térbeli pont koordinátáinak. Az alaphalmaz most egy a oldalú kocka, a mérték pedig a térfogat. Az alaphalmaz mértéke a^3.

a) Azok a pontok, amelyek koordinátái eleget tesznek az $x + y + z < a$ egyenlőtlenségnek, az $0 \leq x < a$, $0 \leq y < a - x$, $0 \leq z < a - x - y$ térrészben vannak, melynek térfogata

$$\int_0^a \int_0^{a-x} \int_0^{a-x-y} 1 dz dy dx = \frac{a^3}{6} \ .$$

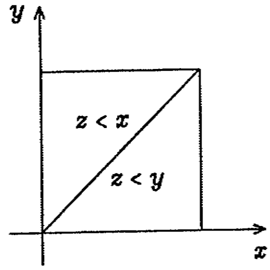
Így $P(x+y+z<a)=\frac{1}{6}$

b) Feltétel: $z<\min(x,y)$. A keresett térfogat

$$V=V(y<x)+V(x<y)=$$

$$=\int_0^a\int_0^x\int_0^y 1\,dzdydx+\int_0^a\int_x^a\int_0^x 1\,dzdydx=\frac{a^3}{3}$$

$$P(z<\min(x,y))=\frac{1}{3}\,.$$



(Ez utóbbi kérdést megoldhatjuk úgy is, hogy a választott számok minden sorrendje egyformán valószínű, és kettő kedvező a hat lehetségesből).

85. Ha a választott számokat egy ötdimenziós pont koordinátáinak tekintjük, akkor az alaphalmaz egy ötdimenziós kocka, a mérték az ötdimenziós térfogat, az alaphalmaz mértéke a^5.

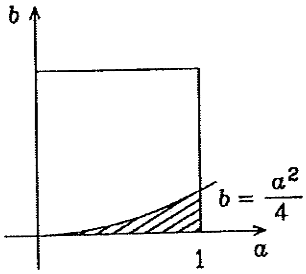
$$P(x_1,x_2,x_3<\frac{a}{3}\quad \text{és}\quad x_4,x_5>\frac{a}{3})=\frac{4}{3^5}\,,$$

ugyanis $\int_0^{a/3}\int_0^{a/3}\int_0^{a/3}\int_{a/3}^a\int_{a/3}^a 1\,dx_5dx_4dx_3dx_2dx_1=4a^5/3^5$.

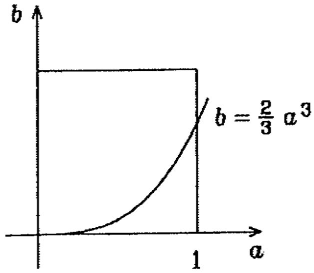
86. Az átló hossza $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, így az a kedvező, ha az (x,y,z) koordinátájú pont egy kettő sugarú nyolcadgömbben van. Az alaphalmaz egy kettő élű kocka.

$$P(d<2)=\frac{\frac{4\cdot 2^3\pi}{3\cdot 8}}{2^3}=\frac{\pi}{6}\,.$$

87. Az alaphalmaz mértéke az egységnégyzet területe, azaz 1. $k=0$, ha $a^2-4b<0$; $k=1$, ha $a^2-4b=0$; $k=2$, ha $a^2-4b>0$. Mivel $\int_0^1\frac{a^2}{4}da=\frac{1}{12}$, ezért $P(k=0)=\frac{1}{12}$, és $P(k=2)=\frac{11}{12}$. $P(k=1)=0$, mivel a parabolavonal területe 0.



88. Egy harmadfokú polinomnak akkor van egy valós gyöke, ha vagy nincs lokális maximuma és minimuma, vagy ha a maximum- és minimumhelyen a polinom helyettesítési értéke azonos előjelű. Akkor lehet kettő, ha vagy a maximum, vagy a minimum 0, és akkor van három, ha a maximum és mimimum különböző előjelű. Most a főegyüttható pozitív, így a maximumhely a kisebb.

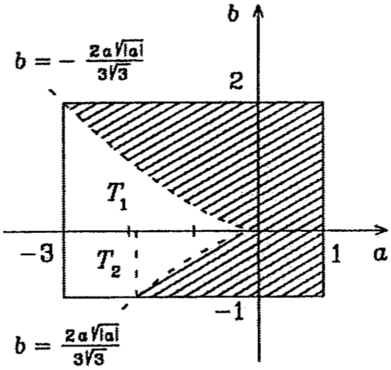


Mivel $q'(x)=x^2-a^2$, és $a\geq 0$, nincs szélsőérték, ha $a=0$, különben a maximum az $x=-a$, a minimum az $x=a$ helyen van. Így:

$k=1$, ha $a=0$ vagy $q(-a)q(a)>0$;

$k=2$, ha $q(-a)=0$ vagy $q(a)=0$;
$k=3$, ha $q(-a)>0$ és $q(a)<0$.
$q(-a)=\frac{2}{3}a^3+b$, $q(a)=-\frac{2}{3}a^3+b$.
Mivel $q(-a)\geq 0$ minden figyelembe veendő b-re, $q(a)<0$ pedig akkor és csak akkor, ha $b\leq\frac{2}{3}a^3$, $\quad P(k=1)=\frac{5}{6}$,
$P(k=2)=0$, $\quad P(k=3)=\int_0^1\frac{2}{3}a^3da=\frac{1}{6}$.

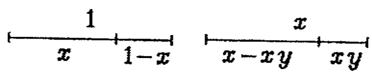
89. Jelöljük k-val a különböző valós gyökök számát. Az előző feladathoz hasonlóan vizsgáljuk a $q'(x)=3x^2+a$ deriváltat. Ha $a>0$, $q(x)$-nek nincs szélsőértéke, azaz $k=1$.
Ha $a<0$ $q(x)$-nek két szélsőértéke van, és akkor van három gyöke, ha ezek különböző előjelűek, azaz $k=3$, ha $q(-\sqrt{|a|}/\sqrt{3})>0$ és $q(\sqrt{|a|}/\sqrt{3})<0$. Ezekből
$b>2a\sqrt{|a|}/3\sqrt{3}$ és $b<-2a\sqrt{|a|}/3\sqrt{3}$ adódik. Az ábrának megfelelően a nem-vonalkázott rész:



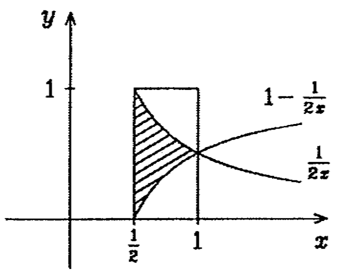
$$T_1=\int_{-3}^{0}\frac{2a\sqrt{|a|}}{3\sqrt{3}}da=\frac{12}{15}\quad T_2=\int_{-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}}^{0}\frac{2a\sqrt{|a|}}{3\sqrt{3}}da+(3-\frac{3}{\sqrt[3]{4}})=3-\frac{9}{5\sqrt[3]{4}}$$

$$P(k=3)=\frac{T_1+T_2}{12}=\frac{9\sqrt[3]{4}-3}{20\sqrt[3]{4}}\,,\qquad P(k=1)=1-P(k=3)\,.$$

$P(k=2)=0$, mivel a görbevonal területe 0.



90. A rúd hosszát választjuk egységnek. Az első törés után a hosszabb darab hossza x, ahol $\frac{1}{2}\leq x\leq 1$, és a második törés az előzőtől xy távolságra van, ahol $0\leq y\leq 1$. A három darab hossza tehát $1-x$, xy, $x-xy$.
a) A háromszögegyenlőtlenségek miatt $x-\frac{1}{2}\leq xy\leq\frac{1}{2}$, azaz $1-\frac{1}{2x}\leq y\leq\frac{1}{2x}$. Így $p=\ln\frac{4}{e}$.
b) A feltételekből a következő egyenlőtlenségeket nyerjük:



$$\alpha)\ y>\frac{9}{10x}-1\,,\quad \beta)\ y<\frac{11}{10x}-1\,,\quad \gamma)\ y>2-\frac{11}{10x}\,,$$
$$\delta)\ y<2-\frac{9}{10x}\,,\quad \sigma)\ y>\frac{1}{2}-\frac{1}{20x}\,,\quad \tau)\ y<\frac{1}{2}+\frac{1}{20x}\,.$$

A határgörbék metszéspontjainak meghatározása után a tartomány területe;

$$T_t=\int_{\frac{6}{10}}^{\frac{19}{30}}3-\frac{18}{10x}dx+\int_{\frac{19}{30}}^{\frac{7}{10}}\frac{1}{10x}dx+\int_{\frac{7}{10}}^{\frac{11}{15}}\frac{22}{10x}-3dx=$$
$$=\frac{1}{10}[18\ln 6+22\ln\frac{22}{3}-19\ln\frac{19}{3}-21\ln 7]$$

$$p = \frac{T_t}{\frac{1}{2}} = 2T_t$$

Megjegyzés. Az alaphalmaz és a rúddarabok hosszának fenti meghatározása az első látásra mesterkéltnek tűnik, és felmerül a kérdés, nem lehetne-e a területeket pl. úgy kijelölni, hogy legyen a nagyobb darab hossza x, $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, majd ezt eltörve a második darabé y, $0 \leq y \leq x$. Rövid meggondolással látjuk, hogy ez így a közönséges területre nézve nem fog geometriai valószínűségi mezőt alkotni, mert annak valószínűsége, hogy az (x, y) pont egy adott tartományba esik, nem lesz arányos a tartomány területével. Fontos, hogy pl. az y-ra vonatkozó alsó és felső határ ne függjön x-től, és ehhez az kell, hogy a változókat egymástól függetlenül választhassuk. Később, a teljes valószínűség tételének alkalmazásánál más úton is belátjuk, hogy a fenti eredmények a helyesek (**148. feladat**).

91. Az alaphalmaz mértéke a hengerben levő tömeg. Ezt m-mel jelölve és polárkoordinátákra áttérve

$$m = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^4 \frac{r}{1+r^2} dz dr d\varphi = 4\pi \ln 5 \, .$$

A kúpba eső tömeg:

$$2\pi \ln 5 + \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_r^2 \frac{r}{1+r^2} dz dr d\varphi$$

$$p = \frac{2\ln 5 - 2 + \mathrm{arctg} 2}{2\ln 5} \, .$$

92. Az alaphalmaz mértéke az összes tömeg. Ezt m-mel jelölve és gömbkoordinátákra áttérve

$$m = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} e^{-r} r^2 \sin\vartheta \; d\vartheta dr d\varphi = 8\pi$$

A hengerben levő anyag tömege

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\varphi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r} r^2 \sin\vartheta \; d\vartheta dr d\varphi = [2\varphi + e^{-\varphi}(6 + 4\varphi + \varphi^2)]_0^{\frac{\pi}{2}} \, .$$

$$p = \frac{\pi - 6 + e^{-\frac{\pi}{2}}(6 + 2\pi + \frac{\pi^2}{4})}{8\pi} \, .$$

93. $P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$,
$P(A) = P(AB) + P(A\overline{B}) = P(B)P(A|B) + (1 - P(B))P(A|\overline{B})$.
Ez két egyenlet a $P(A)$ és $P(B)$ ismeretlenekre. $P(A) = \frac{21}{46}$.

94. $P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$. Mivel $P(B|A) \leq 1$, ezért $0.7 \geq 0.8P(A|B)$, azaz $P(A|B) \leq \frac{0.7}{0.8}$;
$1 \geq P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, így $P(AB) \geq 0.5$.
Ebb$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \geq \frac{0.5}{0.8}$

95. $P(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{P(\overline{A}\,\overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{1-P(A+B)}{1-P(B)}$.

96. A T 32.16 tétel alapján
$P(ABC|D)P(D) = P(ABCD) = P(DABC) =$
$= P(D)P(A|D)P(B|AD)P(C|ABD)$. A $P(D) \neq 0$ értékkel egyszerűsítünk.

97. $P(AB) = P(A)P(B)$.
a) $P(A) = P(AB) + P(A\overline{B}) = P(A)P(B) + P(A\overline{B})$.
Ebből $P(A\overline{B}) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\overline{B})$, tehát függetlenek.
b) Fentiek alapján, ha két esemény független, akkor bármelyik független a másik ellentététől. A és $\overline{B}$ függetlenségéből $\overline{A}$ és $\overline{B}$ függetlensége következik.

98. $P(A) = P(AB) = P(A)P(B)$, így $P(A)(1 - P(B)) = 0$.

99. $P(A+B+C) = P(A)+P(B+C)-P(A(B+C))$; ebből, és a **25.** feladatként bebizonyított Poincaré-tételből $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$ következik.

100. $P(AB(C + D)) = P(ABC) + P(ABD) - P(ABCD) = P(AB)P(C + D)$.

101. Mivel $P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$, ezért $P(B) = \frac{1}{2}$, és $\frac{1}{8} = P(AB) = P(A)P(B)$, tehát A és B függetlenek.

102. Jelentse B_i azt az eseményt, hogy az i-edik kísérletben A_2 bekövetkezik, C_i pedig azt, hogy az i-edik kísérletben A_1, A_2, A_3 egyike sem következik be. A keresett esemény:
$A = B_1 + B_2C_1 + B_3C_2C_1 + \ldots + B_nC_{n-1}C_{n-2}\ldots C_1$
Az összeadandók egymást páronként kizárják, és a kísérletek függetlenek, így a $q = 1 - p_1 - p_2 - p_3$ jelöléssel $P(C_i) = q$, és $P(A) = p_2\frac{1-q^n}{1-q}$.

103. $P\left(\begin{matrix}\text{az összeg}\\ \text{páratlan szám}\end{matrix}\middle|\text{az összeg } < 8\right) = \frac{P(\text{az összeg } 3,\,5,\,7)}{P(\text{az összeg}<8)} = \frac{12}{36} : \frac{21}{36} = \frac{4}{7}$.

104.
a) $P(\text{az összeg } 7|\text{páratlan}) = \frac{P(\text{az összeg 7 és páratlan})}{P(\text{az összeg páratlan})} = \frac{6}{36} : \frac{18}{36} = \frac{1}{3}$.
b) $P(\text{a dobott számok között van páratlan}) = \frac{27}{36}$.
$P(\text{a dobott számok összege 6, és van közöttük páratlan}) = \frac{3}{36}$.
$P(\text{a dobott számok összege 6 }|\text{van közöttük páratlan}) = \frac{1}{9}$.

105. $P(\text{az összeg 12}) = \frac{25}{6^3}$, $P(\text{az egyik 6-os, az összeg 12}) = \frac{15}{6^3}$.
$P(\text{az egyik 6-os } | \text{ az összeg 12}) = \frac{3}{5}$.

106. $P(\text{az összeg osztható öttel}) = \frac{7}{36}$, $\quad P\left(\begin{matrix}\text{két ötös és}\\ \text{az összeg osztható öttel}\end{matrix}\right) = \frac{1}{36}$,
$P(\text{két ötös } | \text{ az összeg osztható öttel}) = \frac{1}{7}$.

107. Első megoldás. A kihúzott számok minden sorrendje egyformán valószínű. Mivel háromféleképp lehet az első kisebb, mint a második, és csak egy olyan sorrend van, ahol a harmadik a kettő közé esik, $p = \frac{1}{3}$.
Második megoldás. N különböző számból a sorrendet is figyelembe véve $\binom{N}{3}3!$-féleképp húzhatunk ki hármat, és bármely hármat véve három olyan sorrend van, hogy az első kisebb, mint a második, és csak egy, hogy a harmadik a kettő között van. Azaz
$P(\text{első } < \text{ második}) = \binom{N}{3}3/\binom{N}{3}3! = \frac{1}{2}$,

$P(\text{első} < \text{harmadik} < \text{második}) = \binom{N}{3}/\binom{N}{3}3! = \frac{1}{6}$,

$P(\text{első} < \text{harmadik} < \text{második} \mid \text{első} < \text{második}) = \frac{1}{6}/\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.

108. Első megoldás. Mivel mindegyik kihúzott golyó egyenlő valószínűséggel lehetett első, $p = \frac{k}{n}$.

Második megoldás. Tegyük fel, hogy a dobozban N fehér, és M fekete golyó volt. Jelöljük A-val azt az eseményt, hogy az első golyó fehér volt, B-vel pedig azt, hogy az n kihúzott golyóból k volt fehér. Mivel a kihúzott golyók sorrendje is számít, az összes eset száma $\binom{M+N}{n}n!$, ezek közül a B-nek megfelelők száma $b = \binom{N}{k}\binom{M}{n-k}\binom{n}{k}k!(n-k)!$ (ugyanis a fehérek helyét $\binom{n}{k}$-féleképpen jelölhetjük ki, és $k!$-féleképpen tehetjük ezeket sorba, stb.). Az AB eseménynek megfelelőek száma $a = N\binom{N-1}{k-1}\binom{M}{n-k}\binom{n-1}{k-1}(k-1)!(n-k)!$

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{a}{\binom{M+N}{n}n!} : \frac{b}{\binom{M+N}{n}n!} = \frac{k}{n} \quad .$$

109. Jelentse A_i azt az eseményt, hogy az illető az i-edik teremben van. Az A_i-k egymást páronként kizárják.

$$P(A_5|\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4) = \frac{P(A_5\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4)}{P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4)} = \frac{P(A_5)}{1 - P(A_1 + A_2 + A_3 + A_4)} =$$

$$= \frac{\frac{p}{5}}{1 - \frac{4}{5}p} = \frac{p}{5-4p} \quad .$$

Megjegyzés. Ha $0 < p < 1$, akkor $\frac{p}{5-4p} < p$. Azaz, ha már négy teremben nem találtuk, csökken a valószínűsége, hogy egyáltalán az egyetemen van.

110. A teljes valószínűség tételét alkalmazzuk (**T 32.17**). Jelentse B_i azt az eseményt, hogy az első dobás eredménye i volt. A B_i-k teljes eseményrendszert alkotnak.

$$P\left(\begin{matrix}\text{a második dobás}\\ \text{nagyobb, mint az első}\end{matrix}\right) = \sum_{i=1}^{6} P\left(\begin{matrix}\text{a második dobás}\\ \text{nagyobb, mint az első}\end{matrix}\middle| B_i\right) P(B_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{6} \frac{6-i}{6}\frac{1}{6} = \frac{15}{36} \quad .$$

111. Ha már egy zoknit kihúztunk, akkor annak valószínűsége, hogy másodiknak olyat húzunk, amelyik az elsővel párt alkot, függ attól, hogy mit húztunk elsőnek: a három egyforma párból, a négy különbözőből, vagy a páratlanokból. Ez a három esemény teljes eseményrendszert alkot, jelöljük őket rendre A-val, B-vel, C-vel. $P(A) = \frac{6}{18}$, $P(B) = \frac{8}{18}$, $P(C) = \frac{4}{18}$. Jelölje D azt az eseményt, hogy a második zokni párja az elsőnek. Ekkor $P(D|A) = \frac{5}{17}$, $P(D|B) = \frac{1}{17}$, $P(D|C) = 0$. Ezért **T 32.17**

$$P(D) = \frac{5}{17}\cdot\frac{6}{18} + \frac{1}{17}\cdot\frac{8}{18} + 0\cdot\frac{1}{18} = \frac{19}{153} \quad .$$

112. Jelölje A_i azt az eseményt, hogy az i-edik dobozt választottuk, és C azt, hogy a csavar jó. Az A_i-k teljes eseményrendszert alkotnak.

$$P(C) = P(C|A_1)P(A_1) + P(C|A_2)P(A_2) = 0.9 \cdot 0.5 + 0.94 \cdot 0.5 = 0.92 \,.$$

113. Jelölje A_1, A_2, A_3 azt az eseményt, hogy melyik alkatrészen dolgozik a gép, ez teljes eseményrendszer.

$$P(\text{a gép áll}) = 0.1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{6} + 0.25 \cdot \frac{1}{2} \approx 0.1583 \quad .$$

114. a) Annak valószínűsége, hogy a második húzás eredménye zöld, csak attól függ, hogy húzáskor hány zöld volt a csomagban. Így az lesz a teljes eseményrendszer, hogy az első húzás zöld volt, ill. nem volt az. Jelölje A_i azt az eseményt, hogy az i-edik húzás eredménye zöld volt.

$$P(A_2) = P(A_2|A_1)P(A_1) + P(A_2|\overline{A}_1)P(\overline{A}_1) = \frac{7}{31} \cdot \frac{8}{32} + \frac{8}{31} \cdot \frac{24}{32} = \frac{1}{4} \,.$$

b) $P(A_1A_2) = P(A_2|A_1)P(A_1) = \frac{7}{31} \cdot \frac{8}{32}$.

c) Jelölje C_j ($j = 0, 1, 2$) azt, hogy az első két húzás között 0, 1, ill. 2 piros volt. Ez teljes eseményrendszer. Jelölje B_i ($i = 1, 2, 3$) azt, hogy az i-edik húzás eredménye piros.

$P(C_0) = P(\overline{B}_1\overline{B}_2) = P(\overline{B}_2|\overline{B}_1)P(\overline{B}_1) = \frac{23}{31} \cdot \frac{24}{32} = \frac{69}{124}$,

$P(C_1) = P(B_1\overline{B}_2) + P(\overline{B}_1B_2) = \frac{8}{32} \cdot \frac{24}{31} + \frac{24}{32} \cdot \frac{8}{31} = \frac{12}{31}$,

$P(C_2) = P(B_1B_2) = \frac{8}{32} \cdot \frac{7}{31} = \frac{7}{124}$,

$P(B_3) = P(B_3|C_0)P(C_0) + P(B_3|C_1)P(C_1) + P(B_3|C_2)P(C_2) =$

$= \frac{8}{30} \cdot \frac{69}{124} + \frac{7}{30} \cdot \frac{12}{31} + \frac{6}{30} \cdot \frac{7}{124} = \frac{1}{4}$.

115. Legyen a két választott halmaz A_1 és A_2. Az S részhalmazainak száma 2^N. Tegyük fel, hogy először egy k elemű részhalmazt húztunk. A k elemű részhalmazok száma $\binom{N}{k}$. Másodszorra akkor húzunk A_1-től diszjunktat, ha A_2 elemei az A_1 komplementerének $N-k$ eleme közül kerülnek ki. Az összes ilyen részhalmaz száma 2^{N-k}. (Ez $k = 0$ és $k = N$ esetén is áll, mert az üres halmaz önmagától is diszjunkt). Ezek szerint:

$$P(A_1 \text{ elemszáma } k) = \frac{\binom{N}{k}}{2^N}, \quad P(A_1 \cap A_2 = \emptyset | A_1 \text{ elemszáma } k) = \frac{2^{N-k}}{2^N} \,.$$

A k=0, 1, ..., N események teljes eseményrendszert alkotnak, így

$$P(A_1 \cap A_2 = \emptyset) = \sum_{k=0}^{N} \frac{2^{N-k}\binom{N}{k}}{2^{2N}} = \frac{1}{2^N}\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot 1^{N-k} = \frac{(\frac{3}{2})^N}{2^N} = \left(\frac{3}{4}\right)^N \,.$$

116. Jelölje B_i azt az eseményt, hogy a kivett alkatrészt az i-edik gép gyártotta. A B_i-k teljes eseményrendszert alkotnak.

a) $P(B_1) = \frac{250}{1040}$, $P(B_2) = \frac{320}{1040}$, stb.

$P(\text{jó}) = 0.98 \cdot \frac{25}{104} + 0.96 \cdot \frac{32}{104} + 0.97 \cdot \frac{20}{104} + 0.95 \cdot \frac{27}{104} \approx 0.9641$.

b) Bayes-tétellel (**T 32.18**):

$$P(B_4|\text{jó}) = \frac{0.95 \cdot \frac{27}{104}}{P(\text{jó})} \approx 0.2558 \quad .$$

117. Teljes eseményrendszer: a termék elsőosztályú vagy nem elsőosztályú. Annak valószínűsége, hogy a termék elsőosztályú, feltéve, hogy annak minősítették, Bayes-tétellel (**T 32.18**): $\frac{0.998\cdot 0.75}{0.998\cdot 0.75+0.05\cdot 0.25}\approx 0.9836$.

118. Teljes eseményrendszer: a termék jó, vagy selejtes. Bayes-tétellel, ill. a teljes valószínűség tételével:

a) $P(\text{selejt}|\text{jónak minősítették})=\frac{(1-\alpha)q}{(1-\alpha)q+(1-\beta)(1-q)}$.

b) $P(\text{jó}|\text{selejtnek minősítették})=\frac{\beta(1-q)}{\beta(1-q)+\alpha q}$.

c) $P(\text{jó és jónak minősítik})+P(\text{rossz és rossznak minősítik})=$

$$=P\left(\begin{matrix}\text{jónak}\\ \text{minősítik}\end{matrix}\middle|\text{jó}\right)P(\text{jó})+P\left(\begin{matrix}\text{rossznak}\\ \text{minősítik}\end{matrix}\middle|\text{rossz}\right)P(\text{rossz})=(1-\beta)(1-q)+\alpha q\ .$$

119. Teljes eseményrendszer: valaki beteg, vagy egészséges. Bayes-tétellel:

a) $P\left(\begin{matrix}\text{illető}\\ \text{egészséges}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\text{vizsgálati}\\ \text{eredmény negatív}\end{matrix}\right)=\frac{0.99\cdot 0.96}{0.99\cdot 0.96+0.05\cdot 0.04}\approx 0.9979$.

b) $P\left(\begin{matrix}\text{illető}\\ \text{beteg}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\text{vizsgálati}\\ \text{eredmény pozitív}\end{matrix}\right)=\frac{0.95\cdot 0.04}{0.01\cdot 0.96+0.95\cdot 0.04}\approx 0.7983$.

120. Az előző feladathoz hasonlóan 2% esetén

a) $p=\frac{0.99\cdot 0.98}{0.99\cdot 0.98+0.05\cdot 0.02}\approx 0.9990$, b) $p=\frac{0.95\cdot 0.02}{0.01\cdot 0.98+0.95\cdot 0.02}\approx 0.6597$.

8% esetén:

a) $p=\frac{0.99\cdot 0.92}{0.99\cdot 0.92+0.05\cdot 0.08}\approx 0.9956$, b) $p=\frac{0.95\cdot 0.08}{0.01\cdot 0.92+0.95\cdot 0.08}\approx 0.8920$.

121. Teljes eseményrenszer: tudta, nem tudta. Bayes-tétellel:

a) $P(\text{tudta}|\text{jót jelölt be})=\frac{1\cdot p}{1\cdot p+0.5\cdot(1-p)}=\frac{2p}{1+p}$.

b) $P(\text{tudta}|\text{jót jelölt be})=\frac{1\cdot p}{1\cdot p+0.25\cdot(1-p)}=\frac{4p}{1+3p}$.

c) $P(\text{tudta}|\text{jót jelölt be})=p(n)=\frac{1\cdot p}{1\cdot p+0.5\cdot(1-p)}=\frac{np}{1+(n-1)p}$.

Megjegyzés. Vegyük észre, $\lim_{n\to\infty}p(n)=1$.

122. Jelentse B_i azt az eseményt, hogy a ropik között i zacskó olyan van, amelyet X gyártott, és legyen A az az esemény, hogy a kivett mintában s ilyen zacskó van. Az utolsó feltétel miatt $P(B_i)$ értéke minden i-re ugyanannyi.

$$P(B_k|A)=\frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{i=0}^{N}P(A|B_i)P(B_i)}=\frac{P(A|B_k)}{\sum_{i=0}^{N}P(A|B_i)}=$$

$$=\frac{\binom{n}{s}\left(\frac{k}{N}\right)^s\left(1-\frac{k}{N}\right)^{n-s}}{\sum_{i=0}^{N}\binom{n}{s}\left(\frac{i}{N}\right)^s\left(1-\frac{i}{N}\right)^{n-s}}=\frac{k^s(N-k)^{n-s}}{\sum_{i=0}^{N}i^s(N-i)^{n-s}}\ .$$

123. Az egymás utáni dobások eredménye egymástól független. Ezért annak valószínűsége, hogy az első két dobás hatos, a másik kettő nem az, $\frac{1}{6}\frac{1}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}$. A négy dobásból a hatosok $\binom{4}{2}$ különböző helyen lehetnek. Ezek az események egymást kizárják. Így $p=\binom{4}{2}\frac{5^2}{6^4}\approx 0.1157$

124. $P(\text{legalább egyik célhoz ér})=1-P(\text{mindkettő elakad})=1-0.8\cdot 0.83=0.336$.

125. Biztonságosan le tud szállni, ha vagy egy motor sem romlik el, vagy ha csak egy romlik el, vagy ha kettő, de azok különböző oldalon. A motorok egymástól függetlenül romlanak el, tehát
$P(\text{biztonságosan leszáll}) = (1-q)^4 + 4q(1-q)^3 + 4q^2(1-q)^2$.

126. A fiú helyét ötféleképpen jelölhetjük ki, ezek egymást páronként kizárják.
$p = 5 \cdot 0.516 \cdot (0.484)^4 \approx 0.1416$.

127. Annak valószínűsége, hogy tíz dobásból nulla, vagy egy hatos lesz:
$p = \left(\frac{5}{6}\right)^{10} + \binom{10}{1}\left(\frac{5}{6}\right)^9 \cdot \frac{1}{6} \approx 0.4845$ mivel az egy hatos helyét $\binom{10}{1}$ féleképpen jelölhetjük ki.

128. Két kockával a dupla hatosdobás valószínűsége $1/36$. $p = \left(\frac{35}{36}\right)^{10} \approx 0.7545$.

129. Két kockát n-szer feldobva annak valószínűsége, hogy egyszer sem lesz két hatos, $(\frac{35}{36})^n$. $1 - (\frac{35}{36})^n > 0.98$ alapján
$n > \frac{-2+\log 2}{\log 35 - \log 36} \approx 138.8$. Tehát legalább 139-szer.

130.

a) A három négyes helyét $\binom{30}{3}$ féleképpen jelölhetjük ki, és ezek egymást kizárják. $p = \binom{30}{3}(\frac{5}{6})^{27}(\frac{1}{6})^3$.

b) $p = \binom{5k}{k}\left(\frac{5}{6}\right)^{4k}\left(\frac{1}{6}\right)^k$.

131. a) Az eredmény akkor ugyanaz, ha ugyanazok a számok vannak ugyanazokon a kockákon, tehát $p = \frac{1}{6^3}$

b) Az eredmény akkor ugyanaz, ha ugyanazok a számok vannak felül. Ha az első dobás eredménye három egyforma szám volt, a második dobáskor is minden kockán ugyanannak kell lennie, de ha különbözők voltak, akkor ugyanazok a számok más kockán is lehetnek. Azok az események, hogy az első dobás eredménye három egyforma szám volt, vagy két egyforma és egy tőlük különböző, vagy három különböző, teljes eseményrendszert alkotnak. Ezek valószínűsége rendre $\frac{6}{6^3}$, $\frac{90}{6^3}$, $\frac{120}{6^3}$. A teljes valószínűség tétele (**T 32.17**) alapján
$p = \frac{1}{6^3} \cdot \frac{6}{6^3} + \frac{3}{6^3} \cdot \frac{90}{6^3} + \frac{3!}{6^3} \cdot \frac{120}{6^3} = \frac{83}{3888}$.

132. Az első után mindig csak a megelőző szám nem jó: $p = (\frac{5}{6})^{n-1}$.

133. a) Rendeljük mindegyik hallgatóhoz annak a tételnek a sorszámát, amelyiket nem tudja. A **31.36-38** feladatok alapján $p = \frac{N_{35,0}}{35!} = \sum_{i=0}^{35}(-1)^i\frac{1}{i!} \approx$
≈ 0.36787944

b) $(\frac{34}{35})^{35}$.

134. Jelölje T_{XY} azt az eseményt, hogy az XY szakaszon nincs hóakadály.

a) El lehet jutni A-ból E-be ha az
$T_{AD}T_{DE} + T_{AC}T_{CE} + T_{AB}T_{BC}T_{CE}$ esemény bekövetkezik. Poincaré tételével:
$P(T_{AD}T_{DE} + T_{AB}T_{BC}T_{CE} + T_{AC}T_{CE}) = P(T_{AD}T_{DE}) + P(T_{AC}T_{CE}) + P(T_{AB}T_{BC}T_{CE}) -$
$- P(T_{AD}T_{DE}T_{AC}T_{CE}) - P(T_{AD}T_{DE}T_{AB}T_{BC}T_{CE}) - P(T_{AC}T_{CE}T_{AB}T_{BC}) +$

$P(T_{AD}T_{DE}T_{AC}T_{CE}T_{AB}T_{BC}) =$
$= (1-p)^2 + (1-p)^2 + (1-p)^3 - (1-p)^4 - (1-p)^5 - (1-p)^4 - (1-p)^6$.

b) $P(T_{BA}T_{AD}T_{DE} + T_{BC}T_{CE} + T_{BA}T_{AC}T_{CE} + T_{BC}T_{CA}T_{AD}T_{DE}) =$
$= (1-p)^2 + 2(1-p)^3 - 4(1-p)^5 + 2((1-p)^6$.

135. a) $\frac{1}{n} \cdot \alpha$.

b) Jelölje A azt az eseményt, hogy az útlevél ott van. Bayes-tétellel:

$$P(\overline{A}|\text{ nem találja}) = \frac{P(\text{nem találja }|\overline{A})P(\overline{A})}{P(\text{nem találja }|\overline{A})P(\overline{A}) + P(\text{nem találja }|A)P(A)} =$$

$$= \frac{1 \cdot \frac{n-1}{n}}{1 \cdot \frac{n-1}{n} + \alpha \cdot \frac{1}{n}} = \frac{n-1}{n-1+\alpha} \ .$$

c) A fiókokat egyszer végignézve $1-\alpha$ valószínűséggel nem találja, másodszorra sem találja $(1-\alpha)^2$ valószínűséggel.

136. Az első doboz választásának valószínűsége minden golyónál 1/5. Pontosan négyszer választjuk $p = \binom{10}{4}(\frac{1}{5})^4(\frac{4}{5})^6$ valószínűséggel.

137. a) Mivel mindig eggyel kevesebb kulcsból választunk, és az első $k-1$ esetben rosszat, $k \geq 2$ esetén $p = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{n-k+2} \cdot \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n}$, és $k = 1$ esetén triviálisan $p = \frac{1}{n}$.

b) Minden próbálkozásnál $\frac{1}{n}$ a valószínűsége a jó kulcs választásának.
$p = (1-\frac{1}{n})^k \frac{1}{n}$.
(Nagyszámú kulcs esetén, és n-hez képest kis k-ra alig van jelentősége annak, hogy a zárba nem illő kulcsokat félretesszük-e.)

138. Első megoldás. Mivel erre a kísérletsorozatra az egyesdobás relatív gyakorisága $\frac{k}{n}$, akkor annak valószínűsége, hogy ebben a kísérletsorozatban egy adott dobás eredménye egy, éppen $\frac{k}{n}$.
Második megoldás. Annak valószínűsége, hogy n dobásból k db egyes: $p = \binom{n}{k}(\frac{1}{6})^k(\frac{5}{6})^{n-k}$, mivel a k db egyes helyét $\binom{n}{k}$-féleképpen jelölhetjük ki, ezek egymást kizárják, és mindegyik valószínűsége ugyanannyi. Az i-edik egyes volt, ha a többi helyen $k-1$ egyes van és $n-k$ nem egyes. Ha $k = 0$, a keresett valószínűség 0. Ha $k \geq 1$, akkor

$$P\left(\begin{array}{c|c} i\text{-edik dobás} & k \text{ db} \\ \text{egyes} & \text{egyesdobás}\end{array}\right) = \frac{P\begin{pmatrix} k \text{ db egyes és} \\ \text{az } i\text{-edik egyes}\end{pmatrix}}{P(k \text{ db egyes})} =$$

$$= \frac{\frac{1}{6}\binom{n-1}{k-1}\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}}{\binom{n}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^{k}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}} = \frac{k}{n}$$

139. A pontosan 0, 1, 2 db jel eltorzulása egymást kizáró események.
$p = 0.998^{1500} + \binom{1500}{1}0.998^{1499} \cdot 0.002 + \binom{1500}{2}0.998^{1498} \cdot 0.002^2$

140. A kajak nem sérül meg, vagy pontosan egyszer sérül meg jelentékenyen:
$p = p_1^n + \binom{n}{1}p_1^{n-1}p_2$ valószínűséggel.

141. Jelölje D azt az eseményt, hogy egy vizsgálat esetén helyes a diagnózis.

$$P(D) = P(D|\text{egészséges})P(\text{egészséges}) + P(D|\text{beteg})P(\text{beteg}) =$$

$= 0.99 \cdot 0.96 + 0.95 \cdot 0.04 \approx 0.9884$
Tíz véletlenszerűen érkező emberen végzett tíz független vizsgálat eredménye mind helyes $p = P(D)^{10} \approx 0.8899$ valószínűséggel.

142. Teljes eseményrendszer: az első két gépen, a következő öt gépen, a többin gyártották a kivett alkatrészt.
a) $p_s = P(\text{a kivett darab selejtes}) = 0.2 \cdot 0.03 + 0.5 \cdot 0.015 + 0.3 \cdot 0.01 = 0.0165$.
b) Az öt alkatrész egymástól függetlenül selejtes, vagy nem, így
$P(\text{legfeljebb egy selejtes}) = p_s^5 + 5p_s^4(1 - p_s)$

143. $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}$, $P(A_1A_2) = P(A_1A_3) = P(A_2A_3) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$,
de $P(A_1A_2A_3) = 0 \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)$.

144. A feladatot a **T 32.16** tétellel oldjuk meg.
a) A piros golyó a kilencedik. Annak valószínűsége, hogy először három feketét, majd öt fehéret, majd egy pirosat húzunk:
$p_1 = \left(\frac{18}{53} \cdot \frac{17}{52} \cdot \frac{16}{51}\right) \left(\frac{15}{50} \cdot \frac{14}{49} \cdot \frac{13}{48} \cdot \frac{12}{47} \cdot \frac{11}{46}\right) \cdot \frac{20}{45}$. A három fekete helyét $\binom{8}{3}$-féleképp jelölhetjük ki, ezek egymást kizárják, így $p = \binom{8}{3}p_1$.
b) A pirosat húzhatjuk elsőnek, másodiknak, ... ,19-ediknek, és előtte csupa feketét húzunk. Ezek egymást páronként kizáró események.

$$p = \frac{20}{53} + \frac{18}{53} \cdot \frac{20}{52} + \frac{18}{53} \cdot \frac{17}{52} \cdot \frac{20}{51} + \ldots = \frac{20 \cdot 18!}{53!} \sum_{k=1}^{19} \frac{(53-k)!}{(18-k+1)!}.$$

c) Összesen 33 nem-piros golyó van. Annak valószínűsége, hogy egymás után kihúzva a 13-adik az első piros:
$p = \frac{33}{53} \cdot \frac{32}{52} \cdot \ldots \cdot \frac{22}{42} \cdot \frac{20}{41}$.

145. a) A labda simán átmegy, ha a középpontja valamelyik négyzet minden oldalától 2.5 cm-nél messzebb van. $p = \frac{(8-2\cdot 2.5)^2}{8^2} = \frac{9}{64}$.
b) n dobásból egyszer sem megy át simán $\left(\frac{55}{64}\right)^n$ valószínűséggel. $\left(\frac{55}{64}\right)^n < \frac{1}{2}$, ha $n \geq 5$.

146. Az, hogy a második számra mik lesznek a kedvező értékek, függ attól, hogy mi volt az első szám. Ezért foglalkozzunk az elsőre vonatkozó feltételes valószínűséggel!
Tegyük fel, hogy az x értéket már kiválasztottuk, és most választjuk az y-t a $[0;1]$-ben véletlenszerűen. Annak valószínűsége, hogy y a $[0;1]$ valamely részintervallumába esik, arányos ennek a részintervallumnak a hosszával. Így a keresett valószínűség :
a) Ha $x \leq 0.1$, akkor $p_1(x) = P(|x-y| < 0.1) = x + 0.1$,
b) ha $0.1 < x \leq 0.9$, akkor $p_2(x) = P(|x-y| < 0.1) = 0.2$,
c) ha $x > 0.9$, akkor $p_3(x) = P(|x-y| < 0.1) = 1 - (x - 0.1) = 1.1 - x$.
Annak ellenére, hogy x összes lehetséges értékei teljes eseményrendszert alkotnak, nem tudjuk a teljes valószínűség tételét használni, mert bármely $x = \alpha$

eseményre $P(x=\alpha)=0$. Ezért a [0;1] intervallumot nagyon kicsi intervallumokra osztjuk úgy, hogy annak valószínűsége, hogy x egy ilyen intervallumba esik, bár nagyon kicsi, de nem nulla. Ezután vizsgáljuk meg, milyen határértéket kapunk, ha az intervallumok száma minden határon túl nő, és közben a hosszuk nullához tart.

Képezzük a [0;1] intervallum n részre való $0=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=1$ beosztását úgy, hogy 0.1 és 0.9 is az osztópontok között legyen. Jelöljük az $[x_{i-1},x_i)$ intervallumot I_i-vel. $P(x\in I_i)=x_i-x_{i-1}$, és az $x\in I_i$ események teljes eseményrendszert alkotnak $(i=1,2,\ldots,n)$. Vegyük sorra az a), b), c) eseteket.

Tekintsük a [0; 0.1) intervallumot. Legyen $x_k=0.1$. Ha $x\in I_i$, akkor $i<k$ esetén $x_{i-1}+0.1\le p_1(x)<x_i+0.1$, és

$$P(|x-y|<0.1 \text{és } x\in I_i)=P(|x-y|<0.1 \ |x\in I_i)P(x\in I_i)=p_1(x)(x_i-x_{i-1})$$

ezért

$$(x_{i-1}+0.1)(x_i-x_{i-1})\le P(|x-y|<0.1 \text{ és } x\in I_i)\le(x_i+0.1)(x_i-x_{i-1}).$$

Mivel $\cup_{i=1}^{k} I_i \ =[0;0.1)$

$$\sum_{i=1}^{k}(x_{i-1}+0.1)(x_i-x_{i-1})\le P(|x-y|<0.1 \text{és } x\in[0;0.1))\le\sum_{i=1}^{k}(x_i+0.1)(x_i-x_{i-1})$$

Az egyenlőtlenségsorozat bal és jobb oldalán az $\int_0^{0.1}(x+0.1)\,dx$ integrálnak egy-egy közelítő összege áll. Ez a határozott integrál létezik, így a beosztás minden határon túli finomításával a közelítő összegek közös határértéke

$$P(|x-y|<0.1 \text{ és } x\in[0;0.1))=\int_0^{0.1}(x+0.1)\,dx=0.015\,.$$

Hasonló meggondolással a [0.9;1] intervallumra

$$P(|x-y|<0.1 \text{ és } x\in[0.9;1])=\int_{0.9}^{1}(1.1-x)\,dx=0.015\,.$$

Mivel $p_2(x)\equiv 0.2$, $P(|x-y|<0.1 \text{ és } x\in[0.1,0.9))=0.2\cdot 0.8=0.16$. $P(|x-y|<0.1)=0.015+0.015+0.16=0.19$.

Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha geometriai valószínűséggel számolunk az $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$, $|x-y|<0.1$ egyenlőtlenségek alapján.

147. Az előző feladathoz hasonlóan járunk el. Most, ha már választottunk x-et, az y-t a $[0;x)$ intervallumban választjuk véletlenszerűen. Ekkor, mivel y számára a $[0;x)$ intervallum az alaphalmaz, ha

(*) $\quad 0\le v_1\le v_2\le x$ akkor $P(v_1\le y<v_2)=\frac{v_2-v_1}{x}$.

Az $x+y<3$ és $y<x$ feltételeket kell figyelembe vennünk. Egy kiválasztott x-re

$$P(y<3-x \text{ és } y<x)=P(y<\min(x;3-x))=$$

$$=\begin{cases} P(y<x), & \text{ha } 0<x\le 1.5\,,\\ P(y<3-x), & \text{ha } 1.5<x\le 2\,.\end{cases}$$

Ha $x \le 1.5$, akkor $(*)$-ot is figyelembe véve $P(x+y<3) = P(y<x) = P(y \in [0;x)) = \frac{x}{x} = 1$,
azaz
$P(x+y<3 \text{ és } x \le 1.5) = P(x+y<3 \mid x \le 1.5)P(x \le 1.5) = 1 \cdot 0.75$.
Ha $1.5 < x \le 2$, akkor $(*)$-ot is figyelembe véve
$P(x+y<3) = P(y<3-x) = \frac{3-x}{x}$.
Tekintsük az $(1.5;\ 2]$ intervallumnak egy $1.5 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 2$ beosztását. $P(x \in [x_{i-1}; x_i)) = \frac{x_i - x_{i-1}}{2}$, és

$$\frac{3-x_{i-1}}{x_{i-1}} \ge P(x+y<3 | x \in [x_{i-1}; x_i)) \ge \frac{3-x_i}{x_i}$$

(mert a tört értéke nő, ha a számlálót növeljük, a nevezőt csökkentjük).

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3-x_{i-1}}{x_{i-1}}\right)\frac{(x_i-x_{i-1})}{2} \ge P(x+y<3 \text{és } x \in (1.5;2]) \ge \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3-x_i}{x_i}\right)\frac{(x_i-x_{i-1})}{2}$$

A jobb és a bal oldal is az $\int_{1.5}^{2} \frac{3-x}{2x} dx$ integrál egy-egy közelítő összege, így $P(x+y<3 \text{ és } x > 1.5) = -0.25 + \ln\sqrt{(\frac{4}{3})^3}$.

$$P(x+y<3) = P(x+y<3 \text{ és } x \le 1.5) + P(x+y<3 \text{ és } x > 1.5) =$$

$$= 0.75 + (-0.25 + \ln\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^3}) = 0.5 + \ln\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^3} .$$

148. Válasszuk a rudat egységnyi hosszúnak, rögzítsük az egyik végét, és legyen az első törés távolsága ettől x. A második törés helye a rögzített végtől legyen y. Ha $x \le \frac{1}{2}$, akkor $x < y \le 1$, és ha $x > \frac{1}{2}$, akkor $y < x$. Így x megválasztása után y-ra kapjuk, hogy:

$$(1) \qquad P(y \in [v_1; v_2] \;\Big|\; x < \frac{1}{2} \text{ és } x \le v_1 \le v_2 \le 1) = \frac{v_2 - v_1}{1-x} ,$$

$$(2) \qquad P(y \in [v_1; v_2] \;\Big|\; x \ge \frac{1}{2} \text{ és } 0 \le v_1 \le v_2 \le x) = \frac{v_2 - v_1}{x} .$$

Tekintsük az $x < \frac{1}{2}$ esetet. A három rúd hossza ekkor x, $y-x$, $1-y$. A háromszögegyenlőtlenségekből az $x < \frac{1}{2}$, $y > \frac{1}{2}$, $y < x + \frac{1}{2}$ egyenlőtlenségeket kapjuk, és (1) szerint $P(\frac{1}{2} < y < x + \frac{1}{2}) = \frac{(x+1/2)-1/2}{1-x} = \frac{x}{1-x}$. Tekintsük a $[0, \frac{1}{2})$ intervallum egy $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = \frac{1}{2}$ beosztását. Ekkor $P(x \in [x_{i-1}; x_i)) = x_i - x_{i-1}$ és

$$\frac{x_{i-1}}{1-x_{i-1}} \le P\left(\frac{1}{2} < y < x + \frac{1}{2} \Big| x \in [x_{i-1}; x_i)\right) \le \frac{x_i}{1-x_i} .$$

A $[0; \frac{1}{2})$-be eső részintervallumokra összegezve

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{i-1}}{1-x_{i-1}}(x_i - x_{i-1}) \le P\left(\frac{1}{2} < y < x + \frac{1}{2} \text{ és } x < \frac{1}{2}\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1-x_i}(x_i - x_{i-1}).$$

A jobb és bal oldal egy-egy közelítő összege az $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{1-x}dx$ integrálnak, amely létezik, így

$$P_1 = P\begin{pmatrix}\text{háromszöget lehet} & \text{és } x < \frac{1}{2}\\ \text{alkotni} & \end{pmatrix} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{1-x}dx = -\frac{1}{2} + \ln 2\,.$$

Hasonlóképp okoskodva az $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ esetben $\frac{1}{2} = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ felosztással

$$\frac{1-x_{i-1}}{x_{i-1}} \geq P\left(\begin{matrix}\text{háromszöget lehet}\\ \text{alkotni}\end{matrix}\middle| x \in [x_{i-1}; x_i)\right) \geq \frac{1-x_i}{x_i}\,,$$

$$P_2 = P\begin{pmatrix}\text{háromszöget lehet} & \text{és } x \geq \frac{1}{2}\\ \text{alkotni} & \end{pmatrix} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1-x}{x}dx = -\frac{1}{2} + \ln 2\,.$$

Végül P(háromszöget lehet alkotni) $= P_1 + P_2 = \ln\frac{4}{e}$, mint azt már korábban más módszerrel láttuk.

33. Valószínűségi változók (megoldások)

1. Pl. a) A $\xi \le b$ eseményt egymást kizáró események összegére bontva kétféleképpen:
$P(\xi \le b) = P(\xi < b) + P(\xi = b)$, $P(\xi \le b) = P(\xi < a) + P(a \le \xi \le b)$.
Ebből $P(a \le \xi \le b)$-t kifejezzük.

2. Igen, mert nem negatív k, és $\sum_{i=0}^{\infty} qp^i = \frac{q}{1-p} = 1$.

3. ξ összes értékét behelyettesítve kapjuk η összes értékét.
a) $P(\eta = -3) = P(2\xi + 3 = -3) = P(\xi = -3) = 0.2$,
$P(\eta = -1) = P(\xi = -2) = 0.15$,
$P(\eta = 1) = 0.2$, $P(\eta = 5) = 0.15$, $P(\eta = 7) = 0.3$.
b) $P(\eta = -1) = 0.3$, $P(\eta = 0) = 0.15$, $P(\eta = 2) = 0.2$,
$P(\eta = 3) = 0.15$, $P(\eta = 4) = 0.2$.
c) $P(\eta = 1) = P(\xi^2 = 1) = P(\xi = -1) + P(\xi = 1) = 0.15 + 0.2 = 0.35$,
$P(\eta = 4) = 0.45$, $P(\eta = 9) = 0.2$.
d) $P(\eta = -2) = P(\xi = 1) + P(\xi = 2) = 0.45$,
$P(\eta = 4) = 0.2$, $P(\eta = 10) = 0.15$, $P(\eta = 18) = 0.2$.

4.
a) $P(\eta = 1) = P(\xi \text{ páros}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{3^{2i}} = \frac{1}{4}$,
$P(\eta = -1) = P(\xi \text{ páratlan}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{3^{2i-1}} = \frac{3}{4}$.
b) η értéke a maradék, ha ξ-t 3-mal osztjuk.
$P(\eta = 0) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{3i}} = \frac{1}{7}$, $P(\eta = 1) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{3i+1}} = \frac{4}{7}$, $P(\eta = 2) = \frac{2}{7}$.
c) $P(\eta = k^2) = P(\xi = k) = p_k$, $k = 1, 2, \ldots$
d) $P(\eta = k) = P(2\xi + 3 = k) = P(\xi = \frac{k-3}{2}) = p_{\frac{k-3}{2}}$, $k = 5, 6, \ldots$
e) Mivel ξ értékei egészek, $P(\eta = 0) = 1$.

5. Nyilván $0 < d < 1$.

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} kd^k = d \sum_{k=1}^{\infty} kd^{k-1} = d \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k \right)' \Bigg|_{x=d} = d \left(\frac{x}{1-x} \right)' \Bigg|_{x=d} ,$$

azaz $\frac{d}{(1-d)^2} = 1$, ebből $d = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

6.
a) Mivel a $\xi = -2$, $\xi = -1$, $\xi = 0$, $\xi = 1$ események teljes eseményrendszert alkotnak, $t = P(\xi = 1) = 0.2$.
b) η lehetséges értékei 1 és 3. $P(\eta = 1) = P(\xi = -1) + P(\xi = 0) = 0.55$, $P(\eta = 3) = P(\xi = -2) + P(\xi = 1) = 0.45$.
c)

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 1 , \\ 0.55, & \text{ha } 1 < x \le 3 , \\ 1, & \text{ha } 3 < x . \end{cases}$$

7. $P(\xi=-1)=\frac{1}{4}$, $P(\xi=0)=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$, $P(\xi=1)=\frac{1}{2}$, $P(\xi=2)=\frac{1}{6}$.

a) $P(\xi<0.5)=F(0.5)=\frac{1}{3}$.

b) $P(-0.5\le\xi\le 1)=F(1)-F(-0.5)+P(\xi=1)=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{7}{12}$.

c) $P(\xi\ge 1)=1-P(\xi<1)=1-F(1)=\frac{2}{3}$.

d) $P(0<\xi<2)=F(2)-F(0)-P(\xi=0)=\frac{1}{2}$.

8. $P(\xi=2)=P(\xi=12)=\frac{1}{36}$; $P(\xi=3)=P(\xi=11)=\frac{2}{36}$; stb.

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{ha } x\le 2\,,\\ \frac{1}{36}, & \text{ha } 2<x\le 3\,,\\ \frac{3}{36}, & \text{ha } 3<x\le 4\,,\\ \frac{6}{36}, & \text{ha } 4<x\le 5\,,\\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ 1, & \text{ha } 12<x\,.\end{cases}$$

9. A legkisebb akkor kisebb, mint k, ha nem mind legalább k. Az összes eset $\binom{6}{3}=20$, és pl. mindegyik kihúzott szám legalább kettő $\binom{5}{3}=10$ féleképpen lehet. Így $P(\xi<2)=1-P(\xi\ge 2)=1-10/20=1/2$.

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{ha } x\le 1\,,\\ 1/2, & \text{ha } 1<x\le 2\,,\\ 4/5, & \text{ha } 2<x\le 3\,,\\ 9/10, & \text{ha } 3<x\le 4\,,\\ 1, & \text{ha } 4<x\,.\end{cases}$$

10. A legnagyobb akkor kisebb, mint $i+1$, ha mindegyiket az első i közül húzzuk.

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{ha } x\le 5\,,\\ \frac{\binom{i}{5}}{\binom{10}{5}}, & \text{ha } i<x\le i+1\,, \qquad i=5,6,7,8,9\,,\\ 1, & \text{ha } 10<x\,.\end{cases}$$

11. A legkisebb kisebb, mint $i+1$, ha nem mind legalább $i+1$, azaz

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{ha } x\le 1\,,\\ 1-(\frac{6-i}{6})^3, & \text{ha } i<x\le i+1\,, \qquad i=1,2,3,4,5\,,\\ 1, & \text{ha } 6<x\,.\end{cases}$$

12.

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{ha } x\le 0\,,\\ \frac{1}{2^4}, & \text{ha } 0<x\le 1\,,\\ \binom{4}{1}\frac{1}{2^4}, & \text{ha } 1<x\le 2\,,\\ \left[\binom{4}{2}+\binom{4}{1}\right]\frac{1}{2^4}, & \text{ha } 2<x\le 3\,,\\ \left[\binom{4}{3}+\binom{4}{2}+\binom{4}{1}\right]\frac{1}{2^4}, & \text{ha } 3<x\le 4\,,\\ 1, & \text{ha } 4<x\,.\end{cases}$$

13. ξ lehetséges értékei: 1,2,... , és $P(\xi = k) = (\frac{5}{6})^{(k-1)}\frac{1}{6}$, mert $(k-1)$-szer nemnégyesnek kell lennie, és az utolsónak négyesnek.

14. Jelölje f a fej- és i az írásdobások számát.

a) ξ értéke csak 1 és 3 lehet.

$$P(\xi = 3) = P(f = 3, i = 0) + P(f = 0, i = 3) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4},$$

$$P(\xi = 1) = P(\text{összes többi eset}) = \frac{3}{4}.$$

b) A nyolcat kell két nemnegatív egész szám összegére bontani, és a 4-4 kivételével minden felbontás kétszer fordul elő.
$P(\xi = 0) = \binom{8}{4}\frac{1}{2^8}$, $P(\xi = 2) = 2\binom{8}{3}\frac{1}{2^8}$, $P(\xi = 4) = 2\binom{8}{2}\frac{1}{2^8}$,
$P(\xi = 6) = 2\binom{8}{1}\frac{1}{2^8}$, $P(\xi = 8) = 2\frac{1}{2^8}$.

15. Geometriai valószínűséggel (L. **32.87**)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0, \\ \frac{1}{12}, & \text{ha } 0 < x \le 2, \\ 1, & \text{ha } 2 < x. \end{cases}$$

16. a) $P(\xi > 45) = 1 - P(\xi < 45) - P(\xi = 45) = 1 - F(45) - 0 = \frac{1}{2}$, hiszen F folytonos a 45 pontban, így $P(\xi = 45) = 0$.

b) $P(60 < \xi < 90) = F(90) - F(60) - P(\xi = 60) = \frac{90}{120} - \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{4}$.

17.

a) $P(\xi \le 1.2) = F(1.2) + P(\xi = 1.2) = 0.04 + 0$, hiszen F folytonos az 1.2 pontban, így $P(\xi = 1.2) = 0$.

b) $P(0.8 < \xi < 1.5) = F(1.5) - F(0.8) - P(\xi = 0.8) = \frac{1}{4} - 0 - 0 = 0.25$.

c) $P(1.8 \le \xi \le 4.1) = F(4.1) - F(1.8) + P(\xi = 4.1) = 0.66$.

d) $P(4 < \xi < 8) = F(8) - F(4) - P(\xi = 4) = 0$.

18.

a) $P(\xi = 1) = \lim_{x\to 1+0} F(x) - F(1) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

b) $P(2 < \xi \le 4) = F(4) - F(2) - P(\xi = 2) + P(\xi = 4) = 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{12}$.

c) $P(\xi < 3) = F(3) = \frac{11}{12}$.

d) $P(\xi > \frac{1}{2}) = 1 - P(\xi \le \frac{1}{2}) = 1 - (F(\frac{1}{2}) + P(\xi = \frac{1}{2})) = \frac{3}{4}$.

19.

a) $\lim_{x\to -\infty} F(x) = 0$ és $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ alapján $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{\pi}$.

b) $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ miatt $B = 1$, ezért $C \le 0$. Ha $C = 0$, akkor A tetszőleges, és

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le A, \\ 1, & \text{ha } x > A. \end{cases}$$

Ha $C < 0$, a nemcsökkenés miatt az (A, ∞) intervallumban $F'(x) \ge 0$, azaz $Ce^{-x}(1 - x) \ge 0$ miatt $x \ge 1$, így $A \ge 1$, és $\lim_{x\to A+0}(1 + Cxe^{-x}) > 0$ miatt $-\frac{e^A}{A} \le C < 0$.

20. a) Mivel F minden pontban balról folytonos $\lim_{x\to 1-0} F(x) = F(1)$, amiből $0 = A + \frac{B}{2}$, és $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$, amikből $A = 1$, $B = -2$.

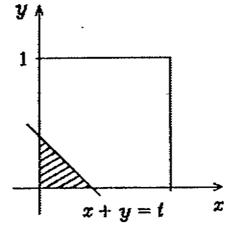
b) F mindenütt folytonos, így $P(\xi = x) = 0$ minden x-re.

$$P(10 \le \xi \le 14) = F(14) - F(10) + P(\xi = 14) = \frac{8}{165} .$$

c) $P(0.3 \le \xi \le 4) = F(4) - F(0.3) + P(\xi = 4) = 0.6$.

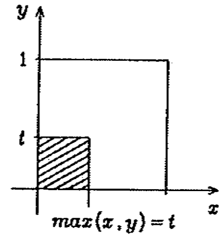
21. Jelöljük az eloszlásfüggvény változóját t-vel. A keresett valószínűségeket geometriai valószínűséggel határozzuk meg, $m(G) = 1$.

a) $F_\eta(t) = P(\eta < t) = P(x + y < t)$ (l. ábra).



$$F_\eta(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \le 0 , \\ \frac{t^2}{2}, & \text{ha } 0 < t \le 1 , \\ \frac{-2-t^2+4t}{2}, & \text{ha } 1 < t \le 2 , \\ 1, & \text{ha } 2 < t . \end{cases}$$

b) $F_\eta(t) = P(\max(x, y) < t)$ (l. ábra)



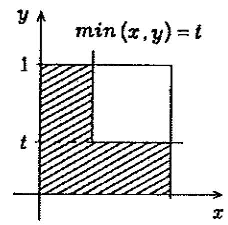
$$F_\eta(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \le 0 , \\ t^2, & \text{ha } 0 < t \le 1 , \\ 1, & \text{ha } 1 < t . \end{cases}$$

Ezt a feladatot úgy is megoldhatjuk, hogy

$$P(\max(x, y) < t) = P(x < t, y < t) =$$

$= P(x < t)P(y < t) = t^2$, mivel x-et és y-t egymástól függetlenül választjuk.

c) $F_\eta(t) = P(\min(x, y) < t)$ (l. ábra).

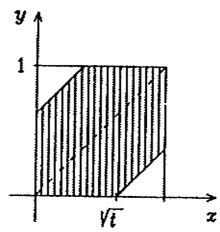


$$F_\eta(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \le 0 , \\ 2t - t^2, & \text{ha } 0 < t \le 1 , \\ 1, & \text{ha } 1 < t . \end{cases}$$

Ezt is megoldhatjuk másképp: mivel x és y függetlenek, $0 < t \le 1$ esetén

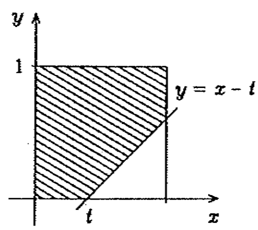
$$P(\min(x, y) < t) = P(x < t, y < t) +$$
$$+ P(x < t, y \ge t) + P(y < t, x \ge t) =$$
$$= t^2 + t(1 - t) + t(1 - t) = 2t - t^2$$

d) $F_\eta(t) = P((x-y)^2 < t) = P(|x-y| < \sqrt{t})$ (l. ábra)



$$F_\eta(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \le 0 , \\ 2\sqrt{t} - t, & \text{ha } 0 < t \le 1 , \\ 1, & \text{ha } 1 < t . \end{cases}$$

e) $F_\eta(t) = P(x - y < t)$ (l. ábra)



$$F_\eta(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \le -1 , \\ \frac{(1+t)^2}{2}, & \text{ha } -1 < t \le 0 , \\ \frac{1-t^2+2t}{2}, & \text{ha } 0 < t \le 1 , \\ 1, & \text{ha } 1 < t . \end{cases}$$

22. A **32.78** feladat eredménye alapján

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 1\,, \\ \sqrt{x^2-1}(2-\sqrt{x^2-1}), & \text{ha } 1 < x \leq \sqrt{2}\,, \\ 1, & \text{ha } 1 < x\,. \end{cases}$$

23. Geometriai valószínűséggel:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0\,, \\ x & \text{ha, } 0 < x \leq 1\,, \\ 1, & \text{ha } 1 < x\,. \end{cases}$$

24. Geometriai valószínűséggel, a **32.79** feladat eredményeit felhasználva

a)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0\,, \\ \frac{x}{3}, & \text{ha } 0 < x \leq 3\,, \\ 1, & \text{ha } 3 < x\,. \end{cases}$$

b)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0\,, \\ \frac{4x(3-x)}{9}, & \text{ha } 0 < x \leq \frac{3}{2}\,, \\ 1, & \text{ha } \frac{3}{2} < x\,. \end{cases}$$

c)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0\,, \\ \frac{x^2\pi}{9}, & \text{ha } 0 < x \leq \frac{3}{2}\,, \\ \frac{6\sqrt{x^2-(\frac{3}{2})^2}+2x^2(\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{3}{2x})}{9}, & \text{ha } \frac{3}{2} < x \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}\,, \\ 1, & \text{ha } \frac{3\sqrt{2}}{2} < x\,. \end{cases}$$

d)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0\,, \\ \frac{x^2\pi}{36}, & \text{ha } 0 < x \leq 3\,, \\ \frac{\sqrt{x^2-9}}{3} + \frac{x^2(\frac{\pi}{2}-2\arccos\frac{3}{x})}{18}, & \text{ha } 3 < x \leq 3\sqrt{2}\,, \\ 1, & \text{ha } 3\sqrt{2} < x\,. \end{cases}$$

25. A függetlenség miatt számolhatunk geometriai valószínűséggel, ahol G egy a oldalú kocka, így $m(G) = a^3$, és $x + y + z = r$ adott r-rel egy sík egyenlete, mely minden koordináta tengelyből ugyanannyit metsz le. A kocka sík "alatt" levő részének térfogatát számolva

$$F(r) = \begin{cases} 0, & \text{ha } r \leq 0\,, \\ \frac{r^3}{6a^3}, & \text{ha } 0 < r \leq a\,, \\ \frac{r^3-3(r-a)^3}{6a^3}, & \text{ha } a < r \leq 2a\,, \\ 1 - \frac{(3a-r)^3}{6a^3}, & \text{ha } 2a < r \leq 3a\,, \\ 1, & \text{ha } 3a < r\,. \end{cases}$$

26. a) $F_\eta(x) = P(\eta < x) = P(3\xi + 2 < x) = P(\xi < \frac{x-2}{3}) = F_\xi\left(\frac{x-2}{3}\right)$

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 2\,, \\ \frac{x-2}{3}, & \text{ha } 2 < x \leq 5\,, \\ 1, & \text{ha } 5 < x\,. \end{cases}$$

b)

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0\ , \\ x^2, & \text{ha } 0 < x \le 1\ , \\ 1, & \text{ha } \quad < x\ . \end{cases}$$

c) Mivel a szinuszfüggvény a $(0, \frac{\pi}{2})$ intervallumban szigorúan monoton, ezért ott invertálható; így $F_\eta(x) = P(1 + \sin\frac{\pi}{2}\xi < x) = P(\xi < \frac{2}{\pi}\arcsin(x-1))$, ha $x \in [1,2]$.

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 1 \\ \frac{2}{\pi}\arcsin(x-1). & \text{ha } 1 < x \le 2\ , \\ 1, & \text{ha } 2 < x\ . \end{cases}$$

d) $P(\eta < x) = P(\xi < \frac{\operatorname{arctg} x}{\pi} + \frac{1}{2})\ ,$ és $0 < \frac{\operatorname{arctg} x}{\pi} + \frac{1}{2} < 1\ .$

$$F_\eta(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{2} + \frac{1}{2}\ .$$

e)

$$P(\eta < x) = P(\frac{1}{\xi} < x) = \begin{cases} P(\frac{1}{x} < \xi < 0) = 0, & \text{ha } x < 0, \\ P(\xi > \frac{1}{x}) = 1 - P(\xi < \frac{1}{x}) = & \\ \quad = 1 - F(\frac{1}{x}), & \text{ha } x > 0\ . \end{cases}$$

Ezért

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 1\ , \\ 1 - \frac{1}{x}, & \text{ha } 1 < x\ . \end{cases}$$

f)

$$P(\eta < x) = P(\frac{1}{2} - \xi^2 < x) = 1 - P(\xi^2 < \frac{1}{2} - x) =$$

$$= 1 - P\left(-\sqrt{\frac{1}{2} - x} < \xi < \sqrt{\frac{1}{2} - x}\right) = 1 - \left(F_\xi\left(\sqrt{\frac{1}{2} - x}\right) - F_\xi\left(-\sqrt{\frac{1}{2} - x}\right)\right)$$

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le -\frac{1}{2}\ , \\ 1 - \sqrt{\frac{1}{2} - x}, & \text{ha } -\frac{1}{2} < x \le \frac{1}{2}\ , \\ 1, & \text{ha } \frac{1}{2} < x\ . \end{cases}$$

Megjegyzés. Ha a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye a megadott F_ξ, ez nem jelenti azt, hogy ξ nem vehet fel 0-nál kisebb, vagy 1-nél nagyobb értéket. Ez csak azt jelenti, hogy ha I egy adott intervallum, és $I \cap (0,1) = \emptyset$, akkor $P(\xi \in I) = 0$. Igy pl. az a) részfeladat eredménye nem zárja ki annak lehetőségét, hogy pl. a $\eta > 5$ esemény bekövetkezzen, csupán az biztos, hogy ennek valószínűsége 0.

27. Mivel $\eta \ge 3$, és $F(0) = 0$, ezért $F_\eta(x) = P(\eta < x) = P(\sqrt{\xi} < x - 3) = P(0 \ge \xi < (x-3)^2)$, ha $x \ge 3$. Az $1 \le (x-3)^2 \le 4$ egyenlőtlenséget az $x \ge 3$ esetre megoldva

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 4\ , \\ \frac{(x-3)^2 - 1}{3}, & \text{ha } 4 < x \le 5\ , \\ 1, & \text{ha } 5 < x\ . \end{cases}$$

28. a) f nemnegatív, folytonos és

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^1 x\, dx + \int_1^2 (2-x)dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

tehát lehet sűrűségfüggvény.

b) f nemnegatív, a 0 és 2 hely kivételével folytonos, és

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^2 (x-1)dx = 1$$

tehát ez is lehet sűrűségfüggvény.

29. $\int_0^1 (A+Bx)dx = 1$ és $A + Bx \geq 0$ miatt $0 \leq A \leq 2$, $B = 2(1-A)$. Tehát A-ra és B-re csak korlátokat és összefüggéseket írhatunk fel.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0\,, \\ Ax + \frac{Bx^2}{2}, & \text{ha } 0 < x \leq 1\,, \\ 1, & \text{ha } 1 < x\,. \end{cases}$$

30. a) Ha $x \leq 0$: $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0$.

Ha $0 < x \leq 1$: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_0^x (1-(1-t))dt = \frac{x^2}{2}$.

Ha $1 < x \leq 2$: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_0^1 (1-(1-t))dt + \int_1^x (1+(1-t))dt =$
$= 2x - \frac{x^2}{2} - 1$.

Ha $2 < x$: $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_0^1 (1-(1-t))dt + \int_1^2 (1+(1-t))dt +$
$+ \int_2^x 0 dt = 1$.

b) Pl. $|x| < 1$ esetén $F(x) = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(2x-1)^2}dx + \int_{-1}^{x} \frac{t^2}{2}dt = \frac{2+x^3}{6}$ Hasonló számításokat végzünk a többi esetben is.

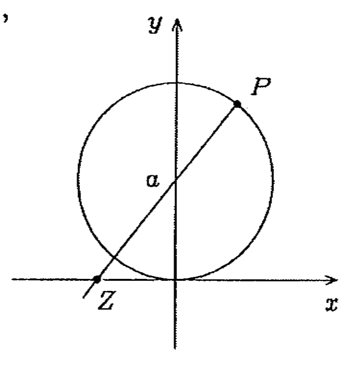
$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2(2x-1)}, & \text{ha } x \leq 1\,, \\ \frac{2+x^3}{6}, & \text{ha } -1 < x \leq 1\,, \\ 1 - \frac{1}{2(2x-1)}, & \text{ha } 1 < x\,. \end{cases}$$

31. Geometriai valószínűséggel: ha $0 < z < 1$, akkor $F(z) = P(|x-y| < z) = 2z - z^2$

$$f(z) = \frac{dF}{dz} = \begin{cases} 2(1-z), & \text{ha } 0 < z < 1\,, \\ 0 & \text{különben}\,. \end{cases}$$

32. L. ábra.

$$F(z) = \begin{cases} -\frac{\operatorname{arctg}\frac{a}{z}}{\pi} & \text{ha } z \leq 0 \\ 1 - \frac{\operatorname{arctg}\frac{a}{z}}{\pi} & \text{ha } 0 < z \end{cases}$$



33.

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0\,, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{ha } 0 < x\,. \end{cases}$$

Mivel $\eta > 0$, és ha $x > 0$, akkor $P(\eta < x) = P(e^{-\xi} < x) = P(-\xi < \ln x) = 1 - P(\xi \le -\ln x) = 1 - F_\xi(-\ln x)$,

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0 , \\ x^\lambda, & \text{ha } 0 < x \le 1 , \\ 1, & \text{ha } 1 < x . \end{cases}$$

34. $F_\eta(x) = P(\eta < x) = P(2\xi + 1 < x) = P(\xi < \frac{x-1}{2})$, és $0 < \frac{x-1}{2} \le \frac{\pi}{2}$, ha $1 < x \le \pi + 1$.

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 1 , \\ 1 - \cos\frac{x-1}{2}, & \text{ha } 1 < x \le \pi + 1 , \\ 1, & \text{ha } \pi + 1 < x . \end{cases}$$

$$f_\eta(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin\frac{x-1}{2}, & \text{ha } 1 < x < \pi + 1 , \\ 0 & \text{különben} . \end{cases}$$

35. a) $f_\xi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$.

b) $F_\eta(x) = P(\eta < x) = P(2\xi^3 + 1 < x) = P(\xi < \sqrt[3]{\frac{x-1}{2}})$,

$$F_\eta(x) = \frac{1}{\pi}\text{arctg}\sqrt[3]{\frac{x-1}{2}} + \frac{1}{2} , \qquad f_\eta(x) = \frac{1}{6\pi\sqrt[3]{(\frac{x-1}{2})^2}(1 + \sqrt[3]{(\frac{x-1}{2})^2})} .$$

c) Mivel az exponenciális függvény szigorúan monoton növekvő, és az $(1, \infty)$ intervallumon $\ln(x-1)$ értékkészlete $(-\infty, \infty)$, a sűrűségfüggvényt a **T 33.9** tétel b) pontja alapján is felírhatjuk, vagy közvetlenül is kiszámíthatjuk:
$F_\gamma(x) = P(\gamma < x) = P(e^\xi + 1 < x) = P(\xi < \ln(x-1)) = F_\xi(\ln(x-1))$, ha $x \ge 1$.

$$F_\gamma(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 1 , \\ \frac{\text{arctg}(\ln(x-1))}{\pi} + \frac{1}{2}, & \text{ha } 1 < x . \end{cases}$$

$$f_\gamma(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 1 , \\ \frac{1}{\pi(x-1)(\ln^2(x-1)+1)}, & \text{ha } 1 < x . \end{cases}$$

36. Mivel $P(\xi < 0) = 0$, ezért $P(\eta < 0) = 0$. Ha $x > 0$:

$$P(\eta < x) = P(\frac{1}{\xi} < x) = P(\xi > \frac{1}{x}) = 1 - F_\xi(\frac{1}{x}) ,$$

és mivel $\frac{1}{x} > 1$, ha $x \in (0,1)$,

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0 , \\ e^{1-\frac{1}{x}}, & \text{ha } 0 < x \le 1, \\ 1, & \text{ha } 1 < x , \end{cases} \qquad f_\eta(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}e^{1-\frac{1}{x}}, & \text{ha } 0 < x < 1 , \\ 0 & \text{különben} . \end{cases}$$

37. Először tegyük fel, hogy G szigorúan monoton a $(-\infty, \infty)$ végtelen intervallumban. Ekkor $\gamma(t)$ a $t \in (0,1)$ intervallumon egyértelműen meghatározott.

$$F_\eta(x) = P(\eta < x) = P(\gamma(\xi) < x) = P(\xi < G(x)) = G(x) ,$$

mert $G(x) \in (0,1)$. A $\gamma(t)$ a $t=0$ és $t=1$ pontban nincs értelmezve, de ezek nulla valószínűségű események.

Most legyen G szigorúan monoton az (a,b) véges intervallumon. Legyen $\gamma(0)=a$ és $\gamma(1)=b$. Mivel $\gamma(\xi)$ sohasem vesz fel a-nál kisebb, és b-nél nagyobb értéket,

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le a\,, \\ G(x), & \text{ha } a < x \le b\,, \\ 1, & \text{ha } b < x\,. \end{cases}$$

azaz $F_\eta(x) \equiv G(x)$.

Megjegyzés. A feladat eredménye, azaz, hogy az így definiált η eloszlásfüggvénye éppen az adott G lesz, sokkal általánosabban is igaz. G-ről csak annyit tegyünk fel, hogy eloszlásfüggvény, nem feltétlenül folytonos, és lehetnek konstans szakaszai is. Definiáljuk ekkor $\gamma(x)$-et a következőképpen: $\gamma(x) = \inf\{y; G(y) > x\}$, $0 \le x < 1$; ha az infimum $x=0$-ban vagy $x=1$-ben nem létezik, akkor a γ függvény ott nincs értelmezve.

38. Először tegyük fel, hogy F_ξ szigorúan monoton az adott intervallumon; inverzét jelöljük F_ξ^{-1}-vel. Az $F_\xi(\xi)$ értéke nem lehet 0-nál kisebb, és nem lehet 1-nél nagyobb.

$$F_\eta(x) = P(\eta < x) = P(F_\xi(\xi) < x) = P(\xi < F_\xi^{-1}(x)) = F_\xi(F_\xi^{-1}(x)) = x$$

Így

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0\,, \\ x, & \text{ha} 0 < x \le 1\,, \\ 1, & \text{ha } 1 < x\,. \end{cases}$$

Most a szemléletesség kedvéért tegyük fel, hogy $[a,b]$ véges, a_0, b_0 belső pontjai az intervallumnak, $F_\xi(x)$ az $[a,a_0]$ és $[b_0,b]$ intervallumokon szigorúan nő, és az $[a_0,b_0]$ intervallumon konstans, $F_\xi(a_0) = F_\xi(b_0)$ (amiből következik, hogy $P(a_0 \le \xi \le b_0) = 0$). Ha $y_0 = F_\xi(a_0)$, akkor $F_\xi^{-1}(y_0)$ nincs értelmezve, és ha definiálni akarjuk, elvileg bármilyen értéket adhatunk neki az $[a_0,b_0]$ intervallumból. Legyen $F_\xi^{-1}(y_0) = x_0$, ahol $x_0 \in [a_0,b_0]$.

$$F_\eta(y_0) = P(\eta < y_0) = P(F_\xi(\xi) < y_0) = P(\xi < F_\xi^{-1}(y_0)) = P(\xi < x_0) =$$

$$= P(\xi < a_0) + P(a_0 \le \xi < x_0) = F(a_0) + 0 = y_0$$

Látjuk, hogy az $F_\xi^{-1}(y_0)$ értéket az $[a_0,b_0]$ intervallumból tetszőlegesen választhatjuk. Hasonló a helyzet, ha több konstans szakasz van.

Ha ξ nem folytonos, $F_\xi^{-1}(x)$-et az előző feladat megjegyzésében adott módon kell definiálnunk.

39. $M(\xi) = -1 \cdot \frac{1}{10} + 0 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{11}{30} + 4 \cdot \frac{1}{5} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{73}{30}$,
$M(\xi^2) = (-)1^2 \cdot \frac{1}{10} + 0^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{11}{30} + 4^2 \cdot \frac{1}{5} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{323}{30}$,
$D(\xi) = \sqrt{M(\xi^2) - M^2(\xi)} = \sqrt{\frac{4361}{900}}$.

40. $M(\xi) = -1 \cdot 0.1 + (-0.5) \cdot 0.15 + \ldots = 0.355$,
$M(\xi^2) = (-1)^2 \cdot 0.1 + (-0.5)^2 \cdot 0.15 + \ldots = 0.7775$,
$D(\xi) = \sqrt{0.7775 - 0.355^2} \approx 0.80714$.

41. $M(\xi) = \frac{11}{6}$, $M(\xi^2) = \frac{23}{6}$, $D(\xi) = \frac{1}{6}\sqrt{17}$.

42. $P(\xi = 2) = P(\xi = 12) = \frac{1}{36}$, $P(\xi = 3) = P(\xi = 11) = \frac{2}{36}$ stb. (ld. **8.** feladat) . $M(\xi) = 7$, $M(\xi^2) = \frac{1974}{36}$, $D(\xi) = \frac{\sqrt{210}}{36}$.

43. $1 \le k \le 6$ esetén $P(\xi < k) = (\frac{k-1}{6})^3$ (azaz mindhárom kisebb, mint k).

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 1 \,, \\ (\frac{i}{6})^3, & \text{ha } i < x \le i+1, \quad i = 1,2,3,4,5 \\ 1, & \text{ha } 6 < x \,. \end{cases}$$

$P(\xi = i) = \lim_{x \to i+0} F(x) - F(i) = (\frac{i}{6})^3 - (\frac{i-1}{6})^3$.

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{6} i \left[\left(\frac{i}{6}\right)^3 - \left(\frac{i-1}{6}\right)^3 \right] = \frac{119}{24}, \quad M(\xi^2) = \frac{5593}{216}, \quad D(\xi) = \sqrt{\frac{2261}{1728}} .$$

44. $P(\xi = x_i) = \frac{1}{n}$, $i = 1, \ldots n$.

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i ,$$

vagyis épp a számok számtani közepe.

45. $M(\xi) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{20}{6^2} + 3 \cdot \frac{50}{6^3} + 4 \cdot \frac{55}{6^4} + 5 \cdot \frac{29}{6^5} + 6 \cdot \frac{1}{6^6} \approx 2.1606$

46. A **14.** feladat eredményeit használva:
a) $M(\xi) = 1 \cdot \frac{3}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$.
b) $M(\xi) = \left[0 \cdot \binom{8}{4} + 2 \cdot 2 \cdot \binom{8}{3} + 4 \cdot 2 \cdot \binom{8}{2} + 6 \cdot 2 \cdot \binom{8}{1} + 8 \cdot 2\right] \cdot \frac{1}{2^8} = \frac{35}{16}$

47. A játék méltányos, ha a nyeremény várható értéke mindkét fél részére 0. Mivel A nyeresége B-nek veszteség, elég csak A nyereségét számolni. Ennek várható értéke:

$$\left(1 - \frac{\binom{28}{2}}{\binom{32}{2}}\right)(-189) + \frac{\binom{28}{2}}{\binom{32}{2}} \alpha = 0, \quad \text{ebből} \quad \alpha = 59 .$$

48. A kezdő győz, ha az első húzás fehér, vagy ha a harmadik fehér, de előtte csak feketét húztak, stb.

$$P(\xi = 43) = P(\text{kezdő győz}) = \frac{3}{10} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{10 \cdot 9 \cdot 8} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{83}{210} .$$

$$P(\xi = -x) = P(\text{második győz}) = \frac{5 \cdot 3}{10 \cdot 9} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{43}{210}$$

$$P(\xi = 0) = P(\text{döntetlen}) = 1 - \frac{83}{210} - \frac{43}{210} = \frac{84}{210} .$$

$$M(\xi) = \frac{83 \cdot 43 - 43x + 0}{210} = 0 .$$

Ha a második játékos győz, 83 Ft-ot kell kapnia.

49. Mivel a három résztvevő egymásnak fizet, ha kettő nyereményének várható értéke 0, a harmadiké is annyi. Az előző feladat eredményeit használva, ha a kezdő játékos vesztés esetén a Ft-ot fizet a másiknak és döntetlen esetén b Ft-ot a banknak:

$$M(\text{kezdő játékos nyereménye}) = N\frac{83}{210} - a\frac{43}{210} - b\frac{84}{210} = 0\ ,$$

$$M(\text{másik játékos nyereménye}) = -\frac{2N}{3}\frac{83}{210} + 1.5a\frac{43}{210} - b\frac{84}{210} = 0\ ,$$

mert a kezdő játékosnak győzelme esetén járó N Ft-ból $\frac{2}{3}N$-et fizet a másik játékos.

$$a = \frac{166}{129}N\ , \qquad b = \frac{83}{252}N\ .$$

Ahhoz, hogy egész forintokat fizethessenek, és a nyeremény várható értéke tényleg pontosan nulla legyen, N-nek oszthatónak kell lennie 129-cel és 252-vel is, így 10836-nak, vagy ennek többszörösének kell lennie.

50. Jelöljük A, B, C nyereményét rendre x-szel, y-nal, z-vel; annak valószínűségét pedig, hogy A, ill. C győz, a-val, ill. c-vel.

$$a = P\begin{pmatrix}\text{a három lap}\\ \text{között van piros}\end{pmatrix} = 1 - \frac{24\cdot 23\cdot 22}{32\cdot 31\cdot 30}\ .$$

$$c = P\begin{pmatrix}\text{a három lap között}\\ \text{nincs piros és nincs zöld}\end{pmatrix} = \frac{16\cdot 15\cdot 14}{32\cdot 31\cdot 30}\ .$$

$$M(\text{A nyereménye}) = xa - \frac{y}{2}(1-a-c) - \frac{z}{2}c = 0\ ,$$

$$M(\text{C nyereménye}) = -\frac{x}{2}a - \frac{y}{2}(1-a-c) + zc = 0\ .$$

Ezekből

$$z = \frac{a}{c}x\ , \qquad y = \frac{a}{1-a-c}x\ ,$$

azaz a nyeremények: x, $y = \frac{367}{183}x$, $z = \frac{367}{70}x$, tetszőleges pozitív x-szel.

51. Legyen a ξ valószínűségi változó értéke a nyereség az első módszerrel, η-é a másodikkal.

a) $P(\xi = -13 + 50) = 0.95\cdot 0.9$, $P(\xi = -13 - 200) = 0.05\cdot 0.9$,
$P(\xi = -13 - 130) = 0.08\cdot 0.1$, $P(\xi = -13) = 0.92\cdot 0.1$.
$P(\eta = -5.3 + 50) = 0.92\cdot 0.9$, $P(\eta = -5.3 - 200) = 0.08\cdot 0.9$,
$P(\eta = -5.3 - 130) = 0.15\cdot 0.1$, $P(\eta = -5.3) = 0.85\cdot 0.1$.
$M(\xi) = 19.71$, $M(\eta) = 19.75$. Tehát a második módszer valamivel jobb.

b) Hasonlóan számolva $M(\xi) = 10.13$, $M(\eta) = 9.85$.
Most az első módszer a jobb.

c) Ha nem minősítünk, és a termékek 90%-a hibátlan, a várható nyereség $50\cdot 0.9 - 130\cdot 0.1 = 32$. Tehát ebben az esetben ilyen minősítési feltételek mellett nem érdemes minősíteni. (Ha a minősítés költsége 0 lenne, és ezért a megbízhatóbbat választanánk, akkor a termékenkénti nyereség

13+19.71= 32.71 lenne. Tehát csak akkor érné meg a minősítés, ha termékenként 0.71Ft-nál olcsóbb lenne). Ha a termékeknek csak 70%-a hibátlan, minősítés nélkül a várható nyereség $50\cdot 0.7-130\cdot 0.3=-4$, tehát érdemes minősíteni. (Az eredmény összhangban van eredeti elképzeléseinkkel, hiszen ha a termékek 100%-a hibátlan, minden minősítés csak a költségeket növeli; ha viszont sok a hibás termék, és ezek cseréje költséges, ez nagyon megnövelheti a veszteséget.)

52.

$$\sum_{k=1}^{n} kp^{k-1}q = q\left(\sum_{k=1}^{n} x^k\right)'\Bigg|_{x=p} = q\left(x\frac{x^n-1}{x-1}\right)'\Bigg|_{x=p} = \frac{np^n}{p^n-1}-\frac{1}{p-1}\,.$$

53. $P(\xi=k)=(\frac{5}{6})^{k-1}(\frac{1}{6})\ k=1,2,\ldots$.

$$M(\xi)=\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k\right)'\Bigg|_{x=\frac{5}{6}}=\frac{1}{6}\left(\frac{x}{1-x}\right)'\Bigg|_{x=\frac{5}{6}}=$$

$$=\frac{1}{6}\frac{1}{(1-x)^2}\Bigg|_{x=\frac{5}{6}}=6.$$

$$M(\xi^2)=\sum_{k-1}^{\infty} k^2\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}-\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}=$$

$$=\frac{1}{6}\left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k\right)''\Bigg|_{x=\frac{5}{6}}-\frac{1}{6}\left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k\right)'\Bigg|_{x=\frac{5}{6}}=66\,.$$

$$D^2(\xi)=M(\xi^2)-M^2(\xi)=66-36=30$$

54. A **32.137** feladat eredményeit használva

a)

$$\sum_{k=1}^{n} k\frac{1}{n}=\frac{n+1}{2}$$

b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k\right)'\Bigg|_{x=1-\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}\frac{1}{(1-(1-\frac{1}{n}))^2}=n\,.$$

55. a) $M(\xi)$ nem létezik, mert bár $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k}{k(k+1)}=1-\ln 2$ (**T 23.21**) de $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k(k+1)}=-1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ divergens (**T 22.13**). Így szórása sem létezik.

b)

$$M(\xi)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4k}{k(k+1)(k+2)}=4\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)=2$$

$$M(\xi^2) = 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)(k+2)} > 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

mivel a legutóbbi sor divergens, az őt majoráló sor is divergens. (Így ξ szórása nem létezik.)

56. Az $a = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ jelöléssel

$$M(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 a^k = a\left[\sum_{k=1}^{\infty}(k \cdot ka^{k-1} + ka^{k-1} - ka^{k-1})\right] =$$

$$= a\left[\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)ka^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} ka^{k-1}\right] = a\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} x^{k+1}\right)'' - \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k\right)'\right]\Bigg|_{x=a} =$$

$$= a\left[\frac{2}{(1-a)^3} + \frac{1}{(1-a)^2}\right] \approx 4.2360\,.$$

57. Az arányossági feltételnek megfelelően $P(\xi = k) = \frac{x}{k^2}$. Ilyen $x \neq 0$ létezik, mert csak az $1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k^2} = x\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ egyenletet kell kielégítenie, és a sor összege létezik. $M(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{x}{k^2} = x\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ viszont nem létezik, (mert a harmonikus sor divergens).

58.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0\,, \\ 2\sqrt{x}, & \text{ha } 0 < x \leq \frac{1}{4}\,, \\ 1, & \text{ha } \frac{1}{4} < x\,. \end{cases}$$

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0dx + \int_{0}^{\frac{1}{4}} \frac{x}{\sqrt{x}}dx + \int_{\frac{1}{4}}^{\infty} x \cdot 0dx = 0 + \frac{1}{12} + 0 = \frac{1}{12}\,.$$

59. $1 = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{\infty} \frac{A}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}A$, tehát $A = \frac{2}{\pi}$.
De $M(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{2x}{1+x^2}dx = [\frac{1}{\pi}\ln(1+x^2)]_0^{\infty}$ nem létezik.

60.

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{1}^{\infty} \frac{2x}{(1+x)^2}dx = \left[2\ln(x+1) + \frac{2}{x+1}\right]_1^{\infty}$$

nem létezik.

61.

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}}x^3 e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[-(x^2+2)e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^{\infty} = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,.$$

62. A **25.** feladat eredményét felhasználva

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2a^3}, & \text{ha } 0 < x < a\,, \\ \frac{x^2 - 3(x-a)^2}{2a^3}, & \text{ha } a < x < 2a\,, \\ \frac{(3a-x)^2}{2a^3}, & \text{ha } 2a < x < 3a\,, \\ 0, & \text{különben}\,. \end{cases}$$

$$M(\xi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int\limits_{0}^{a}\frac{x^3}{2a^3}dx+\int\limits_{a}^{2a}\frac{x^3-3x(x-a)^2}{2a^3}dx+\int\limits_{2a}^{3a}\frac{x(3a-x)^2}{2a^3}dx\,.$$

$M(\xi)=\frac{3}{2}a$.

63. a) $c=\frac{3}{74}$

b)

$$M(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\frac{3}{74}\int_2^4 x(x+x^2)dx=\frac{118}{37}\,,$$

$$M(\xi^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2f(x)dx=\frac{3}{74}\int_2^4 x^2(x+x^2)dx=\frac{1938}{5\cdot 37}\,,$$

$$D(\xi)=\sqrt{M(\xi^2)-M^2(\xi)}=\sqrt{\frac{2086}{6845}}\approx 0.5520\,.$$

64. $M(\xi)=\int_1^2 2x(x-1)dx=\frac{5}{3}$, $M(\xi^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx=\int_1^2 2x^2(x-1)dx=\frac{17}{6}$, $D^2(\xi)=\frac{17}{6}-\frac{25}{9}=\frac{1}{18}$.

65. $M(\xi)=2$, $M(\xi^2)=5$, $D(\xi)=1.$

66. $M(\xi)=\frac{7}{12}$, $M(\xi^2)=\frac{5}{12}$, $D(\xi)=\frac{\sqrt{11}}{12}$.

67. a)

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{ha } x<1\,,\\ \frac{1}{x(x^2+1)\ln\sqrt{2}}, & \text{ha } 1<x\,.\end{cases}$$

Ahol létezik a derivált, ott nemnegatív, $\lim_{x\to 1+0}F(x)=0$, így 0-ban is növekvő és $\lim_{x\to\infty}F(x)=1$.

b) $M(\xi)=\frac{\pi}{2\ln 2}$, de $M(\xi^2)$ nem létezik, mert az $M(\xi^2)=\int_1^\infty\frac{2x}{(x^2+1)\ln\sqrt{2}}dx$ integrál nem konvergens. Így $D(\xi)$ sem létezik.

68.

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{ha } x<1\,,\\ \frac{16}{9}x^{-\frac{7}{3}}\ln\, x, & \text{ha } 1<x\,.\end{cases}$$

$M(\xi)=16$, de (az $M(\xi^2)$, és így) ξ szórása nem létezik.

69. $M(\xi)=\frac{\varepsilon}{2}$, $D(\xi)=\frac{\varepsilon}{2\sqrt{3}}$.

70.

$$M(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{8\sqrt{3}\pi}\cdot\frac{x}{\sqrt[3]{|x|}(x^2+1)}dx\,.$$

Az integrandus páratlan függvény, tehát ha az integrál létezik, akkor 0.

$$\int_0^\infty\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x^2+1}=\int_0^1\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x^2+1}dx+\int_1^\infty\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x^2+1}dx<\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx+\int_1^\infty\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}dx\,,$$

és a legutóbbi improprius integrál konvergens, tehát $M(\xi)=0$.

$$(8\sqrt{3}\pi)M(\xi^2)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{\sqrt[3]{|x|}(x^2+1)}dx=2\left(\int\limits_0^1\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{x^2+1}dx+\int\limits_1^\infty\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{x^2+1}dx\right)>$$

$$> 2\left(\int_0^1 \frac{x\sqrt[3]{x^2}}{x^2+1}dx + \int_1^\infty \frac{x}{x^2+1}dx\right) ,$$

és a legutóbbi improprius integrál divergens, tehát ξ szórása nem létezik. (Ha az integrálokat ténylegesen ki akarjuk számítani, akkor $\sqrt[3]{x} = t$ helyettesítést alkalmazzunk.)

71.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < \frac{4}{\pi} , \\ \frac{16\sqrt{2}}{\pi^2}(\frac{1}{x^4}\cos\frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}\sin\frac{1}{x}), & \text{ha } \frac{4}{\pi} < x . \end{cases}$$

a) Az integrálásnál az $x = \frac{1}{u}$ helyettesítést alkalmazzuk:

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \frac{16\sqrt{2}}{\pi^2}\int_{\frac{4}{\pi}}^{\infty}\left(\frac{1}{x^3}\cos\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\sin\frac{1}{x}\right)dx =$$

$$= \frac{16\sqrt{2}}{\pi^2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}(-u\ \cos u\ - 2\sin u)du = \frac{16\sqrt{2}}{\pi^2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\pi}{4} - 1)\right) .$$

b)

$$M(\xi^2) = \frac{16\sqrt{2}}{\pi^2}\int_{\frac{4}{\pi}}^{\infty}\left(\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x} + \frac{2}{x}\sin\frac{1}{x}\right)dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\left(-\cos u - \frac{\sin u}{u}\right)du .$$

Mivel $\frac{\sin u}{u}$ a $(0, \frac{\pi}{4}]$ intervallumban korlátos és folytonos, ez az integrál létezik, így létezik a szórás is. (Kiszámítani csak közelítő értékét tudjuk.)

72. Jelöljük r inverzét u-val. A **T 33.9** tétel szerint $f_\eta(x) = f(u(x))u'(x)$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf_\eta(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} xf(u(x))u'(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} r(y)f(y)dy .$$

Az $x = r(y)$ helyettesítést alkalmaztuk, mivel ekkor $u(x) = y$ és $u'(x)dx = dy$.

73. a) $M(\xi) = \int_{-a}^{a} \frac{x}{2a}dx = 0$.

b) Mivel az $y = |x|$ függvény egy pont kivételével differenciálható, a **T 33.12** tétel alapján

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|f_\xi(x)dx = \int_{-a}^{0} -x\frac{1}{2a}dx + \int_0^a x\frac{1}{2a}dx = \frac{a}{2} .$$

A feladatot megoldhatjuk úgy is, hogy felírjuk η eloszlásfüggvényét, majd sűrűségfüggvényét és várható értékét. Pl. ha $x > 0$,
$F_\eta(x) = P(|\xi| < x) = P(-x < \xi < x) = F_\xi(x) - F_\xi(-x)$ stb.

74. $M(\xi) \approx 448.6$, ugyanis a **T 33.12** tétel alapján

$$M(\eta) = \int_0^3 (200 + 240\sqrt{x})f_\xi(x)dx =$$

$$= \int_0^{0.1} 0.07(200 + 240\sqrt{x})dx + \int_{0.1}^{2} 0.47(200 + 240\sqrt{x})dx + \int_2^3 0.1(200 + 240\sqrt{x})dx .$$

75.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{ha } x \in (2,4) \ , \\ 0 & \text{különben} \ . \end{cases}$$

A T 33.12 tétel segítségével

a) $r(x) = 3x + 1$,

$$M(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} r(x) f_\xi(x) dx = \int_2^4 (3x+1)\frac{1}{2} dx = 10 \ ,$$

$$M(\eta^2) = \int_{-\infty}^{\infty} r^2(x) f_\xi(x) dx = \int_2^4 (3x+1)^2 \frac{1}{2} dx = 103 \ ,$$

$$D^2(\xi) = 103 - 100 = 3 \ .$$

b) $r(x) = x^2 - 1$,

$$M(\eta) = \int_2^4 (x^2-1)\frac{1}{2} dx = \frac{25}{3} \ , \qquad M(\eta^2) = \int_2^4 (x^2-1)^2 \frac{1}{2} dx = \frac{1223}{15}$$

$$D^2(\eta) = \frac{1223}{15} - \frac{625}{9} = \frac{544}{45} \ .$$

A feladatot a T 33.12 tétel nélkül is megoldhatjuk, ha felírjuk η eloszlás- és sűrűségfüggvényét:

a) $P(\eta < x) = P(\xi < \frac{x-1}{3})$, és $2 < \frac{x-1}{3} \leq 4$, ha $7 < x \leq 13$. Ezért

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 7 \ , \\ \frac{x-7}{6}, & \text{ha } 7 < x \leq 13 \ , \\ 1, & \text{ha } 13 < x \ , \end{cases} \qquad f_\eta(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & \text{ha } x \in (7,13) \ , \\ 0 & \text{különben} \ . \end{cases}$$

b)

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 3 \ , \\ \frac{\sqrt{x+1}-2}{2}, & \text{ha } 3 < x \leq 15 \ , \\ 1 & \text{ha } 15 < x \ , \end{cases} \qquad f_\eta(x) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{x+1}}, & \text{ha } x \in (3,15) \ , \\ 0 & \text{különben} \ . \end{cases}$$

76. A T 33.12 tétel alapján az $r(x) = (2+4x)^2$ függvénnyel számítjuk $M(\eta)$-t:
Ha ξ diszkrét,
$M(\eta) = \sum_i (2+4x_i)^2 P(\xi = x_i) = \sum_i (2 + 16x_i + 16x_i^2) P(\xi = x_i)$, és mivel $M(\xi)$ és $M(\xi^2)$ is létezik, ez az összeg abszolút konvergens, és $M(\eta) = M(4) + M(\xi) + M(\xi^2) = 164$.
Ha ξ folytonos, akkor $M(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} (4 + 16x + 16x^2) f_\xi(x) dx$, és mivel $M(\xi)$ és $M(\xi^2)$ is létezik, integrálhatunk tagonként, és $M(\eta) = 164$.
Hasonló meggondolással: $M(\tau) = M(2\xi^2 + 2\xi + 1) = 2M(\xi^2) + 2M(\xi) + 1 = 21$

77. Markov-egyenlőtlenséggel: $P(\eta \geq 100) \leq \frac{80}{100} = \frac{4}{5}$.

78. Az aznapi jegyvásárlók számát jelöljük η-val.

$$P(\eta \leq 600) \geq P(\eta < 600) = 1 - P(\eta \geq 600) \geq 1 - \frac{400}{600} = \frac{1}{3} \ .$$

79. A kocsiszámot ξ-vel jelölve a bevétel várható értéke: $M(9 \cdot 40 \cdot \xi) = 360 M(\xi) = 360 \cdot 60 = 21600$. A bevételt η-val jelölve $P(\eta \geq 40000) \leq \frac{21600}{40000} = 0.54$.

80. A Csebisev-egyenlőtlenséget alkalmazzuk: $P(1 < \xi < 35) \geq P(5 < \xi < 35) = P(|\xi - 20| < 15) = 1 - P(|\xi - 20| \geq 15) \geq 1 - \frac{10^2}{15^2} = \frac{5}{9}$.

81.

a) Markov-egyenlőtlenséggel: $P(\xi \geq 85) \leq \frac{75}{85} = \frac{15}{17}$.

b) Csebisev-egyenlőtlenséggel:

$P(55 < \xi < 95) = 1 - P(|\xi - 75| \geq 20) \geq 1 - \frac{15^2}{20^2} = \frac{7}{16}$.

82. $P(3950 < \xi < 4050) = 1 - P(|\xi - 4000| \geq 50) \geq 1 - \frac{20^2}{50^2} = \frac{21}{25}$.

83. Minden η valószínűségi változóra, amelynek létezik szórása, fennáll, hogy $M(\eta^2) \geq M^2(\eta)$. Alkalmazzuk ezt az $\eta = |\xi - M(\xi)|$ valószínűségi változóra. $0 \leq d^2(\xi) = M^2(|\xi - M(\xi)|) \leq M(|\xi - M(\xi)|^2) = M((\xi - M(\xi))^2) = D^2(\xi)$.

84. a)

$$P(\xi = k) = \frac{\binom{17}{k}\binom{23}{10-k}}{\binom{40}{10}}\ , \quad k = 0, 1, \ldots, 10\ , \quad M(\xi) = \sum_{k=0}^{10} \frac{k\binom{17}{k}\binom{23}{10-k}}{\binom{40}{10}}\ .$$

Mivel ξ hipergeometriai eloszlású és a **D 33.20** szerinti jelölésekkel $N = 40$, $M = 17$, $n = 10$, így $M(\xi) = \frac{17}{4}$.

b)

$$P(\xi = k) = \binom{10}{k}\left(\frac{17}{40}\right)^k\left(\frac{23}{40}\right)^{10-k}\ , \quad k = 0, 1, \ldots, 10\ .$$

Mivel ξ binomiális eloszlású, $M(\xi) = np = 10 \cdot \frac{17}{40} = \frac{17}{4}$.

85. Jelölje ξ a kivett 4-es csavarok számát.

a) A "lesz közte" azt jelenti, hogy legalább annyi.

$$P(\xi = 6) + P(\xi = 7) + P(\xi = 8) = \frac{\binom{30}{6}\binom{42}{2} + \binom{30}{7}\binom{42}{1} + \binom{30}{8}\binom{42}{0}}{\binom{72}{8}} \approx 0.0535\ .$$

b) ξ hipergeometriai eloszlású, a **D 33.20** jelöléseit használva $M = 30$, $N = 72$, $n = 8$. Így $M(\xi) = \frac{10}{3}$.

86. Mivel az ötös-dobás valószínűsége minden dobásnál ugyanannyi, ξ binomiális eloszlású.

a) $P(\xi = 0) = \binom{12}{0}(\frac{5}{6})^{12}(\frac{1}{6})^0 \approx 0.1122$.

b) $P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) =$
$= \binom{12}{0}(\frac{5}{6})^{12}(\frac{1}{6})^0 + \binom{12}{1}(\frac{5}{6})^{11}(\frac{1}{6})^1 + \binom{12}{2}(\frac{5}{6})^{10}(\frac{1}{6})^2 \approx 0.6774$.

c) $M(\xi) = 12 \cdot \frac{1}{6} = 2$.

87. Jelölje ξ a kiválasztott megfelelő kapcsolók számát.
$P(\xi = k) = \binom{5000}{k} 0.95^k 0.05^{5000-k}$.

a)

$$P(4601 \leq \xi \leq 4899) = \sum_{4601}^{4899} \binom{5000}{k} 0.95^k 0.05^{5000-k}\ .$$

b) Mivel $n = 5000$, $p = 0.95$, így np és $n(1-p)$ is elég nagy ahhoz, hogy normális eloszlással közelítsünk. $M(\xi) = np = 4750$,

$D(\xi) = \sqrt{npq} \approx 15.41.$

$P(4601 \leq \xi \leq 4899) \approx \Phi\left(\frac{4899.5-4750}{15.41}\right) - \Phi\left(\frac{4600.5-4750}{15.41}\right) =$

$\Phi\left(\frac{149.5}{15.41}\right) - \Phi\left(-\frac{149.5}{15.41}\right) \approx 2\Phi(9.7) - 1$, és ez gyakorlatilag 1-nek tekinthető.

c) $P(|\xi - M(\xi)| < 150) = 1 - P(|\xi - M(\xi)| \geq 150) \geq 1 - \frac{237.5}{22500} \approx 0.9894$.

88. A kivett selejtesek számát ξ-vel jelölve

a) $P(\xi = 0) = \binom{10}{0}0.04^0 \cdot 0.96^{10} \approx 0.6648$.

és $P(\xi = 0) + P(\xi = 1) = 0.96^{10} + \binom{10}{1}0.04 \cdot 0.96^9 \approx 0.9418$.

b) Az n értékét úgy kell meghatároznunk, hogy

$$\sum_{k=10}^{n} \binom{n}{k} 0.04^{n-k} 0.96^k > 0.9$$

legyen; n értékét próbálgatással keressük. Már $n = 11$-re is teljesül az egyenlőtlenség.

A próbálgatás megkezdése előtt is tudunk adni felső becslést a legkisebb megoldásra a Markov-egyenlőtlenséggel. Lesz 10 db jó biztosítékunk, ha $10 + r$ kiválasztottból legfeljebb r db selejtes. $P(\xi \geq r) \leq \frac{M(\xi)}{r} = \frac{(10+r)0.04}{r} < 0.1$, amiből $r \geq 7$ adódik, tehát legfeljebb 7 próbálgatást kell csinálnunk. Ebből – az eloszlás pontos ismerete miatt – már egy is elégnek bizonyul.

89. Ha ξ a fiúk száma: $P(\xi \geq 3) = \sum_{k=3}^{6} \binom{6}{k} 0.516^k 0.484^{6-k} \approx 0.6857$.

90. ξ-vel jelölve a január elsején születettek számát

$P(\xi = k) = \binom{50}{k}(\frac{1}{365})^k(\frac{364}{365})^{50-k}$, tehát ξ binomiális eloszlású, így

$M(\xi) = \frac{50}{365} \approx 0.1370$.

91. A 100 grammos szeletben a mazsolák várható száma 6, ezért, ha ξ jelöli a mazsolák számát, $P(\xi = k) = \frac{6^k}{k!}e^{-6}$, így

$$P(\xi \leq 10) = e^{-6} \sum_{k=0}^{10} \frac{6^k}{k!} \approx 0.9574 .$$

Ha nem tesszük fel a Poisson-eloszlást, gondolkodhatunk a következőképpen. Vágjuk az 1000 grammos tésztát 500 db 2 grammos darabra, ekkor feltehető, hogy minden mazsola külön darabban van. A 100 grammos szelet 50 ilyen darabnak felel meg. Ekkor pl. hipergeometriai eloszlással

$$P(\xi \leq 10) = \sum_{k=0}^{10} \frac{\binom{60}{k}\binom{440}{50-k}}{\binom{500}{50}} \approx 0.9747 .$$

Feltéve, hogy minden darabka "választásakor" mazsolás "választása" ugyanolyan $p = \frac{60}{500}$ valószínűségű, binomiális eloszlással

$$P(\xi \leq 10) = \sum_{k=0}^{10} \binom{50}{k} \left(\frac{6}{50}\right)^k \left(\frac{44}{50}\right)^{50-k} \approx 0.9675 .$$

92. Jelentse ξ a piros golyók számát.

a)

$$P(\xi = 3) = \frac{\binom{10}{3}\binom{20}{6}}{\binom{30}{9}} \approx 0.3251 .$$

b) Binomiális eloszlásnál fel kell tennünk, hogy piros golyó húzásának a valószínűsége minden húzásnál (legalább közelítőleg) $\frac{1}{3}$-nak tekinthető. Így számolva

$$P(\xi = 3) = \binom{9}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^6 \approx 0.2731 .$$

Poisson-eloszlással számolva az **M 33.35** megjegyzés 3) pontja szerint $\lambda = 9 \cdot \frac{1}{3}$

$$P(\xi = 3) = \frac{3^3}{3!}e^{-3} \approx 0.2240 .$$

Mivel az összes golyó száma az összes kihúzotthoz, a kihúzható pirosak száma a kihúzottakéhoz képest nem elég nagy, ezek az eredmények pontatlanok. Itt csak a hipergeometriai eloszlás feltételezése helyes.

93. A hibák számát ξ-vel jelölve annak valószínűsége, hogy egy táblában k hiba van: $P(\xi = k) = \frac{0.5^k}{k!}e^{-0.5}$; így pl. az, hogy nincs hiba: $P(\xi = 0) = \frac{0.5^0}{0!}e^{-0.5} \approx 0.6065$, ami azt jelenti, hogy a tábláknak kb. a 60.6%-a hibátlan.

a) Tehát 800 táblából a

0 hibások várható száma 485; az 1 hibásoké 243; a 2 hibásoké 61;
a 3 hibásoké 10; a 4 vagy több hibásé 1.

b) Ha a két hibánál többet tartalmazó táblákat kiselejtezik, akkor $k = 0, 1, 2$-re

$$P(\xi = k | 0 \le \xi \le 2) = \frac{P(\xi = k; 0 \le \xi \le 2)}{P(0 \le \xi \le 2)} = \frac{P(\xi = k)}{P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2)}$$

Így a 0 hibások várható száma 492; az 1 hibásoké 246; a 2 hibásoké 62.

94. Három méter szövetben a hibák várható száma 0.15 , és így annak valószínűsége, hogy egy 3 m-es darabban a hibák száma nulla $e^{-0.15} \approx 0.86$. Így 100 db 3 m-es szövetdarabból várhatóan 86 lesz a hibátlan.

95. Annak valószínűsége, hogy egy perc zavartalan

$$p_0 = P(\xi \le 60) = \sum_{k=0}^{60} \frac{30^k}{k!} \approx 0.9999995$$

480 percen keresztül zavartalan a működés $p_0^{480} \approx 0.99976$ valószínűséggel.

96. Ha a forgalom megduplázódik, és ξ jelenti az áthaladó kocsik számát, akkor $P(\xi = k) = \frac{80^k}{k!}e^{-80}$. Ha n a kereszteződés áteresztőképessége, a követelményünk:

$$P(\xi > n) = 1 - P(\xi \le n) = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{80^k}{k!}e^{-80} \le 0.05 .$$

azaz $e^{-80}\sum_{k=0}^{n}\frac{80^k}{k!} > 0.95$. Ebből $n \geq 95$, mert (négy tizedes pontossággal) $n = 94$ esetén az összeg 0.9445, $n = 95$ esetén 0.9554 .

97. Jelölje η az áruházban megjelent látogatók számát, ξ a vásárlókét. Ekkor

$$P(\xi = k) = \sum_{k=0}^{\infty} P(\xi = k|\eta = i)P(\eta = i) .$$

$P(\eta = i) = \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}$ és $P(\xi = k|\eta = i) = \binom{i}{k}p^k(1-p)^{i-k}$. Így a $\lambda^i = \lambda^k \cdot \lambda^{i-k}$ és $\binom{i}{k} \cdot \frac{1}{i!} = \frac{1}{k!(i-k)!}$ átalakításokkal

$$P(\xi = k) = \frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda}\sum_{i=k}^{\infty}\frac{((1-p)\lambda)^{i-k}}{(i-k)!} .$$

$i - k = j$ helyettesítéssel kapjuk, hogy a szumma épp $e^{\lambda(1-p)}$; így $P(\xi = k) = \frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p}$, azaz ξ is Poisson-eloszlású, de λp paraméterrel.

98. a) $P(\xi = k) = \frac{a}{(k-1)!}$, ahol $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a}{(k-1)!} = 1$; azaz $a\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!} = ae$, így $a = \frac{1}{e}$.

b) Mivel $P(\xi = k+1) = \frac{1^k}{k!}e^{-1}$, az $\eta = \xi - 1$ változó egy $\lambda = 1$ paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változó, így
$M(\xi) = M(\eta + 1) = M(\eta) + 1 = 2$, $D(\xi) = D(\eta) = 1$.

99. a) Annak valószínűsége, hogy ha egy oldalon k hiba van, akkor a korrektor mindet észreveszi: 0.9^k. A $k = 0, 1, 2, \ldots$ események teljes eseményrendszert alkotnak, így

$$P\begin{pmatrix}\text{akárhány hiba van,}\\ \text{mindet észreveszi}\end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} P\left(\begin{matrix}\text{mindet}\\ \text{észreveszi}\end{matrix}\,\middle|\, k \text{ hiba van}\right) P(k \text{ hiba van}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} 0.9^k\frac{2^k}{k!}e^{-2} = e^{-2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1.8^k}{k!} = e^{-2} \cdot e^{1.8}1 = e^{-0.2}$$

$$P(\text{tíz oldalon egy sem marad}) = (e^{-0.2})^{10} = e^{-2} .$$

Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha úgy okoskodunk, hogy 10 oldalon a hibák várható száma 20, és annak valószínűsége, hogy a korrektor mind észreveszi:

$$\sum_{k=0}^{\infty} 0.9^k\frac{20^k}{k!}e^{-20} = e^{-20}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{18^k}{k!} = e^{-2} .$$

b) Annak valószínűsége, hogy egy oldalon egyetlen hiba sem marad, az előzőek szerint $p_0 = e^{-0.2}$; annak valószínűsége, hogy pontosan egy hiba marad:

$$p_1 = \sum_{k=1}^{\infty}\binom{k}{1}0.9^{k-1}0.1\frac{2^k}{k!}e^{-2} = e^{-2} \cdot 0.1 \cdot 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1.8^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-0.2} \cdot 0.2 ,$$

$$P(\text{tíz oldalon egy marad}) = 10p_1p_0^9 = 2e^{-2} ;$$

$$p_2 = P\begin{pmatrix}\text{egy oldalon pontosan}\\ \text{kettő marad}\end{pmatrix} = \sum_{k=2}^{\infty}\binom{k}{2}0.9^{k-2}0.1^2\frac{2^k}{k!}e^{-2} =$$

$$= \frac{e^{-2}(0.1)^2 2^2}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1.8^{k-2}}{(k-2)!} = e^{-0.2} 0.02$$

$$P(\text{tíz oldalon kettő marad}) = \binom{10}{1} p_2 p_0^9 + \binom{10}{2} p_1^2 p_0^8 = 2e^{-2}$$

$$P\begin{pmatrix}\text{tíz oldalon legfeljebb} \\ \text{két hiba marad}\end{pmatrix} = P(\text{egy sem}) + P(\text{egy }) + P(\text{kettő }) = 5e^{-2} .$$

(Ugyanezeket az eredményeket kapjuk, ha rögtön 10 oldalra számolunk 20 várható hibaszámmal.)

100. Tudjuk (l. **T 33.29**), hogy exponenciális eloszlású valószínűségi változó esetén $P(\xi \geq t + h | \xi \geq t) = P(\xi \geq h)$. Ezért

$$P(\xi \geq 1000) = 1 - P(\xi < 1000) = e^{-\frac{1}{5000}1000} = e^{-\frac{1}{5}} .$$

101. A csillár fél év alatt kb. 547 órát ég. Annak valószínűsége, hogy egy adott égő nem ég ki $p_0 = P(\xi \geq 547) = 1 - P(\xi < 547) = e^{-\frac{547}{1000}}$. Az égők egymástól függetlenül égnek ki, tehát $P(\text{egyet sem kell cserélni}) = p_0^6 \approx 0.0376$.

102. Jelölje η a lánc élettartamát és F_ξ a szemek élettartamának közös eloszlásfüggvényét. $P(\eta < x)$ annak valószínűsége, hogy van olyan szem, amelyik x idő alatt elszakad. $P(\eta < x) = 1 - P(\eta \geq x)$,

$$P(\eta \geq x) = P\begin{pmatrix}\text{minden szem élet-} \\ \text{tartama legalább } x\end{pmatrix} = (1 - F_\xi(x))^n = (e^{-\frac{1}{m}x})^n ,$$

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0 , \\ 1 - e^{-\frac{n}{m}x}, & \text{ha } 0 < x , \end{cases} \qquad f_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0 , \\ \frac{n}{m} e^{-\frac{n}{m}x}, & \text{ha } 0 < x , \end{cases}$$

azaz a lánc élettartama is exponenciális eloszlású, $\frac{m}{n}$ várható értékkel.

103. A követelmény: annak valószínűsége, hogy a szerkezet élettartama x óránál kevesebb, legfeljebb 0.05 legyen, azaz

$$P(\xi < x) = 1 - e^{-\frac{1}{1200}x} \leq 0.05 ;$$

ebből $x \leq -1200 \cdot \ln 0.95 \approx 61.55$. Mivel napi egy óra üzemidőt számítunk, ez 61 nap garanciaidőt jelent.

104. A várakozási időt ξ-vel jelölve $P(\xi > 6) = e^{-6\lambda} = 0.1$. Így $P(\xi < 3) = F_\xi(3) = 1 - e^{-3\lambda} = 1 - \sqrt{0.1} \approx 0.6838$.

105. Jelöljük ξ-vel az első vevő érkezéséig eltelt időt. Annak valószínűsége, hogy $x > 0$ hosszúságú időtartam alatt egy vevő sem érkezik, $P(\xi > x) = \frac{(\lambda x)^0}{0!} e^{-\lambda x} = e^{-\lambda x}$, így

$$F_\xi(x) = P(\xi < x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0 , \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{ha } 0 < x , \end{cases}$$

azaz ξ valóban exponenciális eloszlású, $\frac{1}{\lambda}$ várható értékkel.

106. a) Az egyenletes eloszlás miatt $P(4<\xi<4.5)=\frac{4.5-4}{8-0}=\frac{1}{16}$. Ötven független kísérletet végezve az $\frac{1}{16}$ valószínűségű esemény legfeljebb háromszor $p=(\frac{15}{16})^{50}+\binom{50}{1}\frac{1}{16}(\frac{15}{16})^{49}+\binom{50}{2}(\frac{1}{16})^2(\frac{15}{16})^{48}+\binom{50}{3}(\frac{1}{16})^3(\frac{15}{16})^{47}\approx 0.6184$ valószínűséggel következik be.

b) Jelölje η, hányszor esett az érték az adott intervallumba. $M(\eta)=50\cdot\frac{1}{16}$. Mivel három elég közel van a várható értékhez, és ötven ehhez képest elég nagy, $\lambda=\frac{50}{16}$ paraméterű Poisson-eloszlással közelíthetünk.

$$p\approx e^{-\frac{50}{16}}\left(\frac{(\frac{50}{16})^0}{0!}+\frac{(\frac{50}{16})^1}{1!}+\frac{(\frac{50}{16})^2}{2!}+\frac{(\frac{50}{16})^3}{3!}\right)\approx 0.6193\ .$$

107. a) A normális eloszlás eloszlásfüggvénye mindenütt folytonos, így $P(\xi=x)=0$ minden x-re.
$P(398<\xi<401)=F_\xi(401)-F_\xi(398)=\Phi(\frac{401-400}{3})-\Phi(\frac{398-400}{3})=$
$=\Phi(\frac{1}{3})-\Phi(-\frac{2}{3})=\Phi(\frac{1}{3})-(1-\Phi(\frac{2}{3}))\approx 0.6306-1+0.7465=0.3771$, azaz a deszkák 37.7%-ának hossza esik az adott intervallumba.

b) $P(|\xi-400|\geq 2.5)=1-P(397.5<\xi<402.5)=$
$=1-F_\xi(402.5)+F_\xi(397.5)=$
$=1-\Phi(\frac{402.5-400}{3})+\Phi(\frac{397.5-400}{3})=2-2\Phi(\frac{5}{6})\approx 0.4046.$

108. A feltétel: $0.5\leq F_\xi(A)-F_\xi(2)=\Phi(\frac{A-3}{2})-\Phi(\frac{2-3}{2})=\Phi(\frac{A-3}{2})-(1-\Phi(\frac{1}{2}))$.
Ebből $\Phi(\frac{A-3}{2})\geq 0.8085=\Phi(0.8725)$, így $\frac{A-3}{2}\geq 0.8725$, $A\geq 4.7450$.

109. Jelölje p_1 és p_2 annak valószínűségét, hogy az első, ill. a második gépről kikerült üveg tartalma a megadott korlátok közé esik. Ekkor
$p_1=P(1.9<\xi_1<2.1)=F_{\xi_1}(2.1)-F_{\xi_1}(1.9)=\Phi(\frac{0.1}{0.14})-\Phi(-\frac{0.1}{0.14})=$
$=2\Phi(\frac{0.1}{0.14})-1$, azaz $p_1\approx 0.5249$. Hasonlóan $p_2\approx 0.7887$. A teljes valószínűség tétele alapján

$$p=0.6p_1+0.4p_2\approx 0.6304\ .$$

110.

$$P\left(\begin{array}{l|l}\text{a rúd 149 mm-} & \text{első gép}\\ \text{nél rövidebb} & \text{darabolta}\end{array}\right)=F_{\xi_1}(149)=\Phi\left(\frac{149-150}{1}\right)=1-\Phi(1),$$

$$P\left(\begin{array}{l|l}\text{a rúd 149 mm-} & \text{másik gép}\\ \text{nél rövidebb} & \text{darabolta}\end{array}\right)=F_{\xi_2}(149)=\Phi\left(\frac{149-150}{2}\right)=1-\Phi\left(\frac{1}{2}\right),$$

$P(\text{a rúd 149 mm-nél rövidebb})=(1-\Phi(1))0.65+(1-\Phi(\frac{1}{2}))0.35\approx 0.2111$.

111. Annak valószínűsége, hogy egy csomag az előírt mennyiséget tartalmazza,

$$p=P(95<\xi<105)=2\Phi\left(\frac{5}{2}\right)-1\approx 0.9876\ .$$

A **97.** feladat eredménye alapján az előírt mennyiséget nem tartalmazó csomagok száma is Poisson-eloszlású $\lambda(1-p)=1000\cdot 0.0124=12.4$ paraméterrel; azaz, ha η-val jelöljük az egy nap alatt elkészített nem megfelelő csomagok számát,

$$P(\eta\leq 20)=\sum_{k=0}^{20}\frac{12.4^k}{k!}e^{-12.4}\approx 0.9839\ .$$

Ha a korábbi feladat eredményét nem használjuk, és α-val jelöljük az egy nap alatt gyártott csomagok számát, a

$$P(\eta = k) = \sum_{i=k}^{\infty} P(\eta = k|\alpha = i)P(\alpha = i) \ ,$$

$$P(\eta = k|\alpha = i) \approx \binom{i}{k} 0.0124^k 0.9876^{i-k} \ , \qquad P(\eta \leq 20) = \sum_{k=0}^{20} P(\eta = k)$$

egyenlőségeket alkalmazzuk.

112.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0 \ , \\ xe^{-\frac{x^2}{2}}, & \text{ha } x > 0 \ , \end{cases}$$

Felhasználva azt, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$ **T 33.27** .

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{\infty} x \cdot xe^{-\frac{x^2}{2}} dx = \left[-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^{\infty} + \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \ .$$

$$M(\xi^2) = \int_0^{\infty} x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \left[-x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^{\infty} + \left[-2e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^{\infty} = 2 \ ,$$

$D^2(\xi) = 2 - \frac{\pi}{2}$.

113. a) Ha $x \leq 0$: $\quad F_\eta(x) = P(\eta < x) = 0.$
Ha $x > 0$: $F_\eta(x) = P(\eta < x) = P(\xi^2 < x) = P(-\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x}) =$
$= F_\xi(\sqrt{x}) - F_\xi(-\sqrt{x}) = \Phi(\frac{\sqrt{x}-m}{\sigma}) - \Phi(\frac{-\sqrt{x}-m}{\sigma})$,

$$f_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0 \ , \\ \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi x}} \left(e^{-\frac{(\sqrt{x}-m)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(\sqrt{x}+m)^2}{2\sigma^2}} \right) \ , & \text{ha } x > 0 \ . \end{cases}$$

b) Ha $x \leq 0$: $\quad F_\eta(x) = P(\eta < x) = 0.$
Ha $x > 0$:

$$F_\eta(x) = P(\eta < x) = P(e^\xi < x) = P(\xi < \ln x) = F_\xi(\ln x) = \Phi\left(\frac{\ln x - m}{\sigma}\right) \ ,$$

$$f_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0 \ , \\ \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}} \ , & \text{ha } 0 < x \ . \end{cases}$$

114. $M(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sin t \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0$, ugyanis az integrál abszolút konvergens, és az integrandus páratlan függvény. Ezt, és az $e^{it} = \cos t + i \sin t$ egyenlőséget felhasználva

$$M(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos t \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \cos t \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin t e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-i)^2}{2}} dt = e^{-\frac{1}{2}}.$$

$$M(\gamma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos^2 t \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+\cos 2t}{2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

és, mivel $\int_{-\infty}^{\infty} \sin 2t \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos 2t \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2t} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2} e^{-\frac{(t-2i)^2}{2}} dt = e^{-2}\sqrt{2\pi}.$$

Így $M(\gamma^2) = \frac{1}{2}(1+e^{-2})$, és
$M(\eta^2) = M(1-\cos^2\xi) = M(1) - M(\cos^2\xi) = 1 - \frac{1}{2}(1+e^{-2})$
$D^2(\eta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2} - 0 \approx 0.4323$ és $D^2(\gamma) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2} - (e^{-\frac{1}{2}})^2 \approx 0.1998$. Tehát η szórása nagyobb.

115. Jelölje η_i $(i = 1,2,3,4)$ a C_i egység működési idejét.

a) Jelölje ξ_1 a tökéletes működési időt. $P(\xi_1 < x) = 1 - P(\xi_1 \geq x) =$

$$= 1 - P(\eta_1 \geq x)P(\eta_2 \geq x)P(\eta_3 \geq x)P(\eta_4 \geq x) = \prod_{i=1}^{4}(1 - F_{\eta_i}(x))$$

b) Jelölje A_i azt az eseményt, hogy a C_i egység működik. A rendszer működik, ha $A_1A_2 + A_3A_4$ bekövetkezik. $P(A_1A_2 + A_3A_4) = P(A_1A_2) + P(A_3A_4) - P(A_1A_2A_3A_4)$ miatt $P(\xi_2 < x) = 1 - P(\xi_2 \geq x) = 1 - [P(\eta_1 > x)P(\eta_2 > x)+$
$+P(\eta_3 > x)P(\eta_4 > x) - P(\eta_1 > x)P(\eta_2 > x)P(\eta_3 > x)P(\eta_4 > x)] =$
$= (F_{\eta_1}(x) + F_{\eta_2}(x) - F_{\eta_1}(x)F_{\eta_2}(x))(F_{\eta_3}(x) + F_{\eta_4}(x) - F_{\eta_3}(x)F_{\eta_4}(x))$

c) Ha η_i-k exponenciális eloszlásúak, az a) pontra a válasz:

$$F_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ 1 - e^{-4\alpha x} & \text{ha } 0 < x \end{cases}$$

A b) pontra a válasz:

$$F_{\xi_2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ (1 - e^{-2\alpha x})^2 & \text{ha } 0 < x \end{cases}$$

Ha η_i-k normális eloszlásúak az a) pontra a válasz:

$$F_{\xi_1}(x) = 1 - \left(1 - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt\right)^4$$

A b) pontra a válasz szintén behelyettesítéssel adódik.

116. Ha $k \geq 1$:

a) $P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{n-k+1}{k}\frac{p}{q} P(\xi = k-1)$.
Ha $\frac{n-k+1}{k}\frac{p}{1-p} > 1$, akkor $P(\xi = k) > P(\xi = k-1)$;
ha $\frac{n-k+1}{k}\frac{p}{1-p} < 1$, akkor $P(\xi = k) < P(\xi = k-1)$.
A két egyenlőtlenséget összevetve kapjuk, hogy $k = \mathrm{Ent}(n+1)p$-re lesz a valószínűség maximális. Ha $(n+1)p$ egész, két érték is lesz, amelyre a

kérdéses valószínűség maximális, mert ekkor $\frac{n-k+1}{k}\frac{p}{1-p}=1$. Ha np egész, akkor éppen $k=\mathrm{Ent}(n+1)p=np$ a legvalószínűbb. Mivel $M(\xi)=np$, ez nem meglepő eredmény.

b) $P(\xi=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda}{k}P(\xi=k-1)$. Tehát amíg $\frac{\lambda}{k}>1$, addig a valószínűségek nőnek. Így $P(\xi=k)$ maximális, ha $k=\mathrm{Ent}\,\lambda$. Itt is vegyük észre, hogy $\lambda=M(\xi)$.

c)
$$P(\xi=k)=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}=\frac{M-k+1}{k}\frac{n-k+1}{N-M-n+k}P(\xi=k-1)\,.$$
Az $\frac{M-k+1}{k}\frac{n-k+1}{N-M-n+k}\geq 1$ és $\frac{M-(k+1)+1}{k+1}\frac{n-(k+1)+1}{N-M-n+(k+1)}<1$ egyenlőtlenségekből $k\leq\frac{(M+1)(n+1)}{N+2}<k+1$ azaz $k=\mathrm{Ent}\,\frac{(M+1)(n+1)}{N+2}$ adódik. Ez a k is a várható értékhez, $\frac{nM}{N}$-hez lesz közel.

117. Mivel $P(\xi\in I)=\int_a^{a+\varepsilon}f(x)dx$, azt az intervallumot kell megtalálnunk, amelyben a sűrűségfüggvény grafikonja alatti terület maximális.

a) A sűrűségfüggvény maximuma a várható értéknél van, és a sűrűségfüggvény az $x=m$ egyenletű egyenesre szimmetrikus, így a keresett intervallum: $(m-\frac{\varepsilon}{2};m+\frac{\varepsilon}{2})$.

b)
$$P(\xi\in(a;a+\varepsilon))=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda(a+\varepsilon)}=e^{-\lambda a}(1-e^{-\lambda\varepsilon})\,.$$
Mivel $1-e^{-\lambda\varepsilon}$ az a-tól független, $e^{-\lambda a}$ maximális, ha $a=0$.

c) Az ε hosszúságú intervallumnak teljes egészében az $[a;b]$ intervallumban kell lennie, de ott bárhol lehet.

118. Az egyik kapun bemenők ξ száma binomiális eloszlású, $n=1000$, $p=\frac{1}{2}$.
$P(\xi=k)=\binom{1000}{k}(\frac{1}{2})^k(\frac{1}{2})^{1000-k}=\binom{1000}{k}(\frac{1}{2})^{1000}$;
$M(\xi)=500$; $D(\xi)=5\sqrt{10}$.
500-nál biztosan több fogas kell, jelöljük a többletet j-vel. Ekkor, mivel aki az egyik bejáraton bement, az nem megy be a másikon, a követelmény
$$\sum_{k=500-j}^{500+j}\binom{1000}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{1000}\geq 0.99$$
alakban írható fel. Számítógéppel kiszámítható, hogy $j=40$ esetén az összeg 0.9896 , $j=41$ esetén 0.9914 . Tehát 541 fogas elegendő egy-egy ruhatárba.

Mivel $p=\frac{1}{2}$ és n is elég nagy, jól közelíthetünk normális eloszlással. A **P 33.38** példához hasonlóan ha az η valószínűségi változó $N(500;5\sqrt{10})$, akkor j-re az $F_\eta(500+j)-F_\eta(500-j)\geq 0.99$ egyenlőtlenséget kapjuk. Azaz $\Phi(\frac{j}{5\sqrt{10}})-\Phi(-\frac{j}{5\sqrt{10}})=2\Phi(\frac{j}{5\sqrt{10}})-1\geq 0.99$, és mivel $\Phi(2.58)>\frac{1.99}{2}$, $j>2.58\cdot 5\cdot\sqrt{10}\approx 40.8$, azaz $j\geq 41$.

Csebisev egyenlőtlenséggel:
$$P(|\xi-M(\xi)|>j)\leq\frac{D^2(\xi)}{j^2}\leq 0.01$$

ebből $j \geq 159$, azaz 659 fogas biztosan elég.

119. a) Tegyük fel, hogy a megbetegedések egymástól függetlenek (pl. nincs járvány). Ha ξ a megbetegedettek száma és n az ágyak száma, akkor a feltétel:

$$P(\xi > n) = \sum_{k=n+1}^{1200} \binom{1200}{k} 0.002^k 0.998^{1200-k} \leq 0.01$$

Mivel ezt az egyenlőtlenséget csak találgatással tudjuk megoldani, próbáljuk megbecsülni mekkora lehet n. Mivel $M(\xi) = 2.4$ és $D^2(\xi) = 2.3952$, a Csebisev egyenlőtlenség alapján $P(|\xi - 2.4| \geq j) \leq \frac{2.3952}{j^2}$ és ez már $j = 16$-ra kisebb 0.01-nél, tehát $n \leq 19$. Így a fenti összeg legalább 1181 tagból áll, így egyszerűbb az ellentétes eseménnyel számolni, azaz a $P(\xi \leq n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{1200}{k} 0.002^k 0.998^{1200-k} \geq 0.99$ egyenlőtlenséggel. Még ennek számítása is hosszadalmas, végül is $n \geq 7$ adódik.

b) ξ csak nemnegatív egész lehet, legnagyobb értéke a várható értékéhez képest nagyon nagy, ezért jól közelíthetünk $\lambda = 2.4$ paraméterű Poisson eloszlással.
$P(\xi \leq n) \approx e^{-2.4}\left(1 + \frac{2.4}{1!} + \frac{2.4^2}{2!} + \ldots + \frac{2.4^n}{n!}\right) \geq 0.99$.
Ez a valószínűség $n = 6$ esetén 0.9884 , $n = 7$ esetén 0.9966 .

120. A fejdobások ξ száma binomiális eloszlású, $n = 200$, $p = \frac{1}{2}$ paraméterrel, $M(\xi) = 100$, $D(\xi) = \sqrt{50}$. Így a keresett valószínűség

$$s = \sum_{k=91}^{109} \binom{200}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{200-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{200} \sum_{k=91}^{109} \binom{200}{k} \approx 0.8210 .$$

Mivel n elég nagy, és $p = \frac{1}{2}$, jól közelíthetünk normális eloszlással is. ξ csak egész lehet, így $P(91 \leq \xi \leq 109) = P(90 < \xi < 110)$. A **P 33.38** példában adott módszerrel a Φ függvényt a 109 és 110, ill. a 90 és 91 számtani közepénél vesszük:

$$s \approx \Phi\left(\frac{109.5 - 100}{\sqrt{50}}\right) - \Phi\left(\frac{90.5 - 100}{\sqrt{50}}\right) = 2\Phi\left(\frac{9.5}{\sqrt{50}}\right) - 1 \approx 0.8209 .$$

Csebisev egyenlőtlenséggel: $P(|\xi - M(\xi)| \geq 10) \leq \frac{50}{10^2} = \frac{1}{2}$.

121. A kettes dobások ξ száma binomiális eloszlású $n = 300$ és $p = \frac{1}{6}$ paraméterrel.

$$P(\xi > 60) = 1 - P(\xi \leq 61) = 1 - \sum_{k=0}^{60} \binom{300}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{300-k} \approx 0.05465 .$$

Mivel $M(\xi) = 50$, $D(\xi) = \frac{5\sqrt{15}}{3}$, n elég nagy, és p sem túl kicsi, a **P 33.38** példához hasonlóan jól közelíthetünk normális eloszlással:

$$P(\xi > 60) = 1 - P(\xi \leq 60) = 1 - P(\xi < 61) \approx 1 - \Phi\left(\frac{60.5 - 50}{\frac{5\sqrt{15}}{3}}\right) \approx 0.0519 .$$

122. Két hatos dobásának valószínűsége: $\frac{1}{36}$. Jelölje ξ a két-hatos dobások számát. ξ binomiális eloszlású $n = 72$ és $p = \frac{1}{36}$ paraméterrel.

$$P(\xi \geq 3) = 1 - P(\xi < 3) = 1 - \sum_{k=0}^{2} \binom{72}{k} \left(\frac{1}{36}\right)^k \left(\frac{35}{36}\right)^{72-k} \approx 0.323306\,.$$

$M(\xi) = 72 \cdot \frac{1}{36} = 2$, azaz a várható érték a lehetséges maximumhoz képest kicsi, így most a $\lambda = 2$ várható értékű Poisson-eloszlással közelítünk:

$$P(\xi \geq 3) \approx 1 - (e^{-2} + 2e^{-2} + \frac{2^2}{2!}e^{-2}) \approx 0.323324\,.$$

123. Jelölje ξ a bekapcsolt fogyasztók számát. ξ binomiális eloszlású $n = 100$ és $p = 0.6$ paraméterrel. $P(\xi = k) = \binom{100}{k}0.6^k 0.4^{100-k}$. Mivel $28000 = 56 \cdot 500$, ezért a $\xi \geq 56$ esemény valószínűségét kell kiszámítanunk.

$$P(\xi \geq 56) = \sum_{k=56}^{100} \binom{100}{k} 0.6^k 0.4^{100-k} \approx 0.8211\,.$$

$p = 0.6$ közel van $\frac{1}{2}$-hez így normális eloszlással közelítünk. $M(\xi) = 60$, $D(\xi) = \sqrt{24}$, ezért

$$P(\xi \geq 56) = 1 - P(\xi < 56) \approx 1 - \Phi\left(\frac{55.5 - 60}{\sqrt{24}}\right) = 0.8208\,.$$

124. Ha a dobások száma n, az M **33.33** megjegyzés (2) képlete szerint

$$P\left(\left|\frac{q_n}{n} - p\right| < \frac{1}{20}\right) = 1 - P\left(\left|\frac{q_n}{n} - p\right| \geq \frac{1}{20}\right) \geq 1 - \frac{1}{4 \cdot \frac{n}{400}} \geq 0.9$$

egyenlőtlenségből $n \geq 1000$ adódik.

125. Jelölje ξ a szálszakadások számát. $n = 500$, $p = 0.008$, $q = 1 - p = 0.992$. Az M **33.33** megjegyzés (1) képlete szerint

$P\left(\left|\frac{\xi}{500} - 0.008\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{0.008 \cdot 0.992}{\varepsilon^2 500} = 0.95$.

Az egyenletből $\varepsilon = 0.0178$, és mivel ξ pozitív, $0 \leq \xi < 13$.

126. $P(|\frac{20}{1000} - p| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{4\varepsilon^2 1000} = 0.9$, amiből $\varepsilon = \frac{1}{20}$, és $0 \leq p < 0.07$.

127. Jelölje ξ a dohányosok számát. $P(|\frac{\xi}{n} - p| < 0.05) \geq 1 - \frac{1}{4 \cdot 0.05^2 \cdot n} = 0.90$, ebből $n \geq 1000$.

128. Jelölje ξ a felsőfokú végzettségűek számát.

a) $M(\xi) = 60$, mivel ξ binomiális eloszlású.

b) $D(\xi) = 6$, és 60-nak 5%-a 3. Csebisev-egyenlőtlenséggel:
$P(|\xi - M(\xi)| \geq 4) \leq \frac{36}{16}$, ami semmitmondó. Ha a binomiális eloszlással számolunk:

$$P(|\xi - M(\xi)| \geq 4) = 1 - \sum_{i=57}^{63} \binom{150}{i} 0.4^i 0.6^{150-i} \approx 0.5598\,.$$

Normális eloszlással is közelíthetünk:
$P(|\xi - M(\xi)| \geq 4) = 1 - P(56 < \xi < 64) \approx 1 - (\Phi(\frac{63.5-60}{6}) - \Phi(\frac{56.5-60}{6})) \approx$
≈ 0.5596 .

129. A hibátlanok számát ξ-vel jelölve $M(\xi) = 9500$, $D(\xi) = 5\sqrt{19}$. Csebisev-egyenlőtlenséggel :

$P(9350 < \xi < 9700) > P(|\xi - M(\xi)| < 150) \geq 1 - \frac{5^2 \cdot 19}{150^2} = \frac{881}{900}$.

130. $P(|\frac{27}{2000} - p| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{4\varepsilon^2 2000} = 0.95$. Ebből $\varepsilon = 0.05$, és $0 < p \leq 0.0635$.

131. A ξ valószínűségi változó értéke akkor lesz k, ha $k-1$-ig négy különböző cédulát találtunk, és a k-adikban az ötödiket. Jelöljük A_i-vel azt az eseményt, hogy a $(k-1)$-ik vásárlás végeztével van i jelű cédulánk. Jelöljük p_0-lal annak valószínűségét, hogy $(k-1)$ vásárlás után csak az egyféle cédula, pl. az ötös hiányzik $(k > 4)$. Ekkor

$p_0 = P(\overline{A}_5 A_1 A_2 A_3 A_4) = 1 - P(\overline{\overline{A}_5 A_1 A_2 A_3 A_4}) =$
$= 1 - P(A_5 + \overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3 + \overline{A}_4)$. A Poincaré-tétel segítségével és annak figyelembevételével, hogy $P(A_5\overline{A}_1) = P(A_5\overline{A}_2)$ stb. :
$P(A_5 + \overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3 + \overline{A}_4) =$
$= P(A_5) + \sum_{1\leq i\leq 4} P(\overline{A}_i) - \sum_{1\leq i\leq 4} P(A_5\overline{A}_i) - \sum_{1\leq i<j\leq 4} P(\overline{A}_i\overline{A}_j) + \ldots =$
$= P(A_5) + 4P(\overline{A}_1) - 4P(A_5\overline{A}_1) - 6P(\overline{A}_1\overline{A}_2) + 6P(A_5\overline{A}_1\overline{A}_2) +$
$+ 4P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) - 4P(A_5\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) - P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4) + P(A_5\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4)$.
Az utolsó két tag kiesik, hiszen ugyanazt az eseményt jelentik.
$P(A_5) = 1 - P(\overline{A}_5) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$, $P(\overline{A}_1) = \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$, $P(\overline{A}_1\overline{A}_2) = \left(\frac{3}{5}\right)^{k-1}$,
és mivel $P(\overline{A}_1) = P(A_5\overline{A}_1) + P(\overline{A}_5\overline{A}_1)$,
ezért $P(A_5\overline{A}_1) = P(\overline{A}_1) - P(\overline{A}_5\overline{A}_1) = \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} - \left(\frac{3}{5}\right)^{k-1}$.
$P(A_5\overline{A}_1\overline{A}_2) = P(\overline{A}_1\overline{A}_2) - P(\overline{A}_5\overline{A}_1\overline{A}_2) = (\frac{3}{5})^{k-1} - (\frac{2}{5})^{k-1}$ stb. ;
végül $p_0 = (\frac{4}{5})^{k-1} - 4(\frac{3}{5})^{k-1} + 6(\frac{2}{5})^{k-1} - 4(\frac{1}{5})^{k-1}$. Az első $k-1$ vásárlás után az öt szám közül bármelyik hiányozhat, viszont $\frac{1}{5}$ annak valószínűsége, hogy a k-adik vásárláskor épp a hiányzó számot kapjuk, így $P(\xi = k) = 5p_0 \cdot \frac{1}{5} = p_0$.
Így

$$M(\xi) = \sum_{k=5}^{\infty} k \left[\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} - 4\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1} + 6\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1} - 4\left(\frac{1}{5}\right)^{k-1}\right] \approx 11.42 \,.$$

Az összeg kiszámításánál a $\sum k\, p^{k-1} = (\sum x^k)'|_{x=p}$ egyenlőséget alkalmaztuk.

132. A közölt programokban a RANDOMIZE utasítás a RAND() eljárás inicializálását végzi. A READ(.) és WRITE(.) utasítások egész, a READR(.) és WRITER(.) utasítások valós értékek beolvasását ill. kiíratását jelentik. CHOOSE(n,j) az $\binom{n}{j}$ értéket, POW(p,j) a p^j értéket számítja. Egész számot valóssá a REAL(.) utasítás konvertál, valós szám egész részét az INTEGER(.) utasítással képezzük.

Diszkrét eloszlásoknál nehézkes az eloszlásfüggvény **33.28** feladatban definiált inverzével dolgozni, ezért, ha lehet, más megoldást keresünk.

a) Tegyük fel, $n < 10^{10}$ .Ekkor a $(0,1)$ intervallumot $n+1$ db egyenlő hosszúságú intervallumra osztjuk, és $\xi = k-1$, ha x a k-adik itervallumba esik. Mivel az intervallumok egyenlő hosszúak, ξ minden értéket egyenlő valószínűséggel vesz fel. $\xi = k$, ha $k\frac{1}{n+1} \leq x < (k+1)\frac{1}{n+1}$, azaz $\xi = \mathrm{Ent}(n+1)x$.

Ha $n > 10^{10}$ akkor a műveleti kerekítések miatt a belső számábrázolástól és egyéb gépi sajátosságoktól függően már nem biztos, hogy minden részintervallum egyenlő valószínűséggel jön be. Bemenő paraméterek : N, n . ξ generált értékeit a b_i, $i = 1, 2, ..., N$ tömbben helyezzük el. L. a) ábra

```
BEGIN
  RANDOMIZE;
  READ(N);
  READ(n);
  FOR i:=1 TO N DO
    x:=RAND();
    b[i]:=INTEGER(REAL(n+1)*x);
    WRITE(b[i]);
    END;
END p1.
```

a) ábra

b) Ha $P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ akkor ez épp annak a valószínűsége, hogy egy p valószínűségű esemény n független kísérletből hányszor következik be. Szimuláljuk ezt a folyamatot. Generáljunk n db $(0; 1)$-be eső véletlen számot, és számoljuk meg, hogy a p valószínűségű $x \in [0; p)$ esemény hányszor következett be. Ha k-szor, ξ értéke legyen k. Most nem az eloszlásfüggvény inverzével dolgozunk. Ennek a megoldásnak hátránya, hogy n véletlen számot kell előállítani ahhoz, hogy ξ egyetlen értékét megkapjuk. L. b1) ábra

Bemenő paraméterek: N, n, p; a kimenők úgy mint az előbb.

```
BEGIN
  RANDOMIZE;
  READ(N);
  READ(n);
  READR(p);
  FOR i:=1 TO N DO
    b[i]:=0;
    FOR j:=1 TO n DO
      x:=RAND();
      IF x<=p THEN b[i]:=b[i]+1; END,
      END;
    WRITE(b[i]);
    END;
END p2.
```

b1)ábra

Az eloszlásfüggvény inverzével való megoldásnál ki kell jelölni a $P(\xi = k)$ hosszúságú intervallumokat, majd minden véletlen számra megkeresni, hogy melyikbe esik bele. L. b2) ábra

Bemenő paraméterek: N, n, p; a kimenők úgy mint az előbb.

```
BEGIN
  RANDOMIZE;
  READ(N);
  READ(n);
  READR(p);
  a[0]:=POW(1.0-p,n);
  FOR j:=1 TO n DO
    a[j]:=a[j-1]+CHOOSE(n,j)*POW(p,j)*POW(1.0-p,n-j);
    END;
  FOR i:=1 TO N DO
    x:=LONGREAL(RAND());
    j:=0;
    FOR j:=0 TO n DO
      IF x<=a[j]
        THEN
          b[i]:=j;
          WRITE(b[i]);
          GOTO U;
        END;
      END;
 U:  END;
 END p3.
```

b2) ábra

c) A Poisson eloszlás eloszlásfüggvénye a $0, 1, \ldots$ helyeken "ugrik", és mindig akkorát, amekkora az illető hely valószínűsége. Jelölje $a_0, a_1, a_2, \ldots$ az eloszlásfüggvény különböző értékeit növekvő sorrendben. $a_0 = 0$, és legyen $\xi = k$ ha $x \in [a_k, a_{k+1})$, ekkor ξ minden értéket a megfelelő valószínűséggel vesz fel. Persze nem számolhatunk végtelen sok a_i értékkel. Meg kell adnunk vagy egy olyan kicsiny ε-t, hogy az olyan kicsi valószínűségű eseményt gyakorlatilag már lehetetlennek tekintjük, vagy egy olyan nagy K egészt, hogy azt, hogy ξ annál nagyobb, lehetetlennek tekintjük. Ezután, ha az a gyakorlatilag nulla valószínűségű esemény következik be, hogy a generált x érték az $[1-\varepsilon; 1]$ intervallumba esik, ill. hogy $x > a_K$, akkor ξ-nek nem adunk értéket. L. c) ábra

Bemenő paraméterek: N, m, ε; ahol m a várható érték. Kimenő paraméterek mint eddig.

```
BEGIN
  RANDOMIZE;
  READ(N);
  READR(m);
  READR(eps);
  a[0]:=EXP(-m);
  c:=EXP(-m);
```

```
n:=0;
WHILE a[n]+eps<=1.0 DO
  c:=c*m/REAL(n+1);
  a[n+1]:=a[n]+c;
  n:=n+1;
  END;
n:=n+1;
a[n]:=1.0;
FOR i:=1 TO N DO
  x:=RAND();
  FOR j:=1 TO n DO
    IF x<a[j]
      THEN
        b[i]:=j-1;
        GOTO U;
      END;
    END;
U: WRITE(b[i]);
   END;
END p4.
```

c) ábra

d) Az (a, c) intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvényének inverze az (a, c) intervallumon létezik, x-et ebbe írjuk. Bemenő paraméterek: N, a, c, a kimenők mint eddig. L. d) ábra.

```
BEGIN
  RANDOMIZE;
  READ(N);
  READR(a);
  READR(c);
  FOR i:=1 TO N DO
    x:=RAND();
    b[i]:=(c-a)*x+a;
    WRITER(b[i]);
    END;
END p7.
```

d) ábra

e) Az exponenciális eloszlás eloszlásfüggvénye invertálható a $(0; \infty)$ intervallumban, így x-et az eloszlásfüggvény inverzébe írjuk. m az eloszlás paramétere,azaz $M(\xi) = \frac{1}{m}$.
Bemenő paraméterek: N, m. L. e) ábra.

```
BEGIN
  RANDOMIZE;
  READ(N);
  READR(m);
  FOR i:=1 TO N DO
    x:=RAND();
    b[i]:=-m*LN(1.0-x),
    WRITER(b[i]);
    END;
END p6.
```

e) ábra

133. A vásárlást úgy szimuláljuk, hogy a (0,1) intervallumot 5 egyenlő hosszúságú részre osztjuk, és úgy tekintjük, hogy olyan számú cédula volt a dobozban, amelyik intervallumba a RAND() eljárással generált (0,1)-en egyenletes eloszlású valószínűségi változó értéke esik. Ezt addig csináljuk, amíg mind az öt szám össze nem jön. (Ha elég sok "vásárlássorozatot" végigkísérünk, az így kapott dobozszámok átlaga várhatóan közel lesz a valódi átlaghoz, azaz a vásárlandó dobozszám várható értékéhez. Ebben a feladatban most nem foglalkozunk azzal, hogy hányszor kellene a folyamatot lejátszani ahhoz, hogy a tényleges várható értéket adott valószínűséggel, adott pontossággal közelítsük).
Mivel a szimuláció során elvileg előfordulhat, hogy akárhány dobozt "veszünk" nem lesz köztük mind az öt féléből, ha túl nagy számig jutunk, akkor ezt a "vásárlássorozatot" ebben a programban az adott nagy számmal vesszük figyelembe, de választhatnánk azt is, hogy figyelmen kívül hagyjuk.
Bemenő paraméterek: N, K; ahol K vásárlások felső határa, kimenő paraméter: m a becsült várható érték. L. ábra.

```
BEGIN
  RANDOMIZE;
  READ(N);
  READ(K);
  FOR i:=1 TO N DO
    FOR j:=1 TO 5 DO D[j]:=0; END;
    n:=1;
U:  x:=RAND();
    j:=INTEGER(5.0*x)+1;
    D[j]:=D[j]+1;
    s:=D[1]*D[2]*D[3]*D[4]*D[5];
    IF (s<1) AND (n<K) THEN n:=n+1; GOTO U; END;
    M:=M+n;
    END;
  WRITER(REAL(M)/REAL(N));
END p10.
```

33.32

134. A kiszolgálószemélyzetet a $K(1),\ldots, K(6)$ változók reprezentálják, mindegyik azt az időt taratalmazza, ameddig a kiszolgáló foglalt, azaz, ha $K(1)$ tartalma j, akkor a műszakkezdéstől számított $j \cdot 5$ másodpercig foglalt, (ami természetesen nem azt jelenti, hogy addig állandóan foglalt volt, hanem azt, hogy a kiszolgálást akkor fejezte be, vagy hogy akkor fogja befejezni). KV mutatja hány várakozó van, $V(1),\ldots,V(10)$ a várakozók érkezési idejét. NN mutatja hány vásárlót szolgáltak ki, NNN az összes várakozási időt. Az átlagos várakozási időt naponta számítjuk, majd N napra az átlagok átlagát. Az ötmásodperces egységek miatt egy munkanap hossza 5760 egység. A napnak vége, ha túl vagyunk az 5760 egységen, és nincs több várakozó. Mivel fél perc 6 db ötmásodperces egység, két vevő ékezése között eltelt idő $\lambda = \frac{1}{6}$ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó, egy vevő kiszolgálására fordított idő pedig a (24,48) intervallumon egyenletes eloszlású. Először generáljuk az új vevő érkezésének időpontját, egészre kerekítjük. Mivel ez az időpont lehet jóval később is, mint ahol a folyamat vizsgálatával tartunk, az új vevővel pedig nyilván csak megérkezésekor kell foglalkozni, bevezettük az IND változót, amely 1, ha még nem foglakoztunk az újonan érkezővel, 0, ha már igen. Időegységenként haladva egy-egy megüresedett kiszolgálóhoz rendeljük a soronkövetkező várakozót, majd elérve ahhoz az időhöz, amikor az új vevő érkezett, megnézzük befér-e a várakozók közé, ill. rögtön sorrakerül-e. Az A változó mutatja, hányadik időegységnél tartunk.
A feladat megoldása során elsősorban arra törekedtünk, hogy a megoldás könnyen követhető legyen (és nem pl. műveletigény minimalizására, stb.). L. ábra.

```
BEGIN
  RANDOMIZE;
  READ(N);
  G:=0.0;
  FOR k:=1 TO N DO
    FOR i:=1 TO 6 DO K[i]:=-1; END;
    A:=0; B:=0; KV:=0; NN:=0; NNN:=0;
U1: X:=RAND();                                    újabb vevő érkezési
    B:=B+LONGINT(-6.0*LN(1.0-X)+0.5);             idejének generálása
    IF B<=5760 THEN IND:=1; END;
U2: IF B<=A
      THEN
        IF (IND#1) OR (KV=10) THEN GOTO U1; END;
        KV:=KV+1;
        V[KV]:=B;                                 új érkező elhelyezése
        IND:=0;
      ELSE
        A:=A+1;
      END;
```

```
U3: IF KV=0
      THEN
        IF A>5760 THEN GOTO U4; ELSE GOTO U2; END;
      END;
    FOR i:=1 TO 6 DO
      IF K[i]<A
        THEN
          X:=RAND();
          C:=LONGINT(24.0*X+24.0+0.5);
          K[i]:=A+C;
          NN:=NN+1;
          NNN:=NNN+A-V[1];
          IF KV#1
            THEN
              FOR j:=2 TO KV DO V[j-1]:=V[j]; END;
            END;
          KV:=KV-1;
          GOTO U3;
        END;
      END;
    GOTO U2;
U4: G:=G+REAL(NNN)/REAL(NN);
    END;
  G:=G/REAL(N);
  WRITER(G*5.0/60.0);
END p11.
```

a sorrakerülő vevő elhelyezése szabad kiszolgálóhoz

kiszolgálási idejének generálása

34. Együttes eloszlások (megoldások)

1.

$$F(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{ha } x\le 1 \text{ vagy } y\le 1\,, \\ \frac{(k-1)(l-1)}{36}, & \text{ha } \left\{\begin{smallmatrix} k-1<x\le k & \text{és} \\ l-1<y\le l \end{smallmatrix}\right\}, \quad k,l=2,3,4,5,6\,, \\ \frac{k}{6}, & \text{ha } x\le k \text{ és } y>6, \quad k=2,3,4,5,6\,, \\ \frac{l}{6}, & \text{ha } x>6 \text{ és } y\le l, \quad l=2,3,4,5,6\,, \\ 1, & \text{ha } x>6 \text{ és } y>6\,. \end{cases}$$

2. Pl. a $(\xi<0.9,\eta<0.8,\zeta<0.7)$ esemény azt jelenti, hogy mind a három kockán páros szám jött ki; a $(\xi<0.9,\eta<0.8,\zeta<2)$ esemény azt, hogy az első kettőn páros, a harmadikon akármi. Ezekhez hasonló meggondolással adódik, hogy

$$F(x,y,z)=\begin{cases} 0, & \text{ha } x\le 0 \text{ vagy } y\le 0 \text{ vagy } z\le 0\,, \\ \frac{1}{8}, & \text{ha } 0<x\le 1 \text{ és } 0<y\le 1 \text{ és } 0<z\le 1\,, \\ \frac{1}{4}, & \begin{array}{c}\text{ha két változó 0-nál nagyobb, de 1-nél nem nagyobb} \\ \text{és a harmadik 1-nél nagyobb}\end{array}, \\ \frac{1}{2}, & \begin{array}{c}\text{ha egy változó 0-nál nagyobb, de 1-nél nem nagyobb} \\ \text{és a másik kettő 1-nél nagyobb}\end{array}, \\ 1, & \text{ha } x>1 \text{ és } y>1 \text{ és } z>1\,. \end{cases}$$

$$F_\eta(y)=\lim_{\substack{x\to\infty\\ z\to\infty}} F(x,y,z)=\begin{cases} 0, & \text{ha } \le 0\,, \\ \frac{1}{2}, & \text{ha } 0<y\le 1\,, \\ 1, & \text{ha } 1<y\,. \end{cases}$$

3. a) Először meg kell határoznunk a peremeloszlásokat. A 34-2 oldal (1) szerint $P(\xi=-1)=P(\xi=-1,\eta=1)+P(\xi=-1,\eta=2)=\frac{1}{2}$.
Hasonlóan $P(\xi=0)=\frac{1}{3}$, $P(\xi=1)=\frac{1}{6}$, $P(\eta=1)=\frac{1}{3}$, $P(\eta=2)=\frac{2}{3}$.
Mivel az összes értékpárokra $P(\xi=i,\eta=j)=P(\xi=i)P(\eta=j)$, ezért ξ és η függetlenek.

b) Mivel $12p=1$, $p=\frac{1}{12}$. A peremeloszlások:
$P(\xi=0)=\frac{1}{4}$, $P(\xi=1)=\frac{1}{4}$, $P(\xi=2)=\frac{1}{2}$;
$P(\eta=0)=\frac{1}{3}$, $P(\eta=1)=\frac{2}{3}$.
Minden lehetséges i,k értékre $P(\xi=i,\eta=k)=P(\xi=i)P(\eta=k)$, így ξ és η függetlenek.

4. $P(\xi=-2)=0.12$, $P(\xi=-1)=0.14$, $P(\xi=0)=0.15$, $P(\xi=1)=0.14$, $P(\xi=2)=0.16$, $P(\xi=3)=0.15$, $P(\xi=4)=0.14$;
$P(\eta=0.5)=0.11$ $P(\eta=0.7)=0.31$, $P(\eta=1)=0.16$, $P(\eta=1.2)=0.42$.
Nem függetlenek, mert ha azok lennének, $P(\xi=i,\eta=j)=0$ esetén vagy az egész sorban, vagy az egész oszlopban csak 0-nak szabadna állni, hogy $P(\xi=i,\eta=j)=P(\xi=i)P(\eta=j)$ teljesülhessen.
$M(\xi)=1.09$, $M(\eta)=0.936$.

5. Mivel $n \leq 4$-re a $P(\xi+\eta=n)$ értékek ismertek, a $P(\xi=i,\eta=n-i)=P(\xi=i|\xi+\eta=n)P(\xi+\eta=n)$ egyenlőségből indulunk ki.
$P(\xi=i|\xi+\eta=n)=\binom{n}{i}(\frac{1}{2})^i(\frac{1}{2})^{n-i}$, így
$P(\xi=i,\eta=n-i)=\binom{n}{i}(\frac{1}{2})^n P(\xi+\eta=n)$.

$\eta \setminus \xi$	0	1	2	3	4	5–
0	0.15	0.10	0.0875	0.025	0.0031	?
1	0.10	0.175	0.075	0.0125	?	
2	0.0875	0.075	0.0187	?		
3	0.025	0.0125	?			
4	0.031	?				
5–	?					

6. $P(\gamma=k)=(\frac{2}{6})^{k-1}\cdot\frac{4}{6}=\frac{2}{3^k}$. Annak valószínűsége, hogy egy ötnél kisebb szám éppen i, $P(\vartheta=i)=\frac{1}{4}$. Az, hogy a k-adik az első olyan, amelyik ötnél kisebb és éppen i, úgy lehet, hogy $k-1$-szer legalább ötöst dobunk, az utolsó pedig i, azaz $P(\gamma=k,\vartheta=i)=(\frac{2}{6})^{k-1}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{2\cdot 3^k}$. Így ϑ és γ függetlenek.

7.

$$
\begin{array}{ll}
P(\eta=0,\xi=0,\delta=2)=\frac{1}{12}, & P(\eta=0,\xi=0,\delta=4)=\frac{1}{6},\\
P(\eta=0,\xi=1,\delta=2)=0, & P(\eta=0,\xi=1,\delta=4)=0,\\
P(\eta=1,\xi=0,\delta=2)=\frac{1}{12}, & P(\eta=1,\xi=0,\delta=4)=\frac{1}{6},\\
P(\eta=1,\xi=1,\delta=2)=0, & P(\eta=1,\xi=1,\delta=4)=0,\\
P(\eta=2,\xi=0,\delta=2)=0, & P(\eta=2,\xi=0,\delta=4)=0,\\
P(\eta=2,\xi=1,\delta=2)=\frac{1}{6}, & P(\eta=2,\xi=1,\delta=4)=\frac{1}{3}.
\end{array}
$$

A kétdimenziós eloszlások:

$\eta \setminus \xi$	0	1
0	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{1}{4}$	0
2	0	$\frac{1}{2}$

$\delta \setminus \xi$	0	1
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

$\eta \setminus \delta$	2	4
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

η eloszlása: $P(\eta=0)=\frac{1}{4}$, $P(\eta=1)=\frac{1}{4}$, $P(\eta=2)=\frac{1}{2}$.
ξ eloszlása: $P(\xi=0)=\frac{1}{2}$, $P(\xi=1)=\frac{1}{2}$.
δ eloszlása: $P(\delta=2)=\frac{1}{3}$, $P(\delta=4)=\frac{2}{3}$.
ξ és η nem függetlenek; ξ és δ függetlenek; η és δ függetlenek; ξ, η, δ nem függetlenek.

8. a) A $p_{i,j,k}=P(\xi=i,\eta=j,\delta=k)$ jelöléssel: Ha $0\leq i+j+k\leq n$, akkor

$$p_{i,j,k}=\frac{\binom{n}{i}\binom{n}{j}\binom{n}{k}\binom{n}{n-i-j-k}}{\binom{4n}{n}},$$

és minden más i,j,k értékre ez a valószínűség nulla.
b)

$$P(\xi=i,\eta=j)=\sum_{k=0}^{n-i-j}p_{i,j,k}=\frac{\binom{n}{i}\binom{n}{j}}{\binom{4n}{n}}\sum_{k=0}^{n-i-j}\binom{n}{k}\binom{n}{n-i-j-k}=$$

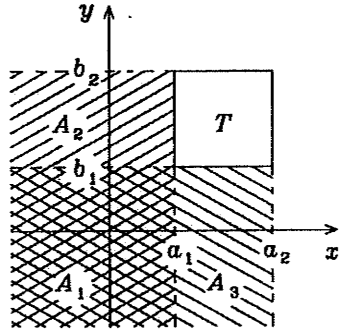
$$= \frac{\binom{n}{i}\binom{n}{j}\binom{2n}{n-i-j}}{\binom{4n}{n}},$$

az utolsó átalakításnál Szász Gábor, Matematika III. 145.old. (3) képletet alkalmazva. Mivel

$$P(\xi = i) = \frac{\binom{n}{i}\binom{3n}{n-i}}{\binom{4n}{n}} \quad \text{és} \quad P(\eta = j) = \frac{\binom{n}{j}\binom{3n}{n-j}}{\binom{4n}{n}},$$

így $P(\xi = i, \eta = j) \neq P(\xi = i)P(\eta = j)$, tehát ξ és η nem függetlenek. Ezt vártuk is, hiszen a kihúzott fehér golyók száma nem független a pirosakétól, mert a kettő együtt n-nél több nem lehet.

9. Az egyenlőség bal oldalán álló eseményt jelölje T. Legyenek az A_i események a következők:
$A_1 : (\xi < a_1, \eta < b_1)$, $A_2 : (\xi < a_1, \eta < b_2)$,
$A_3 : (\xi < a_2, \eta < b_1)$, $A_4 : (\xi < a_2, \eta < b_2)$.
$A_2A_3 = A_1$, $A_4 = A_3 + A_2 + T)$ (l.az ábrát).
Az $A_3 + A_2$ és T események egymást kizárják. Ezért
$P(A_4) = P(A_3) + P(A_2) - P(A_2A_3) + P(T)$,
és ebből az állítás adódik.



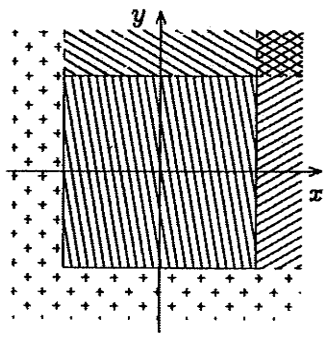
10. A függvény minden változójának balról folytonos és növekvő függvénye, teljesíti a határértékfeltételeket is, mégsem lehet eloszlásfüggvény, mert ha az lenne, akkor pl. arra a T négyzetre, amelynek csúcsai a $(-1;-1)$, $(2;-1)$, $(-1;2)$, $(2,2)$ pontok,

$$0 \leq P((\xi,\eta) \in T) = F(2,2) + F(-1,-1) - F(-1,2) - F(2,-1) = -1$$

adódna, ami ellentmondás.

11. Az F függvény az y-nak nem monoton növekvő függvénye. (L. a **T 34.2** tételt.)

12. A **D 34.4** szerint
$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(s,t)dtds$.
Figyelembe véve az x-re és y-ra tett kikötéseket, az ábrán bejelölt öt tartományt kell megkülönböztetnünk. Ha $-1 < x \leq 1$ és $-1 < y \leq 1$:



$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(s,t)dtds =$$

$$= 0 + \int_{-1}^{x}\int_{-1}^{y} \frac{1}{4}(1 + st(s^2 - t^2))dtds =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{(x^2 - y^2)(y^2 - 1)(x^2 - 1)}{8} + (x+1)(y+1)\right)$$

Ha $-1 < x \le 1$ és $1 < y$:

$$F(x,y) = \int_{-1}^{x}\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}[1+st(s^2-t^2)dtds = \frac{1}{2}(x+1)\ .$$

Végülis azt kapjuk, hogy

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le -1 \text{ vagy } y \le -1\ , \\ \frac{1}{4}\Big(\frac{(x^2-y^2)(y^2-1)(x^2-1)}{8} + \\ \qquad +(x+1)(y+1)\Big), & \text{ha } -1 < x \le 1 \text{ és } -1 < y \le 1\ , \\ \frac{1}{2}(x+1), & \text{ha } -1 < x \le 1 \text{ és } 1 < y\ , \\ \frac{1}{2}(y+1), & \text{ha } 1 < x \text{ és } -1 < y \le 1\ , \\ 1, & \text{ha } 1 < x \text{ és } 1 < y\ . \end{cases}$$

A 32-2 oldal (2) képlete szerint: Ha $-1 < x < 1$, akkor $f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x,t)dt = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(1+xt(x^2-t^2))dt = \frac{1}{2}$; ha $|x| > 1$, akkor $f_\xi(x) = 0$. Hasonlóan adódik $f_\eta(y)$ is. Tehát:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{ha } -1 < x < 1\ , \\ 0 & \text{különben}\ , \end{cases} \qquad f_\eta(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{ha } -1 < y < 1\ , \\ 0 & \text{különben}\ . \end{cases}$$

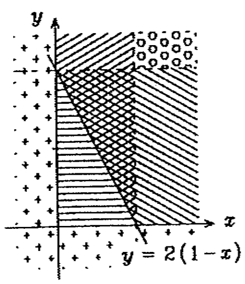
13. Most hat tartományt kell megkülönböztetnünk (l. a) ábrát); (a megfelelő integrálok kiszámítását egyszerűvé teszi az a tény, hogy az x, y bármely T tartományán $\int\int_T 1\ dxdy$ egyenlő T területével.) A $0 < x \le 1$ és $2 < y$ esetben például:

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(s,t)dtds = \int_{0}^{x}\int_{0}^{2(1-s)} 1\ dtds = 1-(1-x)^2$$

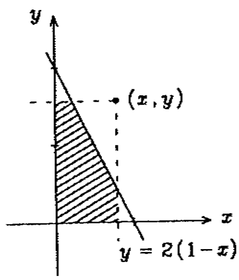
Hasonló meggondolással:

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0 \text{ vagy } y \le 0\ , \\ xy, & \text{ha } 0 < x \le 1 \text{ és } 0 < y \le 2(1-x)\ , \\ xy - \frac{(y+2x-2)^2}{4}, & \text{ha } 0 < x \le 1 \text{ és } 2(1-x) < y \le 2 \text{ (l. b) ábra)}, \\ 1 - \frac{(2-y)^2}{4}, & \text{ha } 1 < x \text{ és } 0 < y \le 2\ , \\ 1-(1-x)^2, & \text{ha } 0 < x \le 1 \text{ és } 2 < y\ , \\ 1, & \text{ha } 1 < x \text{ és } 2 < y\ . \end{cases}$$

A **T 34.8** tétel alapján nem függetlenek, mert pl. a $0 < x < 1$, $0 < y < 2(1-x)$ esetben $f_\xi(x)f_\eta(y) = 2(1-x)\cdot\frac{2-y}{2} \ne 1 = f(x,y)$.



a) ábra



b) ábra

14. a) A **D 34.4** és **T 35.5** alapján f sűrűségfüggvény, mert $f(x,y)>0$, mindenütt folytonos és

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2-2xy+2y^2}{2}}dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-y)^2}{2}}dx\right]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy=1\ .$$

A szögletes zárójelben ugyanis egy y várható értékű és 1 szórású normális eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvényének integrálja áll.

b) A 34-2 oldal (3) képlete szerint

$$F_\xi(x)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{t^2-2ty+2y^2}{2}}dydt$$

Az y szerinti integrálás elvégzéséhez a kitvőt úgy alakítjuk át, hogy annak y-tól függő része $-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}$ alakú legyen:

$$F_\xi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-\frac{t}{2})^2}{2\cdot\frac{1}{2}}}dy\right]e^{-\frac{t^2}{2\cdot 2}}dt=\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\ .$$

15. a) Nemnegatív, és $\int_0^1\int_0^2\frac{6}{7}(x^2+\frac{xy}{2})dydx=1$.

b) $f_\xi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy$, tehát

$$f_\xi(x)=\begin{cases}\frac{6}{7}(2x^2+x), & \text{ha } 0<x<1\ ,\\ 0 & \text{különben}\ .\end{cases}$$

c) A **T 34.5** tétel alapján $P(\xi>0.5,\eta<1)=\int_{0.5}^1\int_0^1\frac{6}{7}(x^2+\frac{xy}{2})dydx=\frac{37}{112}$.

d) A **T 34.5** tétel alapján $\int_0^1\int_0^x\frac{6}{7}(x^2+\frac{xy}{2})dydx=\frac{15}{56}$.

16. a) Együttes sűrűségfüggvényük

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-x-y}, & \text{ha } 0<x \text{ és } 0<y\ ,\\ 0 & \text{különben}\ .\end{cases}$$

b) Peremeloszlásfüggvényeikből $F(x,y)=F_\xi(x)F_\eta(y)$, tehát függetlenek (l. a **D 34.6** definíciót).

c) A **T 34.5** tétel alapján:

$$\int_0^1\int_0^{2(1-x)}e^{-x-y}dydx=1-2e^{-1}+e^{-2}\ .$$

17. a)

$$f_\eta(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}0, & \text{ha } y<0,\\ e^{-y}, & \text{ha } 0<y\ .\end{cases}$$

$$f_\xi(x)=\begin{cases}0, & \text{ha } x<0\ ,\\ xe^{-x}, & \text{ha } 0<x\ .\end{cases}$$

b) Függetlenek, mert $f(x,y)=f_\xi(x)f_\eta(y)$.

c) $P(\xi<1,\eta>3)=\int_0^1\int_3^{\infty}xe^{-(x+y)}dydx=e^{-3}(1-2e^{-1})$.

d)

$$\int_0^\infty \int_{x^2}^\infty x e^{-(x+y)} dy dx = \int_0^\infty x e^{-x-x^2} dx =$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{2}(1+2x)e^{-(x+x^2)}dx - \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-(x+x^2)}dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{2}e^{-(x+x^2)}\right]_0^\infty - \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\pi}\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+\frac{1}{2})^2}{2\cdot\frac{1}{2}}}e^{\frac{1}{4}}\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\pi}e^{\frac{1}{4}}}{2}\left(1 - F_{N(-\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}})}(0)\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\pi}e^{\frac{1}{4}}}{2}\left(1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) .$$

18. a) $1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^2 A(x+\frac{y}{3})dydx = \frac{5}{3}A$, ebből $A = \frac{3}{5}$.
b)

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} \frac{6}{5}(x+\frac{1}{3}), & \text{ha } 0 < x < 1 , \\ 0 & \text{különben} . \end{cases}$$

$$f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} \frac{3}{5}(\frac{1}{2}+\frac{y}{3}), & \text{ha } 0 < y < 2 \\ 0 & \text{különben} . \end{cases}$$

c) A **T 34.5** tétel alapján $P((\xi,\eta) \in T) = \iint\limits_T f(x,y)dxdy =$
$= \int_0^1\int_1^2 \frac{3}{5}(x+\frac{y}{3})dydx = \frac{3}{5}$.

19. a) Mivel

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^x\int_0^y se^{-s^2}e^{-t^2}dtds = \left(2\int_0^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{-\frac{t^2}{2\cdot\frac{1}{2}}}dt\right)\left(\int_0^x 2se^{-s^2}ds\right) ,$$

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0 \text{ vagy } y \le 0 , \\ (1-e^{-x^2})(2\Phi(y\sqrt{2})-1) & \text{különben} . \end{cases}$$

b) A kör belsejét T-vel jelölve

$$P((\xi,\eta) \in T) = \iint\limits_T f(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}} \frac{4}{\sqrt{\pi}}xe^{-x^2-y^2}dxdy =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1(-e^{-1}+e^{-y^2})dy = -\frac{2}{e\sqrt{\pi}} + 2\Phi(1) - 1 \approx 0.2675 .$$

20. a) $1 = \int_0^\infty\int_1^4 Ce^{-3x}dydx = C$, ebből $C = 1$.
b)

$$P((\xi,\eta) \in T) = \iint\limits_T f(x,y)dxdy = \int_{\frac{2}{3}}^2\int_1^{\frac{3x}{2}} e^{-3x}dydx = \frac{e^{-2}}{6} - \frac{5e^{-6}}{6} \approx 0.0205$$

21. Első megoldás. Az $F(x,y) = P(\xi < x, \eta < y)$ definíció alapján felírjuk együttes eloszlásfüggvényüket és ξ eloszlásfüggvényét, amelyből a sűrűségfüggvények differenciálással adódnak.

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0 \text{ vagy } y \le 0\,, \\ xy, & \text{ha } 0 < x \le 1 \text{ és } 0 < y \le 1\,, \\ x, & \text{ha } 0 < x \le 1 \text{ és } 1 < y\,, \\ y, & \text{ha } 1 < x \text{ és } 0 < y \le 1\,, \\ 1, & \text{ha } 1 < x \text{ és } 1 < y\,. \end{cases}$$

$$F_\xi(x) = \lim_{y\to\infty} F(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0\,, \\ x, & \text{ha } 0 < x \le 1\,, \\ 1, & \text{ha } 1 < x\,. \end{cases}$$

Második megoldás. Jelöljük G-vel azt a négyzetet, amelynek csúcsai a (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) pontok. A geometriai valószínűségeknél követett gondolatmenettel kapjuk, hogy annak valószínűsége, hogy a (ξ,η) pont egy adott tartományba esik, arányos a tartomány és G közös részének területével, tehát a **D 34.9** definíció értelmében (ξ,η) egyenletes eloszlású a négyzeten. Így:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0<x\le 1 \text{ és } 0<y\le 1\,, \\ 0 & \text{különben}\,, \end{cases} \qquad f_\xi(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 < x \le 1\,, \\ 0 & \text{különben}\,. \end{cases}$$

22. a) Számolhatunk a definíció alapján, ekkor pl. a $0 < x < y \le 1$ esetre

$$F(x,y) = P(\xi < x, \eta < y) = P(\text{mindkettő } < x) +$$

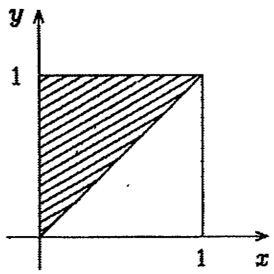
$$+P\begin{pmatrix} \text{első választás; } < x \\ x \le \text{ második választás } < y \end{pmatrix} + P\begin{pmatrix} x \le \text{első választás } < y; \\ \text{második választás} < x \end{pmatrix} =$$

$$= x^2 + x(x-y) + (y-x)x = 2xy - x^2$$

stb.

De egyszerűbb, ha geometriai valószínűséggel számolunk. A $[\xi,\eta]$ egyenletes eloszlású az ábrán jelzett tartományon, azaz

$$f(x,y) = \begin{cases} 2, & \text{ha } 0 \le x < y \le 1\,, \\ 0 & \text{különben}\,. \end{cases}$$



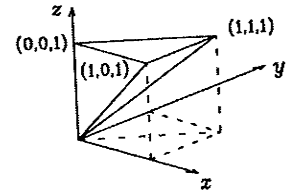
$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x\le 0 \text{ vagy } y\le 0\,, \\ 2xy - x^2, & \text{ha } 0 < x < y \le 1\,, \\ 2x - x^2, & \text{ha } 0<x\le 1 \text{ és } 1<y\,, \\ y^2, & \text{ha } 0<y\le 1 \text{ és } y\le x\,, \\ 1, & \text{ha } 1 < x \text{ és } 1 < y\,. \end{cases}$$

b)

$$F_\eta(y) = F(\infty, y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } y \le 0\,, \\ y^2, & \text{ha } 0 < y \le 1\,, \\ 1, & \text{ha } 1 < y\,, \end{cases}$$

ami abból is következik, hogy két szám közül a nagyobbik akkor és csak akkor kisebb, mint y, ha mindkettő kisebb y-nál.

23. Az előző feladathoz hasonlóan



a)

$$f_{\xi,\eta,\tau}(x,y,z)=\begin{cases}6, & \text{ha } 0<y<x<z\le 1\ ,\\ 0 & \text{különben}\ .\end{cases}$$

b) $F_{\eta,\tau}(y,z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{z} f_{\xi,\eta,\tau}(r,s,t)dtdrds.$

Pl. $0<z\le 1$, $y>z$ esetén a $f_{\xi,\eta,\tau}(r,s,t)\ne 0$ tartomány alakjára tekintettel: $F_{\eta,\tau}(y,z)=\int_0^z\int_0^s\int_s^z 6dtdrds=z^3$ (mivel s a középső; r a legkisebb, ezért $0\le r\le s$; t a legnagyobb, ezért $s\le t\le z$; és s összes lehetséges értékére integrálunk, így mivel a legnagyobb, azaz $t\le z$, $0\le s\le z$.)

$$F_{\eta,\tau}(y,z)=\begin{cases}0, & \text{ha } y\le 0 \text{ vagy } z\le 0\ ,\\ 3z^2y-3zy^2+y^3, & \text{ha } 0<y\le z\le 1\ ,\\ z^3, & \text{ha } 0<z\le 1 \text{ és } y>z\ ,\\ 3y-3y^2+y^3, & \text{ha } 0<y\le 1 \text{ és } 1<z\ ,\\ 1, & \text{ha } 1<y,z\ .\end{cases}$$

Közöljük együttes eloszlásfüggvényüket is:

$$F_{\xi,\eta,\tau}(x,y,z)=\begin{cases}0, & \text{ha } x\le 0 \text{ v. } y\le 0 \text{ v. } z\le 0\ ,\\ 6xyz-3x^2y-3zy^2+y^3, & \text{ha } 0<y\le x\le z\le 1\ ,\\ 6xy-3x^2y-3y^2+y^3, & \text{ha } 0<y\le x\le 1,\ 1<z\ ,\\ 3x^2-2x^3, & \text{ha } 0<x\le 1,\ x\le y,\ 1<z\ ,\\ 3z^2y-3zy^2+y^3, & \text{ha } 0<y\le z\le 1,\ x>z\ ,\\ 3zx^2-2x^3, & \text{ha } 0<x\le z\le 1,\ y>z\ ,\\ z^3, & \text{ha } 0<z\le 1,\ x,y>z\ ,\\ 3y-3y^2+y^3, & \text{ha } 0<y\le 1,\ 1<x,z\ ,\\ 1, & \text{ha } 1<x,y,z\ .\end{cases}$$

Az $f_{\xi,\eta,\tau}(x,y,z)\ne 0$ tartomány alakja miatt kell ennyi esetet megkülönböztetni.

24.

$$P(\eta<x)=P(\text{van olyan } i,\ \xi_i<x)=1-P(\text{minden } \xi_i\ge x)=$$
$$=1-(P(\xi_1\ge x)P(\xi_2\ge x)\ldots=1-(1-F_{\xi_1}(x))(1-F_{\xi_2}(x))\ldots\ .$$

Tehát

$$F_\eta(x)=1-\prod_{i=1}^{n}(1-F_{\xi_i}(x))\ .$$

$$P(\delta<x)=P(\text{minden } \xi_i<x)=P(\xi_1<x)P(\xi_2<x)\ldots\ ,$$

$$F_\delta(x)=\prod_{i=1}^{n}F_{\xi_i}(x)\ .$$

25. Jelöljük η_1,η_2 együttes eloszlásfüggvényét $F(x,y)$-nal

a) Ha $x<y$:

$$F(x,y)=P(\eta_1<x,\eta_2<y)=P(\min(\xi_1,\xi_2)<x,\max(\xi_1,\xi_2)<y)=$$

$$= P(\xi_1 < x, \xi_2 < x) + P(\xi_1 < x, x \le \xi_2 < y) + P(x \le \xi_1 < y, \xi_2 < x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{x} f_1(t)f_2(s)dtds + \int_{-\infty}^{x}\int_{x}^{y} f_1(t)f_2(s)dsdt + \int_{-\infty}^{x}\int_{x}^{y} f_1(t)f_2(s)dtds\ .$$

Figyelembe véve, hogy pl. $\int_{-\infty}^{x}\int_{x}^{y} f_1(t)f_2(s)dsdt = \int_{-\infty}^{x} f_1(t)dt \int_{x}^{y} f_2(s)ds$, mindazokban a pontokban, ahol $F(x,y)$ megfelelő parciális deriváltjai léteznek,

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = f_2(y)\int_{-\infty}^{x} f_1(t)dt + f_1(y)\int_{-\infty}^{x} f_2(s)ds$$

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f_1(x)f_2(y) + f_2(x)f_1(y)$$

Ha $x \ge y$:

$$F(x,y) = P(\min(\xi_1,\xi_2) < x, \max(\xi_1,\xi_2) < y) = P(\xi_1 < y, \xi_2 < y) =$$

$$= \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{y} f_1(t)f_2(s)dsdt\ ,$$

és így $\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = 0$. Ezek szerint:

$$f(x,y) = \begin{cases} f_1(x)f_2(y) + f_1(y)f_2(x), & \text{ha } x < y\ , \\ 0 & \text{különben}\ . \end{cases}$$

b)

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le a \text{ v. } y \le a\ , \\ \int_a^x \int_a^x f_1(t)f_2(s)dsdt + \int_a^x \int_x^y f_1(t)f_2(s)dsdt + \\ + \int_a^x \int_x^y f_1(t)f_2(s)dtds, & \text{ha } a < x \le y \le b\ , \\ \int_a^y \int_a^y f_1(t)f_2(s)dsdt, & \text{ha } a < y \le b \text{ és} \\ & \quad x > y, \\ \int_a^x \int_a^x f_1(t)f_2(s)dsdt + \int_a^x \int_x^b f_1(t)f_2(s)dsdt + \\ + \int_a^x \int_x^b f_1(t)f_2(s)dtds, & \text{ha } a < x \le b < y\ , \\ 1, & \text{ha } b < x, \text{ és } b < y\ . \end{cases}$$

$$f(x,y = \begin{cases} f_1(x)f_2(y) + f_1(y)f_2(x), & \text{ha } a < x < y < b\ , \\ 0 & \text{különben}\ . \end{cases}$$

26. a) Az együttes eloszlásfüggvény vizsgálatával kezdjük.

$$F(x,y,z) = P(\eta_1 < x, \eta_2 < y, \eta_3 < z)$$

Először tegyük fel, $x < y < z$. A jobboldali eseményt olyan egymást kizáró események összegére bontjuk, amelyek valószínűségét könnyen fel tudjuk írni. A jobboldali esemény úgy következhet be, hogy vagy valamennyi $x_i < x$; vagy kettő kisebb, mint x, a harmadik x és z közé esik; vagy egy kisebb, mint x, kettő x és y közé esik; vagy egy kisebb, mint x, egy x és y, egy y és z közé esik. Bármelyik x_i olyan valószínűséggel kisebb, mint egy adott α, amilyen valószínűséggel $\xi_i < \alpha$ Tehát

$$F(x,y,z) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{x} f(r)f(s)f(t)dtdrds + 3\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{x}\int_{x}^{z} f(r)f(s)f(t)dtdrds +$$

$$+3\int_{-\infty}^{x}\int_{x}^{y}\int_{x}^{y} f(r)f(s)f(t)dtdrds + 3!\int_{-\infty}^{x}\int_{x}^{y}\int_{y}^{z} f(r)f(s)f(t)dtdrds$$

Látjuk, hogy ebben az összegben egyetlen olyan tag van, amelyben mind a három változó szerepel. Ha x, y, z más nagysági sorrendben vannak, egyetlen olyan tag sincs, amelyikben mindhárom változó szerepel. Így a háromszoros parciális deriváláskor egyetlen tag deriváltjai maradnak meg.

$$f_{\eta_1,\eta_2,\eta_3}(x,y,z) = \begin{cases} 3!f(x)f(y)f(z), & x < y < z\,, \\ 0 & \text{különben}\,. \end{cases}$$

b)

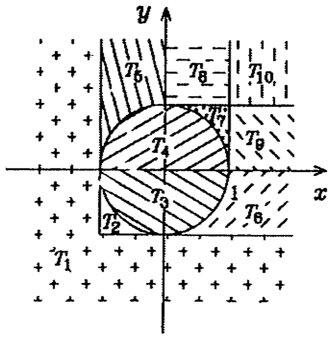
$$f_{\eta_1\eta_2\eta_3}(x,y,z) = \begin{cases} 3!f(x)f(y)f(z), & \text{ha } a < x < y < z < b\,, \\ 0 & \text{különben}\,. \end{cases}$$

27. Az előző feladathoz hasonlóan

$$f_\eta(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \begin{cases} n!f(x_1)f(x_2)\ldots f(x_n), & \text{ha } x_1 < x_2 < \ldots < x_n\,, \\ 0 & \text{különben}\,. \end{cases}$$

28. a) Mivel a $[\xi,\eta]$ valószínűségi vektorváltozó egyenletes eloszlású a körlapon,

$$f_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & \text{ha } x^2+y^2 \le 1\,, \\ 0 & \text{különben}\,, \end{cases}$$



b)

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & \text{ha } -1 \le x \le 1\,, \\ 0 & \text{különben}\,, \end{cases}$$

$$f_\eta(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, & \text{ha } -1 \le y \le 1\,, \\ 0 & \text{különben}\,. \end{cases}$$

c) $f(x,y) \neq f_\xi(x)f_\eta(y)$, tehát nem függetlenek.

Érdekességképpen közöljük $F_{\xi,\eta}(x,y)$-t:

$$\pi F_{\xi,\eta}(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{ha } (x,y)\in T_1 \\ 0 & \text{ha } (x,y)\in T_2 \\ xy+\frac{1}{2}(\arcsin x+\arcsin\sqrt{1-y^2})+ & \\ +\frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2}+y\sqrt{1-y^2}) & \text{ha } (x,y)\in T_3 \\ xy+\frac{1}{2}(\arcsin x-\arcsin\sqrt{1-y^2}+ & \\ +\frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2}+y\sqrt{1-y^2}+\pi) & \text{ha } (x,y)\in T_4 \\ \arcsin x+x\sqrt{1-x^2}+\frac{\pi}{2} & \text{ha } (x,y)\in T_5 \\ \arcsin y+y\sqrt{1-y^2}+\frac{\pi}{2} & \text{ha } (x,y)\in T_6 \\ y\sqrt{1-y^2}+x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x+\arcsin y & \text{ha } (x,y)\in T_7 \\ \frac{\pi}{2}+\arcsin\ x+x\sqrt{1-x^2} & \text{ha } (x,y)\in T_8 \\ \frac{\pi}{2}+\arcsin\ y+y\sqrt{1-y^2} & \text{ha } (x,y)\in T_9 \\ \pi & \text{ha } (x,y)\in T_{10} \end{cases}$$

29. $x\le 0$ esetén $F_\eta(x)=0$. Ha $x>0$:

$$F_\eta(x)=P(\eta<x)=P(\min_i \xi_i<x)=1-P(\xi_1>x,\dots,\xi_n>x)=1-e^{-n\alpha x}.$$

30. a) $P(\xi=-1)=0.25$, $P(\xi=0)=0.35$, $P(\xi=1)=0.4$,
$P(\eta=0)=0.35$, $P(\eta=1)=0.65$.

b) Pl. $\gamma=1$, ha $\xi=0$ és $\eta=1$, vagy $\xi=1$ és $\eta=0$; $\delta=0$, ha ξ vagy η valamelyike 0.

$\delta\setminus\gamma$	-1	0	1	2
-1	0	0.2	0	0
0	0.05	0.2	0.25	0
1	0	0	0	0.3

c) $P(\gamma=-1)=0.05$ $P(\gamma=0)=0.4$ $P(\gamma=1)=0.25$ $P(\gamma=2)=0.3$
$P(\delta=-1)=0.2$ $P(\delta=0)=0.5$ $P(\delta=1)=0.3$

d) $c(\xi,\eta)=M(\xi\eta)-M(\xi)M(\eta)=0.1-0.15\cdot 0.65=0.0025$

31. $M(\xi\eta)=1\cdot 1\cdot 0.5+0\cdot 1\cdot 0.04+1\cdot 0\cdot 0.06+0\cdot 0\cdot 0.4=0.5$,
$M(\xi)=M(\xi^2)=0.56$, $M(\eta)=M(\eta^2)=0.54$, $D(\xi)=0.4964$, $D(\eta)=4984$,

$$r(\xi,\eta)=\frac{M(\xi\eta)-M(\xi)M(\eta)}{D(\xi)D(\eta)}=0.7987\ .$$

32. $M(\xi)=2\cdot 0.23+3\cdot 0.23+4\cdot 0.36+6\cdot 0.18=3.67$,
$M(\eta)=2\cdot 0.32+4\cdot 0.38+6\cdot 0.3=3.96$
$P(\xi\eta=4)=0.12$, $P(\xi\eta=6)=0.09$, $P(\xi\eta=8)=0.15$,
$P(\xi\eta=12)=0.13$, $P(\xi\eta=16)=0.2$, $P(\xi\eta=18)=0.08$,
$P(\xi\eta=24)=0.13$, $P(\xi\eta=36)=0.1$.
$M(\xi\eta)=15.14$, $c(\xi,\eta)=0.6068$.

33. Pl. $\xi\eta = 7$ akkor és csak akkor, ha $\xi = 1$, amikor is $\eta = 7$ $P(\xi\eta = 7) = 0.1$ és $P(\xi = 1)P(\eta = 7) = 0.1 \cdot 0.1$; viszont $M(\xi) = 0$ és $M(\xi\eta) = -164 \cdot 0.3 - 25 \cdot 0.2 + 7 \cdot 0.1 + 92 \cdot 0.2 + 351 \cdot 0.1 = 0$, így $c(\xi, \eta) = 0$.

34. $M(\xi) = 2p_1 + p_2$, $M(\eta) = -2p_1 - p_2$, $M(\xi\eta) = -p_1$.
$c(\xi,\eta) = M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta)$, így a korrelálatlanság miatt $-p_1 + (2p_1 + p_2)^2 = 0$, másrészt $5p_1 + 4p_2 = 1$. Ezekből $p_1 = 1$ vagy $p_1 = \frac{1}{9}$ adódik. De $p_1 = 1$ esetén p_2 negatív lenne, így $p_1 = \frac{1}{9}$, $p_2 = \frac{1}{9}$. Függetlenek, mert $P(\xi = i, \eta = j) = P(\xi = i)P(\eta = j)$ minden lehetséges értékre (l.T **34.7**).

35. a) $P(\delta = 0) = \frac{1}{12}$, $P(\delta = 1) = \frac{3}{12}$, $P(\delta = 2) = \frac{4}{12}$, $P(\delta = 3) = \frac{4}{12}$.
b) $P(\delta = -1) = \frac{2}{12}$, $P(\delta = 0) = \frac{3}{12}$, $P(\delta = 1) = \frac{5}{12}$, $P(\delta = 2) = \frac{2}{12}$.
c) $P(\delta = 0) = \frac{3}{12}$, $P(\delta = 1) = \frac{7}{12}$, $P(\delta = 2) = \frac{2}{12}$.
d) $P(\delta = 0) = \frac{6}{12}$, $P(\delta = 1) = \frac{2}{12}$, $P(\delta = 2) = \frac{4}{12}$.

36. Az adatok alapján készült táblázat:

$\eta \setminus \xi$	1	2	3
1	p	p	p
2	p	$4p$	p
3	p	p	p

Rögtön adódik, hogy $p = \frac{1}{12}$, és mivel például $P(\xi = 1, \eta = 1) = \frac{1}{12}$, $P(\xi = 1)P(\eta = 1) = \frac{3}{12} \cdot \frac{3}{12}$, ξ és η nem függetlenek. $M(\xi) = M(\eta) = 2$, $M(\xi\eta) = 4$, így kovarianciájuk, következésképp korrelációs együtthatójuk is nulla.

37. A binomiális eloszlás ismeretében a peremeloszlások meghatározása nem nehéz:

$$P(\xi = i) = \sum_{k=0}^{n-i} \frac{n!}{i!k!(n-i-k)!} p_1^i p_2^k (1 - p_1 - p_2)^{n-i-k} = \binom{n}{i} p_1^i (1 - p_1)^{n-i}$$

és $P(\eta = k) = \binom{n}{k} p_2^k (1 - p_2)^{n-k}$. Ebből $M(\xi) = np_1$, $D^2(\xi) = np_1(1 - p_1)$, és $M(\eta) = np_2$, $D^{(}\eta) = np_2(1 - p_2)$. Ha felrajzoljuk $[\xi, \eta]$ együttes eloszlásának táblázatát, látjuk, a nem-nulla valószínűségek háromszög-alakban helyezkednek el. Ezenkívül $\xi\eta$ nulla, akár ξ, akár η nulla. Írjunk $(1 - p_1 - p_2)$ helyett p_3-at, $P(\xi = i, \eta = k)$ helyett p_{ik}-t.

$$M(\xi\eta) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n-k} ikp_{ik} =$$

$$n(n-1)p_1p_2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-k} \frac{(n-2)!}{i!k!(n-i-k)!} p_1^{i-1} p_2^{k-1} p_3^{n-i-k}$$

Ha ezt az összeget átírjuk $j = i - 1$ és $m = k - 1$ jelöléssel, látjuk, hogy a szumma nem más, mint $(p_1 + p_2 + p_3)^{n-2}$, ami eggyel egyenlő, azaz $M(\xi\eta) = n(n-1)p_1p_2$.

$$r(\xi, \eta) = \frac{n(n-1)p_1p_2 - np_1np_2}{\sqrt{np_1(1-p_1)}\sqrt{np_2(1-p_2)}} = -\sqrt{\frac{p_1p_2}{(1-p_1)(1-p_2)}}$$

A negatív korreláció várható volt, hiszen a $0 \le i+k \le n$ egyenlőtlenség miatt az egyik növekedése előbb-utóbb a másik csökkenését vonja maga után.

38. Mivel $P(\xi = i, \eta = k) = \frac{1}{100}$,

$\delta \setminus \gamma$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
1	0.09	0.08	0.07	0.06	0.05	0.04	0.03	0.02	0.01	0

Pl. $P(\delta = 1, \gamma = 9) = 0$ és $P(\delta = 1)P(\gamma = 9) \neq 0$, így nem függetlenek.

39. Nem függetlenek, mert pl.$P(\delta = 8, \gamma = 0) = 0$, $P(\delta = 8)P(\gamma = 0) \neq 0$.

40. a) Legyen $P(A) = p$. Ekkor $P(\xi_i = 1) = p$ és $P(\xi_i = 0) = 1 - p$; $M(\xi_i) = p$ és $D(\xi_i) = \sqrt{p(1-p)}$, $i = 1, 2, \dots$.

b) η épp azt jelenti, az n független kísérlet során A hányszor következett be, így $P(\eta = j) = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$. $M(\eta) = np$, $D^2(\eta) = np(1-p)$.

c) Meg kell határoznunk $\delta = \xi_k \eta$ várható értékét, és ehhez eloszlását. η nem lehet 0, ha ξ_k nem az, így $P(\delta = 0) = P(\xi_k = 0) = 1 - p$, és $j > 0$-ra

$$P(\delta = j) = P(\xi_k = 1, \eta = j) = P(\xi_k = 1, \sum_{i \neq k} \xi_i = j - 1) =$$

$$= p\binom{n-1}{j-1} p^{j-1} (1-p)^{n-1-(j-1)}$$

$$M(\delta) = 0 \cdot (1-p) + \sum_{j=1}^{n} jp\binom{n-1}{j-1} p^{j-1}(1-p)^{n-1-(j-1)} =$$

$$= p\sum_{i=0}^{n-1} (i+1)\binom{n-1}{i} p^i (1-p)^{(n-1)-i} =$$

$$= p\left(\sum_{i=0}^{n-1} i\binom{n-1}{i} p^i (1-p)^{(n-1)-i} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} p^i (1-p)^{(n-1)-i}\right) .$$

A legutóbbi kifejezésben az első szumma egy $n-1$ és p paraméterű binomiális eloszlás várható értéke, tehát $(n-1)p$-vel egyenlő; a második szumma a binomiális tétel (**T 6.9.**) szerint $(p + (1-p))^{n-1} = 1$. Ezek szerint

$$M(\delta) = p((n-1)p + 1) = p^2(n-1) + p .$$

$$r(\xi_k, \eta) = \frac{p^2(n-1) + p - pnp}{\sqrt{p(1-p)}\sqrt{np(1-p)}} = \frac{1}{\sqrt{n}} .$$

41. $\xi_k = 1$, ha a k-ik lövés talált, $\xi_k = 0$, ha nem. A találatok számának várható értéke $m = M(\eta) = M(\sum_{k=1}^{n} \xi_k) = \sum_{k=1}^{n} p_k$. Mivel függetlenek,

$$D^2(\sum_{k=1}^{n} \xi_k) = \sum_{k=1}^{n} D^2(\xi_k) = \sum_{k=1}^{n} p_k(1-p_k) = m - \sum_{k=1}^{n} p_k^2 .$$

Mivel $(\sum_{k=1}^{n} p_k)^2 \le n\sum_{k=1}^{n} p_k^2$, így $D^2(\sum \xi_k) \le m(1 - \frac{m}{n})$, és egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{m}{n}$.

42. $r(\xi,\eta) = 0$, és függetlenek is, mert $P(\xi = 1) = P(A) = \frac{1}{4}$, $P(\xi = 0) = \frac{3}{4}$, $P(\eta = 1) = P(B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(A|B)} = \frac{1}{2}$, $P(\eta = 0) = \frac{1}{2}$;
$P(\xi = 1, \eta = 1) = P(AB) = P(B|A)P(A) = \frac{1}{8} = P(\xi = 1)P(\eta = 1)$,
$P(\xi = 0, \eta = 0) = P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A + B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB) = \frac{3}{8} = P(\xi = 0)P(\eta = 0)$ stb.

43. a) Diszkrét eset: $P(\xi = x_i, \eta = y_j, \delta = z_k) = P(\xi = x_i)P(\eta = y_j)P(\delta = z_k)$. A függetlenség miatt $\gamma = \xi + \eta$ eloszlása (l. a **T 34.7** és **T 34.10** tételt): $P(\gamma = u_n) = \sum_{x_i + y_j = u_n} P(\xi = x_i)P(\eta = y_j)$.

$$P(\delta = z_k, \gamma = u_n) = \sum_{x_i + y_j = u_n} P(\xi = x_i, \eta = y_j, \delta = z_k) =$$

$$= P(\delta = z_k) \sum_{x_i + y_j = u_n} P(\xi = x_i)P(\eta = y_j) = P(\delta = z_k)P(\gamma = u_n)$$

b) Folytonos eset: alkalmazzuk a $\gamma_1 = \xi + \eta$, $\gamma_2 = \eta$, $\gamma_3 = \delta$ transzformációt. Az inverztranszformáció $\xi = \gamma_1 - \gamma_2$, $\eta = \gamma_2$, $\delta = \gamma_3$ és $|J| = 1$. Ekkor a **T 34.11** tétel alapján $f_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}(x, y, z) = f_{\xi,\eta,\delta}(x - y, y, z)|J|$. A függetlenséget figyelembe véve

$$f_{\gamma_1,\gamma_3}(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta,\delta}(x - y, y, z)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x - y)f_\eta(y)f_\delta(z)dy =$$

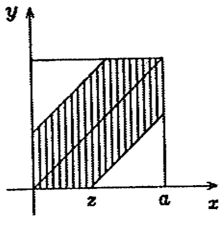
$$= f_\delta(z) \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x - y)f_\eta(y)dy = f_\delta(z)f_{\xi+\eta}(x) .$$

44. Az előző feladatból következik teljes indukcióval. Mindegyik ξ_i független a többi összegétől.

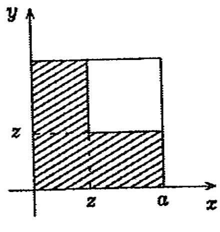
45. Geometriai valószínűséggel számolva az eloszlásfüggvény mindkét esetben

$$F(z) = P(\eta_1 < z) = P(\eta_2 < z) = \begin{cases} 0, & \text{ha } z \le 0 \ , \\ \frac{2az - z^2}{a^2}, & \text{ha } 0 < z \le a \ , \\ 1, & a < z \ . \end{cases}$$

Ld. a) és b) ábra.



a) ábra



b) ábra

46. a) $f_{\xi+\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(t)f_\eta(x - t)dt$. Mivel f_ξ és f_η azonosan nulla az $[a, b]$ intervallumon kívül, az integrálandó függvény csak akkor nem nulla, ha az $a < t < b$ és $a < x - t < b$ egyenlőtlenségek teljesülnek. Ebből – az egyenlőtlenségeket összeadva– következik, hogy $2a < x < 2b$, és ekkor

$f_{\xi+\eta}(x) = \int_{\max(a,x-b)}^{\min(b,x-a)} \frac{1}{(b-a)^2} dt$, ugyanis az egyenlőtlenségeket t-re rendezve $a < t < b$-nek és $b - x < t < x - a$-nak is teljesülnie kell.

$$f_{\xi+\eta} = \begin{cases} \frac{x-2a}{(b-a)^2}, & \text{ha } 2a < x \le a+b \,, \\ \frac{2b-x}{(b-a)^2}, & \text{ha } a+b < x < 2b \,, \\ 0 & \text{különben} \,. \end{cases}$$

b) Tekintsük pl. a $\gamma = \xi - \eta$ és $\delta = \eta$ transzformációt, és alkalmazzuk a **T 34.11** tételt. Ekkor $\xi = \gamma + \delta$, $\eta = \delta$, $|J| = 1$ és $f_{\gamma,\delta}(x,y) = f_{\xi,\eta}(x+y,y)|J| = f_\xi(x+y)f_\eta(y)$. A jobboldal csak akkor nem nulla, ha az $a < y < b$, $a < x + y < b$ egyenlőtlenségek egyszerre teljesülnek. Ezekből az $a - b < x < b - a$, ill. $a < y < b$, $a - x < y < b - x$ határokat nyerjük, azaz $a - b < x < b - a$ esetén $f_\delta(x) = \int_{\max(a,a-x)}^{\min(b,b-x)} \frac{1}{(b-a)^2} dy$.

$$f_\delta(x) = \begin{cases} \frac{b-a+x}{(b-a)^2}, & \text{ha } a-b < x < 0 \,, \\ \frac{b-a-x}{(b-a)^2}, & \text{ha } 0 < x < b-a \,, \\ 0 & \text{különben} \,. \end{cases}$$

c) A **T 34.11** tétel szerint

$$f_{\xi\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|t|} f_\xi(x) f_\eta(\frac{x}{t}) dt \,.$$

Az integrandus csak akkor nem nulla, ha az $a < t < b$ és $a < \frac{x}{t} < b$ egyenlőtlenségek egyszerre teljesülnek. Ebből az $a^2 < x < b^2$ feltételt, ill. az $a < t < b$, $\frac{x}{b} < t < \frac{x}{a}$ határokat nyerjük, azaz $a^2 < x < b^2$ esetén $f_\delta(x) = \int_{\max(a,\frac{x}{b})}^{\min(b,\frac{x}{a})} \frac{1}{t(b-a)^2} dt$.

$$f_\delta(x) = \begin{cases} \frac{\ln \frac{x}{a^2}}{(b-a)^2}, & \text{ha } a^2 < x < ab \,, \\ \frac{\ln \frac{b^2}{x}}{(b-a)^2}, & \text{ha } ab < x < b^2 \,, \\ 0 & \text{különben} \,. \end{cases}$$

d) Tekintsük pl. a $\gamma = \xi$, $\delta = \frac{\xi}{\eta}$ transzformációt. Ekkor $\xi = \gamma$, $\eta = \frac{\gamma}{\delta}$ és $|J| = \frac{\gamma}{\delta^2}$.

$$f_{\delta,\gamma}(x,y) = f_\xi(y) f_\eta(\frac{y}{x})|J| = \begin{cases} \frac{y}{x^2(b-a)^2}, & \text{ha } a < y < b \text{ és } a < \frac{y}{x} < b \,, \\ 0 & \text{különben} \,. \end{cases}$$

Az egyenlőtlenségekből az $\frac{a}{b} < x < \frac{b}{a}$, ill. $a < y < b$, $ax < y < bx$ határokat nyerjük, azaz $\frac{a}{b} < x < \frac{b}{a}$ esetben

$$f_\delta(x) = \int_{\max(a,ax)}^{\min(b,bx)} \frac{y}{x^2(b-a)^2} dy \,.$$

$$f_\delta(x) = \begin{cases} \frac{b^2x^2-a^2}{2x^2(b-a)^2}, & \text{ha } \frac{a}{b} < x < 1 \,, \\ \frac{b^2-a^2x^2}{2x^2(b-a)^2}, & \text{ha } 1 < x < \frac{b}{a} \,, \\ 0 & \text{különben} \,. \end{cases}$$

34.15

A feladatot geometriai valószínűséggel is megoldhatjuk, mert ξ és η függetlenek, és egyenletes eloszlásúak. Ekkor az eloszlásfüggvényeket határozzuk meg, és ezekből deriválással nyerjük a sűrűségfüggvényeket.

47. a) $\delta = \xi + \eta$ esetén $f_\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(t) f_\eta(x-t)dt$, és az integrandus csak akkor különbözik nullától, ha $t > 0$, $x - t > 0$. Ebből $x > 0$ és $0 < t < x$ korlátok adódnak, így $x > 0$ esetben $f_\delta(x) = \int_0^x \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} \lambda_2 e^{-\lambda_2(x-t)} dt$.

$$f_\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0\ , \\ \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}(e^{-\lambda_1 x} - e^{-\lambda_2 x}), & \text{ha } 0 < x\ . \end{cases}$$

b) Az előző feladat b) pontjához hasonlóan: Ha $\delta = \xi - \eta$, akkor $f_\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x+y) f_\eta(y)dy$, ahol az integrandus csak akkor különbözik nullától, ha $0 < x + y$ és $0 < y$. Ebből x-re semmilyen korlátozás nem adódik, de kell, hogy $-x < y$ és $0 < y$ egyszerre teljesüljön. Tehát $f_\delta(x) = \int_{\max(-x,0)}^{\infty} \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_1(x+y)} e^{-\lambda_2 y} dy$.

$$f_\delta(x) = \begin{cases} \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} e^{\lambda_2 x}, & \text{ha } x \le 0\ , \\ \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} e^{-\lambda_1 x}, & \text{ha } x > 0\ . \end{cases}$$

c) Az előző feladat d) pontjához hasonlóan: Ha $\delta = \frac{\xi}{\eta}$, akkor $f_\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(y) f_\eta(\frac{y}{x}) \frac{y}{x^2} dy$, ahol az integrandus csak akkor nem 0, ha $0 < y$, $0 < \frac{y}{x}$. Ebből $x > 0$-ra $f_\delta(x) = \int_0^\infty \frac{\lambda_1\lambda_2}{x^2} y e^{-y(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{x})} dy$.

$$f_\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0\ , \\ \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1 x + \lambda_2)^2}, & \text{ha } 0 < x\ . \end{cases}$$

48. $f_\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(t) f_\eta(x-t)dt$

a) Az integrandus csak akkor nem nulla, ha $2 < t < 4$ és $1 < x - t < 5$ egyszerre teljesül. Ebből a $3 < x < 9$, és $2 < t < 4$, $x - 5 < t < x - 1$ korlátok adódnak, azaz $3 < x < 9$ esetén $f_\delta(x) = \int_{\max(2,x-5)}^{\min(4,x-1)} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} dt$.

$$f_\delta(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x-3), & \text{ha } 3 < x < 5\ , \\ \frac{1}{4}, & \text{ha } 5 < x < 7\ , \\ \frac{1}{8}(9-x), & \text{ha } 7 < x < 9\ , \\ 0 & \text{különben}\ . \end{cases}$$

b) Az integrandus csak akkor nem nulla, ha $0 < t < 2$ és $0 < x - t$ egyszerre teljesül. Ebből $0 < x$ és $0 < t < 2$, $t < x$ adódik, így $0 < x$ esetén $f_\delta(x) = \int_0^{\min(2,x)} \frac{1}{2} \cdot 0.5 e^{-0.5(x-t)} dt$.

$$f_\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0\ , \\ \frac{1-e^{-\frac{x}{2}}}{2}, & \text{ha } 0 < x \le 2\ , \\ \frac{e^{-\frac{x}{2}}(e-1)}{2}, & \text{ha } 2 < x\ . \end{cases}$$

49.

$$F_{\xi,\eta}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(s)ds \int_{-\infty}^{y} f_\eta(t)dt = \begin{cases} 0, & \text{ha } y \le 0\ , \\ \frac{1}{\pi}(\text{arctg } x + \frac{\pi}{2})y^2, & \text{ha } 0 < y \le 1\ , \\ \frac{1}{\pi}(\text{arctg } x + \frac{\pi}{2}), & 1 < y\ . \end{cases}$$

Mivel $\xi+\eta$ bármilyen értéket felvehet, összegük sűrűségfüggvénye

$$f_{\xi+\eta}(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x-t)f_\eta(t)dt=\int_0^1 \frac{2t}{(x-t)^2+1}dt=$$

$$=\ln\frac{1+(1-x)^2}{x^2+1}+2x(\operatorname{arctg}(1-x)+\operatorname{arctg}\ x)$$

Megjegyzés: $F_{\xi+\eta}(x)$ meghatározása sem nehéz (parciális integrálással és L'Hospital szabállyal), csak igen hosszadalmas.

50. $f_\delta(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|t|}f_{\xi,\eta}(t,\frac{x}{t})dt$, és az integrandus csak akkor nem nulla, ha $1<t$ és $\frac{x}{t}>0$. Így $x>0$ esetben

$$f_\delta(x)=\int_1^\infty e^{-t^2x}dt=\frac{\sqrt{2\pi}\sqrt{2x}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2x}}\int_1^\infty e^{-\frac{t^2}{2(\frac{1}{\sqrt{2x}})^2}}dt=2\sqrt{\pi x}\left(1-\Phi\left(\frac{1-0}{\frac{1}{\sqrt{2x}}}\right)\right).$$

$$f_\delta(x)=\begin{cases}0, & \text{ha } x\le 0\,,\\ 2\sqrt{\pi x}(1-\Phi(\sqrt{2x})), & \text{ha } 0<x\,.\end{cases}$$

51. Az összeg sűrűségfüggvényének számításakor az együttes sűrűségfüggvényben x és y helyébe t-t, ill. $x-t$-t kell írnunk, ezért a korlátokat x-re és t-re a $-1<t<1$ és $-1<x-t<1$ egyenlőtlenségekből kapjuk. Ha tehát $-2<x<2$, akkor
$f_{\xi+\eta}(x)=\int_{\max(x-1,-1)}^{\min(x+1,1)} f(t,x-t)dt$.

$$f_{\xi+\eta}(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}(2+x), & \text{ha } -2\le x\le 0\,,\\ \frac{1}{4}(2-x), & \text{ha } 0<x\le 2\,,\\ 0 & \text{különben}\,.\end{cases}$$

52. a)

$$f_\tau(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{4\pi}e^{-\frac{t^2-2t(x-t)+3(x-t)^2}{4}}dt=\frac{\sqrt{2}e^{-\frac{x^2}{12}}}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(t-\frac{2}{3}x)^2}{2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}}dt\,.$$

Mivel

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(t-\frac{2}{3}x)^2}{2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}}dt=1\,,\qquad f_\tau(x)=\frac{1}{2\sqrt{3\pi}}e^{-\frac{x^2}{12}}\,.$$

b)

$$f_\xi(x)=\frac{\sqrt{2}}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2-2xy+3y^2}{4}}dy=\frac{\sqrt{2}}{4\pi}e^{-\frac{x^2}{6}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(y-\frac{1}{3}x)^2}{2\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2}}dy=\frac{1}{\sqrt{6\pi}}e^{-\frac{x^2}{6}}\,,$$

$$f_\eta(y)=\frac{\sqrt{2}}{4\pi}e^{-\frac{y^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-y)^2}{2(\sqrt{2})^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}\,.$$

$f_{\xi,\eta}(x,y) \neq f_\xi(x)f_\eta(y)$, tehát nem függetlenek.

53. Mivel $f_{\xi+\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(t)f_\eta(x-t)dt$

a)

$$f_{\xi+\eta}(x) = \frac{1}{\sigma^2 2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{(x-t-m)^2}{2\sigma^2}}dt =$$

$$= \frac{1}{\sigma^2 2\pi} e^{-\frac{(x-2m)^2}{4\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-\frac{x}{2})^2}{2\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2}} dt = \frac{1}{\sigma 2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x-2m)^2}{2(\sqrt{2}\sigma)^2}}$$

b)

$$f_{\xi+\eta}(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-m_1)^2}{2\sigma_1^2}} e^{-\frac{(x-t-m_2)^2}{2\sigma_2^2}} dt$$

Elvégezzük a kijelölt műveleteket, a t-től független tényezőt kiemeljük az integrál elé, az integrál mögött pedig olyan alakot írunk, hogy felismerhető legyen egy normális eloszlás sűrűségfüggvénye. A **T 10.18** tételben bevezetett jelöléssel az összeg sűrűségfüggvénye:

$$\frac{\exp\left(-\frac{(x-(m_1+m_2))^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right)}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{\left(t-\frac{\sigma_2^2 m_1-\sigma_1^2 m_2+\sigma_1^2 x}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^2}{2\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\right)dt\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} e^{-\frac{(x-(m_1+m_2))^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} .$$

Azaz két független normális eloszlású valószínűségi változó összege szintén normális eloszlású. A várható érték és szórás értéke a **T 34.12** és **T 34.14** tételekből is következik.

54.

$$P(\xi+\eta=k) = \sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1^i}{i!}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!}e^{-\lambda_2} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda_1^i\lambda_2^{k-i} =$$

$$= \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} .$$

Megjegyzés. Látjuk, hogy független Poisson-eloszlású valószínűségi változókat nyugodtan "össze lehet adni", azaz pl. ha egy könyv lapjain előforduló hibaszámok független, Poisson-eloszlású valószínűségi változók 1.5 várható értékkel, akkor a hibák száma tíz oldalon is Poisson-eloszlású lesz, 15 várható értékkel. De Poisson-eloszlású változót "felosztani" csak bizonyos feltételekkel lehet, l. az előző fejezetben a "Fontosabb eloszlástípusok" rész bevezetőjében az **M 33.36** megjegyzés 1) pontjának utolsó bekezdését.

55. Első megoldás. A **44.** feladat alapján teljes indukcióval bizonyítunk.

I. $n=1$ esetén az állítás triviális.

II. Tegyük fel, hogy $n \geq 2$, és $(n-1)$-re az állítás igaz, azaz $\delta_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1}\xi_i$

esetén $f_{\delta_{n-1}}(x) = \lambda^{n-1}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}e^{-\lambda x}$, ha $x > 0$. Ekkor a függetlenség miatt, és (a T 34.11 tétel szerint) az együttes sűrűségfüggvényből adódó $t > 0$, $x - t > 0$ határok miatt $x > 0$ esetén

$$f_{\delta_n}(x) = \int_0^x \lambda^{n-1}\frac{t^{n-2}}{(n-2)!}e^{-\lambda t}\lambda e^{-\lambda(x-t)}dt = \lambda^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x} .$$

Második megoldás. Az állítást közvetlenül is beláthatjuk, ha a t 34.11 tételt a $\delta_1 = \sum_{i=1}^n \xi_i$, $\delta_2 = \xi_2$, ... ,$\delta_n = \xi_n$ transzformációval alkalmazzuk. Az inverz transzformáció $\xi_1 = \delta_1 - \sum_{i=2}^n \delta_i$, $\xi_2 = \delta_2$, ... , és így $|J| = 1$. Ha $x > 0$:

$$f_{\delta_1}(x) = \int_0^x \int_0^{x-t_2} \dots \int_0^{x-t_2-\dots-t_{n-1}} \lambda^n e^{-\lambda t_2}e^{-\lambda t_3}\dots e^{-\lambda t_n}e^{-\lambda(x-\sum_{i=2}^n t_i)}dt_n dt_{n-1}\dots dt_2 =$$

$$= \lambda^n e^{-\lambda x}\int_0^x \int_0^{x-t_2} \dots \int_0^{x-t_2-\dots-t_{n-1}} 1 dt_n dt_{n-1}\dots dt_2 = \lambda^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x} .$$

56. a) Jelöljük δ értékeit z_k-val, $k = 1, 2 \dots$

$$M(\delta) = \sum_k z_k \sum_{\substack{i,j \\ r(x_i,y_j)=z_k}} P(\xi = x_i, \eta = y_j) = \sum_{i,j} r(x_i, y_j)P(\xi = x_i, \eta = y_j) ,$$

hiszen középen a szummában az összes k-hoz tartozó összes i, j indexpár szerepel.
Speciálisan: $M(\xi\eta) = \sum_{i,j} x_i y_j P(\xi = x_i \eta = y_j)$.

b) Legyen ξ és η együttes sűrűségfüggvénye f; legyenek az $y_1 = r_1(x_1, x_2)$, $y_2 = r_2(x_1, x_2)$ függvények olyanok, amelyek eleget tesznek a tétel követelményeinek. Legyenek az inverz függvények $x_1 = h_1(y_1, y_2)$, $x_2 = h_2(y_1, y_2)$, és Jacobi determinánsuk abszolútértéke $|J|$.
Legyen $\delta_1 = r_1(\xi, \eta)$ és $\delta_2 = r_2(\xi, \eta)$. Azt akarjuk belátni, hogy pl. $M(\delta_1) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} r_1(x_1, x_2)f(x_1, x_2)dx_2dx_1$. Alakítsuk át az integrált a T 16... tétel alapján, amikor is dx_2dx_1 helyébe $|J|dy_2dy_1$ kerül:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} r_1(x_1, x_2)f(x_1, x_2)dx_2dx_1 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y_1 f(h_1(y_1, y_2), h_2(y_1, y_2))|J|dy_2dy_1$$

A T 34.11 tétel alapján az $f(h_1(y_1, y_2), h_2(y_1, y_2))|J|$ függvény δ_1 és δ_2 együttes sűrűségfüggvénye, és $\int_{-\infty}^{\infty} f(h_1, h_2)|J|dy_2$ a δ_1 peremsűrűségfüggvénye, így

$$\int_{-\infty}^{\infty} y_1 \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(h_1, h_2)|J|dy_2\right) dy_1 = M(\delta_1)$$

Speciálisan:

$$M(\xi\eta) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_{\xi,\eta}(x, y)dxdy$$

57. a) Mivel f úgy bontható változói függvényeinek szorzatára, hogy azok valamennyien sűrűségfüggvények, a ξ_i-k függetlenek. Így

$$f_{\xi_i}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}, & \text{ha } 0 < x. \end{cases}$$

b) Első megoldás. A T 34.13 tétel alapján mivel η független valószínűségi változók szorzata $M(\eta) = \frac{1}{\lambda_1\lambda_2...\lambda_n}$.
Második megoldás. Az előző feladatban bebizonyított tétel alapján dolgozzunk a $\delta_1 = \xi_1\xi_2...\xi_n$, $\delta_2 = \xi_2$, ... , $\delta_n = \xi_n$ transzformációval. Az inverz transzformáció $\xi_1 = \frac{\delta_1}{\delta_2\delta_3...\delta_n}$, $\xi_2 = \delta_2$, ... , $\xi_n = \delta_n$. A parciális deriváltakból készített mátrix az első sortól eltekintve egységmátrix, így $|J| = |\frac{\partial \xi_1}{\partial \delta_1}| = \frac{1}{\delta_2\delta_3...\delta_n} \neq 0$.

$$M(\delta_1) = \int_0^\infty \int_0^\infty ... \int_0^\infty t_1 t_2 ... t_n \lambda_1\lambda_2...\lambda_n e^{-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2 - ... - \lambda_n t_n} dt_n ... dt_1$$

Ez $\int_0^\infty t_i \lambda_i e^{-\lambda_i t_i} dt_i$ alakú integrálok szorzatára esik szét, amelyek rendre $\frac{1}{\lambda_i}$-vel egyenlők. Tehát $M(\delta_1) = M(\eta) = \frac{1}{\lambda_1\lambda_2...\lambda_n}$.

58. A két vevő érkezése között eltelt idő sűrűségfüggvénye $\frac{1}{m}e^{-\frac{1}{m}x}$, ha $x > 0$. Jelölje ξ_1 a megfigyelés kezdetétől az első vevő érkezéséig eltelt időt, ξ_2 az első és második közöttit, stb. Jelölje δ az időegység alatt a kúthoz érkezők számát, és legyen $\eta_i = \sum_{j=1}^{i} \xi_j$. Ekkor

$$P(\delta = k) = P(\eta_k \leq 1, \eta_{k+1} > 1) \ .$$

Sajnos nem ismerjük a $\eta_k = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_k$ és $\eta_{k+1} = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_{k+1}$ valószínűségi változók együttes eloszlását, és ezek nyilván nem függetlenek, hiszen η_k értékénél η_{k+1} csak nagyobb lehet. Tekintsük a [0,1] intervallum egy $0 = x_0 < x_1 < ... < x_n = 1$ beosztását, és tekintsük az $I_j = [x_{j-1}, x_j)$ részintervallumot. A feltételes valószínűség definíciója szerint

$$P(\eta_{k+1} > 1, \eta_k \in I_j) = P(\eta_{k+1} > 1 | \eta_k \in I_j) P(\eta_k \in I_j) \ .$$

Mivel $\eta_{k+1} - \eta_k = \xi_{k+1}$, és a $P(\xi_{k+1} \in A)$ valószínűség az A halmaz mértékének monoton növekvő függvénye, továbbá ha $\eta_k \in I_j$, akkor $x_{j-1} \leq \eta_k < x_j$, fennáll a

$$P(\xi_{k+1} > 1 - x_{j-1}) \leq P(\eta_{k+1} > 1 | \eta_k \in I_j) \leq P(\xi_{k+1} > 1 - x_j)$$

egyenlőtlenség. Minden tagot $P(\eta_k \in I_j)$-vel beszorozva, és az egymást kizáró I_j intervallumokra összegezve:

$$(*) \quad \sum_{j=1}^{n} P(\xi_{k+1} > 1 - x_{j-1}) P(\eta_k \in I_j) \ \leq \ P(\eta_k < 1, \eta_{k+1} > 1) \ \leq$$

$$\leq \ \sum_{j=1}^{n} P(\xi_{k+1} > 1 - x_j) P(\eta_k \in I_j) \ .$$

A bal oldal

$$\sum_{j=1}^{n} (1 - F_{\xi_{k+1}}(1 - x_{j-1})) \left(\frac{F_{\eta_k}(x_j) - F_{\eta_k}(x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}} \right) (x_j - x_{j-1})$$

alakba írható, és ez a Lagrange-féle középértéktétel (T 9.14) miatt egy közelítő összege az $\int_0^1 (1 - F_{\xi_{k+1}}(1 - x)) f_{\eta_k}(x)dx$ integrálnak. Ugyanez igaz (*) jobb oldalára is. Az η_k valószínűségi változó k db exponenciális, azonos eloszlású, független valószínűségi változó összege, melynek sűrűségfüggvényét az **55.** feladatban adtuk meg. Így

$$P(\delta = k) = \int_0^1 \left(1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{m}(1-x)}\right)\right) \left(\frac{1}{m}\right)^k \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\frac{1}{m}x} dx = \frac{\left(\frac{1}{m}\right)^k}{k!} e^{-\frac{1}{m}} .$$

59. Jelölje az első égő élettartamát ξ_1, a másodikét ξ_2; ezek függetlenek. Ekkor $\eta = \xi_1 + \xi_2$.

a) Ha $x \le 0$, $f_\eta(x) = 0$. Ha $x > 0$:

$$f_\eta(x) = \int_0^x \lambda^2 e^{-\lambda s} e^{-\lambda(x-s)} ds = \lambda^2 x e^{-\lambda x} .$$

(Ezt az eredményt az **55.** feladatból közvetlenül is megkaphatjuk.)

b) Ha $x \le 0$, $f_\eta(x) = 0$. Ha $x > 0$

$$f_\eta(x) = \int_0^x \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_1 s} e^{-\lambda_2(x-s)} ds = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(e^{-\lambda_1 x} - e^{-\lambda_2 x}\right)$$

(Ez az eredmény a **47.** feladatból közvetlenül is adódik.)

60. Az egyes égők élettartama független. Ha $x \le 0$, $f_\eta(x) = 0$. Ha $x > 0$:

$$f_\eta(x) = \int_0^x \int_0^{x-t_1} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 e^{-\lambda_1 t_1} e^{-\lambda_2 t_2} e^{-\lambda_3(x-t_1-t_2)} dt_2 dt_1 =$$

$$= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \left[\frac{e^{-\lambda_1 x}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} + \frac{e^{-\lambda_2 x}}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_1)} + \frac{e^{-\lambda_3 x}}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}\right] .$$

Mivel a harmadik égő élettartama független az első kettő összegétől, az előző feladat b) pontjának eredményéből is kiindulhatunk.

61. Nem lesz várakozó, ha kiszolgálásunk három perce alatt nem érkezik még két vevő.
Első megoldás. Jelentse η a mi érkezésünktől a második vevő érkezéséig eltelt időt. Ennek sűrűségfüggvénye az **55.** feladat alapján $\frac{1}{4} x e^{-\frac{x}{2}}$. Így $P(\eta > 3) = \int_3^\infty f_\eta(x)dx = \frac{5}{2} e^{-\frac{3}{2}}$.
Második megoldás. Tudjuk, hogy ha két vevő érkezése között eltelt idő exponenciális eloszlású, akkor az adott idő alatt a büfébe érkezők száma Poisson-eloszlású, jelen esetben egy percre $\frac{1}{2}$, három percre $\frac{3}{2}$ várható értékkel (l. az **54.** és az **58.** feladatot). Nem érkezik két vevő, ha legfeljebb egy érkezik. Jelentse ξ az érkező vevők számát. $P(\xi = 0) + P(\xi = 1) = e^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} e^{-\frac{3}{2}}$.

62. Ekkor adott időtartam alatt az üzletbe érkezők száma Poisson eloszlást követ, $\frac{1}{0.5} = 2$ paraméterrel egy percre, és $5 \cdot 2$ paraméterrel 5 percre (l. az **54.** és az **58.** feladatot). $p = \frac{2^8}{8!} e^{-2} \cdot \frac{10^0}{0!} e^{-10} = \frac{2^8}{8!} e^{-12}$

63. a)

$$f_\xi(x)=\begin{cases}\frac{6}{5}(x+\frac{1}{3}), & \text{ha } 0<x<1\,,\\ 0 & \text{különben}\,,\end{cases}\quad f_\eta(y)=\begin{cases}\frac{6}{5}(\frac{1}{2}+y^2), & \text{ha } 0<y<1\,,\\ 0 & \text{különben}\,.\end{cases}$$

b) $M(\xi)=\frac{3}{5}$, $M(\xi^2)=\frac{13}{30}$, $M(\eta)=\frac{3}{5}$, $M(\eta^2)=\frac{11}{25}$, $D(\xi)=\sqrt{\frac{11}{150}}$, $D(\eta)=\sqrt{\frac{2}{25}}$. Az $M(\xi\eta)$-t kétféleképpen is meghatározhatjuk. Felírhatjuk $\delta=\xi\eta$ sűrűségfüggvényét a **T 34.11** tétel alapján: ha $0<x<1$ akkor a $0<\frac{x}{t}<1$ és $0<t<1$ határokat is figyelembe véve, $f_\delta(x)=\int_x^1\frac{6}{5}\frac{\frac{x}{t}+t^2}{t}dt$. Egyszerűbb azonban az **56.** feladat b) részének eredményét felhasználva számolni:

$$M(\xi\eta)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^1\frac{6}{5}xy(x+y^2)dxdy=\frac{7}{20}\,.$$

$$r(\xi,\eta)=\frac{M(\xi\eta)-M(\xi)M(\eta)}{D(\xi)D(\eta)}=-\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{11}}\,.$$

64.

$$f_\xi(x)=\begin{cases}2(1-x), & \text{ha } 0<x<1\,,\\ 0 & \text{különben}\,,\end{cases}\quad f_\eta(y)=\begin{cases}1-\frac{1}{2}y, & \text{ha } 0<y<2\,,\\ 0 & \text{különben}\,.\end{cases}$$

$M(\xi)=\frac{1}{3}$, $D(\xi)=\frac{1}{\sqrt{18}}$, $M(\eta)=\frac{2}{3}$, $D(\eta)=\frac{\sqrt{2}}{3}$,

$M(\xi\eta)=\int_0^1\int_0^{2(1-x)}xy\cdot 1\,dydx=\frac{1}{6}$, $\quad r(\xi,\eta)=-\frac{1}{2}\,.$

65.

$$f_\xi(x)=\begin{cases}0, & \text{ha } x\le 0\,,\\ 3e^{-3x}, & \text{ha } x>0\,,\end{cases}\quad f_\eta(y)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & \text{ha } 1<y<4\,,\\ 0 & \text{különben}\,.\end{cases}$$

Mivel nyilvánvalóan függetlenek, és szórásuk létezik (ξ exponenciális, η egyenletes eloszlású), $r(\xi,\eta)=0$.

66. a)

$$f_\xi(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(y-\frac{1}{2}x)^2}{2(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}}e^{-\frac{x^2}{4}}dy=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{4}}$$

ezért $M(\xi)=0$.

$$f_\eta(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-y)^2}{2}}e^{-\frac{y^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$$

ezért $M(\eta)=0$.

$$M(\xi\eta)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xye^{-\frac{x^2-2xy+2y^2}{2}}dxdy=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-y)^2}{2}}dxdy\,.$$

Az x szerinti integrál egy $N(y,1)$ eloszlású valószínűségi változó várható értéke, vagyis y.

$$M(\xi\eta)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y^2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy=1\,.$$

Tehát $c(\xi,\eta) = 1$

b) Kovarianciájuk nem nulla, nem lehetnek függetlenek. (Ez következik már abból is, hogy $f_{\xi,\eta}(x,y) \neq f_\xi(x)f_\eta(y)$, sőt minden számolás nélkül a D 34.9 végén tett megjegyzésből is.)

67. Tudjuk, hogy $F_{\xi,\eta}(x,y) = F_\xi(x)F_\eta(y)$. Ha $x \leq 0$ vagy $y \leq 0$, akkor

$$F_{\xi^2,\eta^2}(x,y) = P(\xi^2 < x, \eta^2 < y) = F_{\xi^2}(x)F_{\eta^2}(y) = 0$$

nyilvánvaló. Ha $x > 0$ és $y > 0$, akkor a 9. feladatban igazolt egyenlőséget is felhasználva:

$$F_{\xi^2,\eta^2}(x,y) = P(\xi^2 < x, \eta^2 < y) = P(-\sqrt{x} < \xi\sqrt{x}, -\sqrt{y} < \eta < \sqrt{y}) =$$
$$= F_{\xi,\eta}(-\sqrt{x},-\sqrt{y}) + F_{\xi,\eta}(\sqrt{x},\sqrt{y}) - F_{\xi,\eta}(-\sqrt{x},\sqrt{y}) - F_{\xi,\eta}(\sqrt{x},-\sqrt{y}) =$$
$$= F_\xi(-\sqrt{x})F_\eta(-\sqrt{y}) + F_\xi(\sqrt{x})F_\eta(\sqrt{y}) - F_\xi(-\sqrt{x})F_\eta(\sqrt{y}) - F_\xi(\sqrt{x})F_\eta(-\sqrt{y}) =$$
$$= (F_\xi(\sqrt{x}) - F_\xi(-\sqrt{x}))(F_\eta(\sqrt{y}) - F_\eta(\sqrt{y})) = P(\xi^2 < x)P(\eta^2 < y) = F_{\xi^2}(x)F_{\eta^2}(y) .$$

68. Az előző feladat állítását felhasználva és a T 34.19 tételt alkalmazva $D^2(\xi\eta) = M((\xi\eta)^2) - M^2(\xi\eta) = M(\xi^2)M(\eta^2) - M^2(\xi)M^2(\eta)$.
Ha a jobboldalon is mindent várható értékkel fejezünk ki, az egyenlőség adódik.

69. A szórás definíciójából és a T 34.12 tételből

$$D^2(\xi+\eta) = M((\xi+\eta)^2) - M^2(\xi+\eta) = D^2(\xi) + D^2(\eta) + 2[M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta)].$$

A korrelációs együttható definíciójából adódik, hogy
$M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta) = D(\xi)D(\eta)r(\xi,\eta)$.

70. A T 34.12-14 tételek alapján

$$r(\tau_1,\zeta) = \frac{M((\xi+\zeta)\zeta) - M(\xi+\zeta)M(\zeta)}{D(\xi+\zeta)D(\zeta)} =$$
$$= \frac{M(\xi\zeta) + M(\zeta^2) - M(\xi)M(\zeta) - M^2(\zeta)}{\sqrt{D^2(\xi) + D^2(\zeta)}D(\zeta)} = \frac{D^2(\zeta)}{\sqrt{2D^2(\zeta)}D(\zeta)} = \frac{1}{\sqrt{2}} .$$

Hasonlóan igazolható a többi állítás is.

71. A T 33.12 és T 33.15 tételek alapján

$$r(\tau_1,\tau_2) = \frac{M((1-\xi)(\eta-1)) - M(1-\xi)M(\eta-1)}{D(1-\xi)D(\eta-1)} = -r(\xi,\eta) = -\frac{1}{2} .$$

72. $M(\zeta_1) = M(\zeta_2) = 0$, és $D(\zeta_1) = D(\zeta_2) = 1$ a T 33.12 és a T 33.15 tételek alapján.

$$r(\zeta_1,\zeta_2) = \frac{M(\zeta_1\zeta_2) - M(\zeta_1)M(\zeta_2)}{D(\zeta_1)D(\zeta_2)} = M(\zeta_1\zeta_2)$$

73. Egyszerű számolással adódik, hogy (T 33.12, T 33.15)

$$r(\zeta_1,\zeta_2) = \frac{ac}{|a||c|}\frac{M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta)}{D(\xi)D(\eta)} = r(\xi,\eta)\cdot \operatorname{sgn} ac .$$

74. $M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) = \int_{-1}^{1} \frac{2}{\pi} x\sqrt{1-x^2}dx = 0$ és $M(\eta)$ is létezik (történetesen az is nulla).

$$M(\xi\eta) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_{\xi,\eta}(x,y)dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{xy}{\pi}dydx = 0 \ .$$

75. Jelöljük x_i-vel az i-edik mérés eredményét. Az a célunk, hogy n-et olyannak válasszuk, hogy

$$P(|\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} - d| < 0.5) \geq 0.95$$

legyen. $M(\sum_{i=1}^n x_i) = nd$, és mivel a mérések függetlenek, $D(\sum_{i=1}^n x_i) = 2\sqrt{n}$. Becsülhetjük n-et a Csebisev egyenlőtlenséggel:

$$P(|\sum_{i=1}^n x_i \ - nd| \geq 0.5n) \leq \frac{4n}{n^2 0.5^2} \ ,$$

amiből n-re a $\frac{4n}{n^2 0.5^2} < 0.05$ becslés adódik, azaz $n \geq 320$.
Ha a $z = \frac{\sum_{i=1}^n x_i - nd}{2\sqrt{n}}$ értéket a centrális határeloszlástétel (**T 34.15**) alapján megközelítőleg standard normális eloszlásúnak tekintjük, akkor a feladat követelményéből:

$$0.95 \leq P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} - d\right| < 0.5\right) = P\left(\frac{|\sum_{i=1}^n x_i \ - nd|}{2\sqrt{n}} < \frac{0.5n}{2\sqrt{n}}\right) =$$

$$= P(|z| < 0.25\sqrt{n}) = \Phi(0.25\sqrt{n}) - \Phi(-0.25\sqrt{n}) = 2\Phi(0.25\sqrt{n}) - 1 \ ,$$

azaz $\Phi(0.25\sqrt{n}) \geq 0.975$, amiből $0.25\sqrt{n} > 1.96$, $n \geq 62$.
Látjuk, ha van valami elképzelésünk egy valószínűségi változó eloszlásáról, jobb azt kihasználni, mert a Csebisev egyenlőtlenség elég durva becslést ad. Ha $n \geq 62$, akkor z valóban elég jól közelíti $N(0,1)$-et.

76. Az utasok súlya egymástól függetlennek tekinthető. Ezért, ha x_i-vel jelöljük az egyes személyek súlyát és y-nal a teherbírást, a centrális határeloszlástétel alapján

$$P(\sum_{i=1}^n x_i \ < y) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i \ - 150\cdot 700}{100\sqrt{150}} < \frac{y - 150\cdot 700}{100\sqrt{150}}\right) \approx$$

$$\approx \Phi\left(\frac{y - 150\cdot 700}{100\sqrt{150}}\right) \geq 0.995$$

követelmény adódik. Ebből $\frac{y-105000}{100\sqrt{150}} \geq 2.58$ azaz $y \geq 108160 \ N$.

77. Egy kis doboz bruttó tömegének várható értéke 1.05 kg, és mivel az áru tömege feltételezhetően független a doboz tömegétől, a szórása a **T 34.14** tétel szerint $\sqrt{\sigma^2 + 0.005^2}$, ahol σ a keresett szórás. A centrális határeloszlástétellel

$$P\left(61.5 \leq \sum_{i=1}^{60} x_i \leq 64.5\right) =$$

$$= P\left(\frac{61.5-60\cdot 1.05}{\sqrt{60\sigma^2+60\cdot 0.005^2}} \le \frac{\sum_{i=1}^{60} x_i - 60\cdot 1.05}{\sqrt{60\sigma^2+60\cdot 0.005^2}} \le \frac{64.5-60\cdot 1.05}{\sqrt{60\sigma^2+60\cdot 0.005^2}}\right) \approx$$

$$\approx \Phi\left(\frac{1.5}{\sqrt{60\sigma^2+0.0015}}\right) - \Phi\left(-\frac{1.5}{\sqrt{60\sigma^2+0.0015}}\right) \ge 0.99 .$$

Ebből $\frac{1.5}{\sqrt{60\sigma^2+0.0015}} \ge 2.576$, vagyis $\sigma \le 0.075$.

78. Az egy kocsi által elfoglalt hossz várható értéke 4.7 m, szórása pedig mivel az autók hossza és az előttük állótól való távolságuk feltételezhetően független, $\sqrt{0.26}$. Jelölje η az egy oszlopba beférő kocsik számát. Számítsuk ki ennek várható értékét!

$$P(\eta \le 9) = P\left(\sum_{i=1}^{10} x_i > 55\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{10} x_i - 10\cdot 4.7}{\sqrt{10\cdot 0.26}} > \frac{55-10\cdot 4.7}{\sqrt{10\cdot 0.26}}\right) \approx$$

$$\approx 1-\Phi(4.9614) \approx 0.0000 ,$$

$$P(\eta \le 10) = P\left(\sum_{i=1}^{11} x_i > 55\right) \approx 1-\Phi(1.9513) \approx 0.02551 ,$$

$$P(\eta \le 11) = \Phi(0.79259) \approx 0.78599 , \quad P(\eta \le 12) \approx \Phi(3.3179) \approx 0.99955 ,$$

$$P(\eta \le 13) \approx \Phi(5.7) \approx 1 .$$

$$P(\eta = 10) \approx 0.02551 , \quad P(\eta = 11) \approx 0.76048 ,$$

$$P(\eta = 12) \approx 0.21356 , \quad P(\eta = 13) \approx 0.00045 .$$

Az egy oszlopba férők várható értéke $M(\eta) = 11.189$. A nyolc oszlopba így várhatóan 89.512 kocsi fér, így nagyobb a valószínűsége annak, hogy elmegyünk az első fordulóval, mint annak, hogy nem. (Ugyanis, ha egy valószínűségi változó a várható értékét 0 valószínűséggel veszi fel, akkor 0.5 valószínűséggel lesz annál kisebb, és 0.5 valószínűséggel lesz nagyobb). Vegyük észre, hogy az egy oszlopba férők várható értéke nem egyszerűen $55/4.7 \approx 11.702$, hiszen a kocsioszlop hossza lehet rövidebb, mint 55 m, de hosszabb soha.

79. Jelöljük x_i-vel az egy-egy fordulónként elfogyasztott benzint, és y-nal a tervezendő mennyiséget. Feltéve, hogy a benzinfogyasztás fordulónként független, a centrális határeloszlástétel alapján a feladat követelménye:

$$P\left(\sum_{i=1}^{200} x_i < y\right) = P(\left(\frac{\sum x_i - 200\cdot 30}{3\sqrt{200}} < \frac{y-200\cdot 30}{3\sqrt{200}}\right) \approx \Phi\left(\frac{y-6000}{30\sqrt{2}}\right) \ge 0.99 .$$

Ebből $\frac{y-6000}{30\sqrt{2}} \ge 2.33$, így $y \ge 6099$, azaz 6099 l benzin elegendő.

80. Ha ξ_i-vel jelöljük az i-edik generálásnál kapott számot, akkor $M(\xi_i) = \frac{1}{2}$ és $D(\xi_i) = \frac{1}{\sqrt{12}}$ minden i-re.

$$P\left(\frac{\xi_1 + \dots + \xi_{120000} - 120000\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{12}}\sqrt{120000}} < x\right) \approx \Phi(x) .$$

Ezért

$$P\begin{pmatrix}\xi_1+\ldots+\xi_{120000}< \\ <59900\end{pmatrix}=P\left(\frac{\xi_1+\ldots+\xi_{120000}-60000}{100}<\frac{59900-60000}{100}\right)\approx$$

$$\approx\Phi(-1)=1-\Phi(1)\approx 0.15866\,.$$

81. a) Legyenek a ξ_i $(i=1,2,\ldots)$ valószínűségi változók a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlásúak, ekkor várható értékük $\frac{1}{2}$, szórásuk $\frac{1}{\sqrt{12}}$. A $\sum_{i=1}^{12}\xi_i-6$ valószínűségi változó várható értéke 0, szórása 1, ezért az $\eta 0,1=\sum_{i=1}^{12}\xi_i-6$ választás megfelelő. A gyakorlatban legtöbbször meg is szoktak elégedni azzal, hogy 12 db változó összegét számítják. Ha ennél többet akarunk, az

$$\eta_{0,1}=\frac{(2\sum_{i=1}^{n}\xi_i\ -\ n)\sqrt{3}}{\sqrt{n}}$$

formulát használjuk. Az $\eta_{0,1}$-ből tetszőleges m várható értékű és σ szórású valószínűségi változót az $\eta_{m,\sigma}=\sigma\eta_{0,1}+m$ képlettel állítunk elő.
A következő program egy E várható értékű, S szórású normális eloszlású valószínűségi változó K db értékét állítja elő, egyenként N db szám összegével. Az eredményt a Z nevű tömbbe helyezi .
Bemenő paraméterek: K, E, S, N .

```
BEGIN
  RANDOMIZE;
  READ(K); READR(E); READR(S); READ(N);
  FOR j:=1 TO K DO
    b:=0.0;
    FOR i:=1 TO N DO
      x:=RAND();
      b:=b+x;
      END;
    b:=(2.0*b-REAL(N))*SQRT(3.0)/SQRT(REAL(N));
    b:=S*b+E;
    WRITER(b);
    END;
END p12.
```

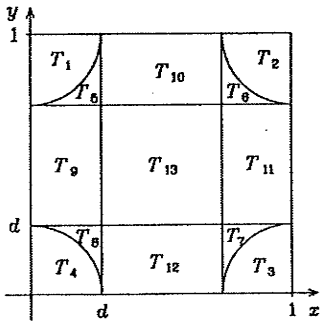
a) ábra

b) Ezt a feladatot az **58.** feladat alapján oldjuk meg. $\frac{1}{\lambda}$ várható értékű exponenciális eloszlású valószínűségi változók összegét számítjuk, amíg meg nem haladjuk az 1-et. Ha a j-edikkel haladtuk meg, $\xi=j-1$. A λ várható értékű Poisson-eloszlású valószínűségi változónak K db értékét állítjuk elő, de egyik érték sem lehet N-nél nagyobb. Az eredményt a Z nevű tömbben helyezzük el.
Bemenő paraméterek: K, λ, N .

```
BEGIN
  RANDOMIZE;
  READ(K); READR(L); READ(N);
  FOR j:=1 TO N DO
    b:=0.0;
    i:=1;
    REPEAT
      x:=RAND();
      b:=b-LN(1.0-x)/L;
      IF b>1.0 THEN M:=i-1; ELSE i:=i+1; END;
      UNTIL (i>K) OR (b>1.0);
    IF (b<=1.0) THEN M:=K; END;
    WRITE(M);
    END;
END p13.
```

b) ábra

82. Helyezzük el a négyzetet a koordinátarendszerben úgy, hogy csúcsai a (0;0), (0;1), (1;1), (1;0) pontok legyenek. Ezután a RAND() eljárással (amely a (0;1) intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó véletlen értékeit állítja elő), generáljuk az első pont első, majd második koordinátáját, azután a második pont első, majd második koordinátáját, és megnézzük közelebb esnek-e egymáshoz, mint d. Ezt N-szer végrehajtva számítjuk a relatív gyakoriságot.



Megjegyzés. A kérdéses valószínűségeket geometriai valószínűséggel pontosan is kiszámíthatjuk. Ez azonban igen hosszadalmas. Válasszunk egy pontot, P_1-et, és jelölje A azt az eseményt, hogy P_2 ennek d sugarú környezetébe esik. Mivel az egységnégyzet területe 1, $P(A)$ értéke egyenlő a P_1 középpontú d sugarú kör négyzetbe eső része területének mérőszámával. Ezt a területet másképp és másképp tudjuk kiszámolni, attól függően, hogy P_1 a négyzetben hol helyezkedik el. Pl. ha $d < \frac{1}{2}$, az ábrán bejelölt eseteket kell megkülönböztetni. Jelöljük T_i-vel azt az eseményt, hogy $P_1 \in T_i$. Ekkor $P(A) = \sum_{i=1}^{13} P(AT_i)$. Nyilván $P(A|T_1)P(T_1) = P(AT_1) = P(AT_2) = P(AT_3) = P(AT_4)$, és $P(AT_5) = P(AT_6) = P(AT_7) = P(AT_8)$ és $P(AT_9) = P(AT_{10}) = P(AT_{11}) = P(AT_{12})$. Tekintsük pl. a T_8 eseményt. Ha P_1 koordinátái (x, y), akkor $p_8(x,y) = P(A|T_8) = d^2\pi - (\arccos\frac{x}{d} + \arccos\frac{y}{d}) + x\sqrt{d^2-x^2} + y\sqrt{d^2-y^2}$. (Felhasználtuk, hogy (körcikk területe)=(körív·sugár).) Tekintsük az egységnégyzetnek egy koordinátatengelyekkel párhuzamos elég finom felosztását. Jelölje T_{ij} a $[x_{i-1}; x_i] \times [y_{j-1}; y_j]$ téglalapot. $P(P_1 \in T_{ij}) = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$, és nyilván $p_8(x_{i-1}, y_{j-1}) \leq P(A|P_1 \in T_{ij}) \leq p_8(x_i, y_j)$.

$$\sum_{\substack{i,j \\ T_{ij} \subset T_8}} p_8(x_{i-1}, y_{j-1})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \leq P(AT_8) \leq \sum_{\substack{i,j \\ T_{ij} \subset T_8}} p_8(x_i, y_j)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$

A bal és jobb oldalon is az

$$I_8 = \int_0^{\varepsilon} \int_{\sqrt{\varepsilon^2 - x^2}}^{\varepsilon} \varepsilon^2 \pi - \varepsilon^2 (\arccos \frac{x}{\varepsilon} + \arccos \frac{y}{\varepsilon}) + x\sqrt{\varepsilon^2 - x^2} + y\sqrt{\varepsilon^2 - y^2} dy dx \ .$$

kettős integrál egy-egy közelítő összege áll, így $I_8 = P(QT_8)$. Hasonlóképp eljárva kapjuk a többi esetet.

83.

$$f_{\xi,\eta}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{a^2}, & \text{ha } 0 < x, y < a \ , \\ 0 & \text{különben} \ , \end{cases} \qquad f_\eta(y) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & \text{ha } 0 < y < a \ , \\ 0 & \text{különben} \ . \end{cases}$$

A **D 34.20** definíciónak megfelelően a feltételes eloszlásfüggvényt csak $0 < y < a$ esetben tudjuk értelmezni. Ekkor, ha $0 < x < a$ is:

$$F(x|y) = \int_{-\infty}^{x} f(s|y) ds = \int_{-\infty}^{x} \frac{f_{\xi,\eta}(s, y)}{f_\eta(y)} ds = \int_0^x \frac{1}{a} ds = \frac{x}{a} \ .$$

$$F(x|y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 < y < a \text{ és } x \leq 0 \ , \\ \frac{x}{a}, & \text{ha } 0 < y < a \text{ és } 0 < x \leq a \ , \\ 1, & \text{ha } 0 < y < a \text{ és } a < x \ . \end{cases}$$

84. Használjuk a **28.** feladat eredményeit. A sűrűségfüggvényekre vonatkozó összefüggés alapján (l.az **M 34.22** megjegyzés végén)

$$f(x|0) = \left. \frac{f(x, y)}{f_\eta(y)} \right|_{y=0} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{ha } |x| < 1 \ , \\ 0 & \text{különben} \ , \end{cases}$$

így (l. a **D 34.21** definíciót

$$F(x|0) = \int_{-\infty}^{x} f(t|0) dt = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq -1 \ , \\ \frac{x+1}{2}, & \text{ha } -1 < x \leq 1 \ , \\ 1, & \text{ha } 1 < x \ . \end{cases}$$

85. a)

$$f(x, y, z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-1)^2}{2}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z+1)^2}{2}} \right) = f_\xi(x) f_\eta(y) f_\zeta(z) \ .$$

b) A függetlenség miatt $f_{\eta,\zeta}(y, z) = f_\eta(y) f_\zeta(z)$.

c) A függetlenség miatt $f(y|z) = f_\eta(y)$.

86.

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}(\frac{9}{2} + 3x - \frac{21}{8}x^2), & \text{ha } 0 < x < 2, \\ 0, & \text{különben} \ , \end{cases} \qquad f_\eta(y) = \begin{cases} \frac{1}{9}y^2, & \text{ha } 0 < y < 3, \\ 0, & \text{különben} \ . \end{cases}$$

a) $f(y|x)$ nem értelmezhető, ha $x \notin (0,2)$.

$$f(y|x) = \frac{f_{\xi,\eta}(x,y)}{f_\xi(x)} = \begin{cases} \frac{8(x+y)}{36+24x-21x^2}, & \text{ha } 0 < x < 2 \text{ és } y \in (\frac{3}{2}x, 3) , \\ 0, & \text{ha } 0 < x < 2 \text{ és } y \notin (\frac{3}{2}x, 3) . \end{cases}$$

$F(y|x)$ sem értelmezhető, ha $x \notin (0,2)$.

$$F(y|x) = \int_{-\infty}^{y} f(s|x)ds = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 < x < 2 \text{ és } \frac{3}{2}x , \\ \frac{8xy+4y^2-21x^2}{36+24x-21x^2}, & \text{ha } 0 < x < 2 \text{ és } \frac{3}{2}x < y < 3 , \\ 1, & \text{ha } 0 < x < 2 \text{ és } 3 < y . \end{cases}$$

b) $f(x|y)$ nem értelmezhető, ha $y \notin (0,3)$

$$f(x|y) = \begin{cases} \frac{9(x+y)}{8y^2}, & \text{ha } 0 < y < 3 \text{ és } x \in (0, \frac{2}{3}y) , \\ 0, & \text{ha } 0 < y < 3 \text{ és } x \notin (0, \frac{2}{3}y) . \end{cases}$$

Így, ha $y \in (0,3)$ a **D 34.23** definíció szerint

$$M(\xi|\eta = y) = \int_0^{\frac{2}{3}y} x \frac{9(x+y)}{8y^2} dx = \frac{13}{36} y ,$$

azaz $M(\xi|\eta) = \frac{13}{36}\eta$.

c)

$$P(\delta < t) = P(M(\xi|\eta) < t) = P\left(\frac{13}{36}\eta < t\right) = P\left(\eta < \frac{36}{13}t\right) = F_\eta\left(\frac{36}{13}t\right) .$$

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } y \leq 0, \\ \frac{1}{27}y^3, & \text{ha } 0 < y \leq 3 , \\ 1, & \text{ha } 3 < y , \end{cases} \quad F_\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \leq 0 , \\ (\frac{12}{13})^3 t^3, & \text{ha } 0 < t \leq \frac{13}{12} , \\ 1, & \text{ha } \frac{13}{12} < t . \end{cases}$$

87. $P(\eta = 1|\xi = 1) = \frac{P(\eta=1,\xi=1)}{P(\xi=1)} = \frac{1}{3}$, $P(\eta = 2|\xi = 1) = \frac{2}{3}$, $P(\eta = 3|\xi = 1) = 0$ stb.
A **D 34.23** definíciószeint $M(\eta|\xi = 1) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot 0 = \frac{5}{3}$
$M(\eta|\xi = 2) = 1 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$, $M(\eta|\xi = 3) = 1 \cdot \frac{2}{6} + 2 \cdot \frac{3}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{6}$.
$\delta = M(\eta|\xi)$ jelöléssel δ lehetséges értékei $\frac{5}{3}$, $\frac{11}{6}$, $\frac{8}{3}$.
$P(\delta = \frac{5}{3}) = P(\xi = 1) = \frac{1}{4}$, $P(\delta = \frac{11}{6}) = P(\xi = 3) = \frac{1}{2}$,
$P(\delta = \frac{8}{3}) = P(\xi = 2) = \frac{1}{4}$.

88. Az előző feladathoz hasonlóan számolva $M(\eta|\xi = 1) = 2$, $M(\eta|\xi = 2) = 2$, $M(\eta|\xi = 3) = 2$. Így

$$F_\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 2 , \\ 1, & \text{ha } 2 < x . \end{cases}$$

89. Mivel két szám összege és az egyik szám a másik számot egyértelműen meghatározza, $P(\xi = i, \eta = k) = \frac{1}{36}$ minden olyan i, k párra, amire nem nulla. A $P(\eta = k)$ valószínűségeket a "kedvező/összes" képlettel számítjuk (I.**32.29**).

A $P(\xi = i|\eta = k) = \frac{P(\xi=i,\eta=k)}{P(\eta=k)}$ összefüggésből látható, hogy $P(\xi = i|\eta = k)$ és $M(\xi|\eta = k)$ is csak akkor értelmezhető, ha $2 \le k \le 12$; ekkor

$$P(\xi = i|\eta = k) = \begin{cases} \frac{1}{k-1}, & \text{ha } 2 \le k \le 7 \text{ és } 1 \le i < k \,, \\ \frac{1}{12-(k-1)}, & \text{ha } 7 < k \le 12 \text{ és } k-6 \le i \le 6 \,, \\ 0, & \text{minden más } i\text{-re} \,. \end{cases}$$

$$M(\xi|\eta = k) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{i}{k-1} = \frac{k}{2}, & \text{ha } k \le 7 \,, \\ \sum_{i=k-6}^{6} \frac{i}{13-k} = \frac{k}{2}, & \text{ha } 7 < k \le 12 \,. \end{cases}$$

Tehát $\delta = M(\xi|\eta)$ esetén δ lehetséges értékei: 1, 1.5, 2, 2.5, ... , 6.
$P(\delta = 1) = P(\eta = 2) = \frac{1}{36}$, $\quad P(\delta = 1.5) = P(\eta = 3) = \frac{2}{36}, \dots$,
$P(\delta = 5.5) = P(\eta = 11) = \frac{2}{36}$, $\quad P(\delta = 6) = P(\eta = 12) = \frac{1}{36}$.

90. Ha ξ és η diszkrétek, legyen $p_{i,k} = P(\xi = x_i, \eta = y_k)$, $q_k = P(\eta = y_k)$, $p_i = P(\xi = x_i)$, $i = 1, 2, \dots$, $k = 1, 2, \dots$.

$$M(M(\xi|\eta)) = \sum_k M(\xi|\eta = y_k)P(\eta = y_k) = \sum_k \left(\sum_i x_i \frac{p_{i,k}}{q_k} \right) q_k =$$
$$= \sum_i x_i \sum_k p_{i,k} = \sum_i p_i x_i = M(\xi) \,.$$

(Mivel az összegek abszolút konvergensek, az összegzés sorrendje felcserélhető.) Ha ξ és η folytonosak, akkor

$$M(M(\xi|\eta)) = \int_{-\infty}^{\infty} M(\xi|\eta = y) f_\eta(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x|y) f_\eta(y) dx dy =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x, y) dy dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) dx = M(\xi) \,.$$

91. Jelöljük a ξ_i-k közös várható értékét m-mel. Az előző feladat eredményét alkalmazva

$$M(\eta) = M(M(\eta|\nu)) = \sum_{n=1}^{\infty} M(\eta|\nu = n)P(\nu = n)$$

Az η valószínűségi változó ν db m várható értékű valószínűségi változó összege, és ξ_j-k függetlenek ν-től, ezért ν bármilyen értékére vonatkozó feltételes várható értékük m, $M(\eta|\nu = n) = n \cdot m$. Ezekből

$$M(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} m \cdot n P(\nu = n) = m \sum_{n=1}^{\infty} n P(\nu = n) = m M(\nu) \,.$$

92. a) Az előző feladat megoldásához hasonlóan

$$M(\eta) = M(M(\eta|\nu)) = \sum_{n=1}^{\infty} M(\eta|\nu = n)P(\nu = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} M(\xi_j) \right) P(\nu = n).$$

Az összegzés sorrendjét felcserélve

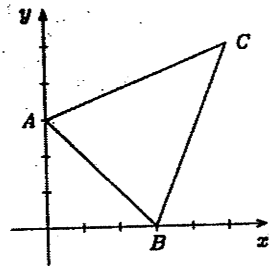
$$M(\eta) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=j}^{\infty} M(\xi_j)P(\nu = n) = \sum_{j=1}^{\infty} M(\xi_j) \sum_{n=j}^{\infty} P(\nu = n) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} M(\xi_j)P(\nu \geq j)\,.$$

b) Ha minden $M(\xi_i)$ egyenlő m-mel, akkor az előző eredmény szerint

$$M(\eta) = m\sum_{j=1}^{\infty} P(\nu \geq j) = m\sum_{j=1}^{\infty} jP(\nu = j) = mM(\nu)\,.$$

93. A háromszög területe: 21/2 , ezért



$$f_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{21}, & \text{ha } (x,y) \in ABC_\triangle\,, \\ 0, & \text{ha } (x,y) \notin ABC_\triangle\,. \end{cases}$$

$$f_\eta(y) = \begin{cases} \frac{2}{15}y, & \text{ha } 0 < y \leq 3\,, \\ 1 - \frac{1}{5}y, & \text{ha } 3 < y < 5\,, \\ 0 & \text{különben}\,. \end{cases}$$

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \int_{3-x}^{3+\frac{2}{5}x} \frac{2}{21}dt = \frac{2}{15}x, & \text{ha } 0 < x \leq 3\,, \\ \int_{-\frac{15}{2}+\frac{5}{2}x}^{3+\frac{2}{5}x} \frac{2}{21}dt = 1 - \frac{1}{5}x, & \text{ha } 3 < x \leq 5, \\ 0 & \text{különben}\,. \end{cases}$$

$f(x|y) = f_{\xi,\eta}(x,y)/f_\eta(y)$ és ezzel együtt $F(x|y)$ sincs értelmezve, ha $y \notin (0,5)$;
$f(y|x) = f_{\xi,\eta}(x,y)/f_\xi(x)$ és ezzel együtt $F(y|x)$ sincs értelmezve, ha $x \notin (0.5)$.

$$F(x|y) = \int_{-\infty}^{x} f(t|y)dt =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 < y \leq 3 \text{ és } x \leq 3 - y\,, \\ \int_{3-y}^{x} \frac{5}{7y}dt = \frac{5(x+y-3)}{7y}, & \text{ha } 0 < y \leq 3 \text{ és } 3 - y < x \leq 3 + \frac{2}{5}y\,, \\ 1, & \text{ha } 0 < y \leq 3 \text{ és } 3 + \frac{2}{5}y < x\,, \\ 0, & \text{ha } 3 < y < 5 \text{ és } x \leq \frac{5}{2}y - \frac{15}{2}\,, \\ \int_{\frac{5}{2}y-\frac{15}{2}}^{x} \frac{10}{21(5-y)}dt = \frac{5(2x-5y+15)}{21(5-y)}, & \text{ha } 3 < y < 5 \text{ és } \frac{5}{2}y - \frac{15}{2} < x \leq 3 + \frac{2}{5}y, \\ 1, & \text{ha } 3 < y < 5,\ 3 + \frac{2}{5}y < x\,. \end{cases}$$

A feladatban szereplő változók szimmetriájából következik, hogy $F(y|x)$-et megkapjuk, ha a fenti eloszlásfüggvényben x és y szerepét felcseréljük.

94. A **66.** feladat részeredményeit használva

$$f(x|y) = \frac{f_{\xi,\eta}(x,y)}{f_\eta(y)} = \frac{\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2-2xy+2y^2)}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x^2-2xy+\frac{3}{2}y^2)}\,,$$

$$M(\xi|\eta=y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{-\frac{1}{2}(x^2-2xy+\frac{3}{2}y^2)}}{\sqrt{2\pi}}dx = e^{-\frac{1}{2}y^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-y)^2}{2}}dx = ye^{-\frac{1}{2}y^2}\,.$$

Ebből a) $M(\xi|\eta = 2) = 2e^{-2}$ b) $M(\xi|\eta) = \eta e^{-\frac{1}{2}\eta^2}$

95. Mivel minden fordulóban a nyereség várható értéke a többitől függetlenül 0,
a) $M(\xi_3) = 100$, b) $M(\xi_3|\xi_2 = 120) = 120$, c) $M(\xi_10|\xi_2 = 120) = 120$,
d) $M(\xi_{i+k}|\xi_i = m) = m$.

96.

$$f_\eta(y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } y \le 0 \,, \\ \frac{4}{5}\int_0^\infty (x+3y)e^{-x-2y}dx = \frac{4}{5}e^{-2y}(1+3y), & \text{ha } y > 0 \,. \end{cases}$$

$f(x|y)$ nincs értelmezve, ha $y \le 0$, és

$$f(x|y) = \frac{f_{\xi,\eta)}(x,y)}{f_\eta(y)} = \frac{x+3y}{1+3y}e^{-x} \,, \quad \text{ha} \quad y > 0 \,.$$

$$M(\xi|\eta = y) = \int_0^\infty x\frac{x+3y}{1+3y}e^{-x}dx \ = \frac{2+3y}{1+3y} \,,$$

azaz $\delta = M(\xi|\eta) = \frac{2+3\eta}{1+3\eta}$. Ha $\eta > 0$, akkor $1 < \frac{2+3\eta}{1+3\eta} < 2$, így

$$P(\delta < t) = P\left(\frac{2+3\eta}{1+3\eta} < t\right) = P\left(\eta > \frac{2-t}{3(t-1)}\right) = 1 - F_\eta\left(\frac{2-t}{3(t-1)}\right) \,.$$

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } y \le 0 \,, \\ 1 - e^{-2y}(1+\frac{6}{5}y), & \text{ha } y > 0 \,, \end{cases}$$

és mivel $1 < \frac{2+3t}{1+3t} < 2$

$$F_\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \le 1 \,, \\ e^{-\frac{2(2-t)}{3(t-1)}}\left(1 + \frac{6(2-t)}{15(t-1)}\right), & \text{ha } 1 < t \le 2 \,, \\ 1, & \text{ha } 2 < t \,. \end{cases}$$

97. a) Induljunk ki az $f_{\xi,\eta}(x,y) = f(y|x)f_\xi(x)$ összefüggésből. A feladat szövege alapján

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in (0,1) \,, \\ 0 & \text{különben} \,, \end{cases} \qquad f(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & \text{ha } x \in (0,1) \text{ és } y \in (x,1), \\ 0, & \text{ha } x \in (0,1) \text{ és } y \notin (x,1), \\ \text{nincs értelme} & \text{ha } x \notin (0,1) \,. \end{cases}$$

$$f_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & \text{ha } 0 < x < y < 1 \,, \\ 0 & \text{különben} \,. \end{cases}$$

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0 \text{ vagy } y \le 0 \,, \\ (1-y)\ln(1-x) + x, & \text{ha } 0 < x < y \le 1 \,, \\ x, & \text{ha } 0 < x \le 1 \text{ és } 1 < y \,, \\ (1-y)\ln(1-y) + y, & \text{ha } 0 < y < 1 \text{ és } 1 < x \,, \\ 1, & \text{ha } 1 < x \text{ és } 1 < y \,. \end{cases}$$

b)

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } y \le 0 \,, \\ (1-y)\ln(1-y) + y, & \text{ha } 0 < \le 1 \,, \\ 1, & 1 < y \,. \end{cases}$$

98. Induljunk ki az $f_{\xi,\eta,\tau}(x,y,z) = f_{\xi,\eta}(x,y)f_1(z|x,y) = f_\xi(x)f_2(y|x)f_1(z|x,y)$ összefüggésből. $f_\xi(x)$-et és $f_2(y|x)$-et hasonlóan kapjuk, mint előbb, csak most η a $(0,x)$ intervallumon lesz egyenletes eloszlású; $f_1(z|x,y)$ meghatározásánál pedig gondoljunk arra, hogy τ az η értékétől függetlenül az $(x,1)$ intervallumon lesz egyenletes eloszlású. Így

$$f_{\xi,\eta,\tau}(x,y,z) = \begin{cases} 1\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1-x}, & \text{ha } 0 < y < x < z \le 1\,, \\ 0 & \text{különben}\,. \end{cases}$$

A **23.** feladat megoldásánál közölt ábra mutatja a tartományt, ahol a sűrűségfüggvény nem nulla.

$$F_{\eta,\tau}(y,z) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta,\tau}(x,t,s)\,dx\,ds\,dt =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{ha } y \le 0 \text{ vagy } z \le 0, \\ yz\ln\frac{z}{y} + (1-z)(1-y)\ln(1-y)+ & \\ +y(1-z)\ln(1-z), & \text{ha } 0 < y \le z < 1\,, \\ (1-z)\ln(1-z) + z, & \text{ha } 0 < z < 1 \text{ és } y > z\,, \\ y(1-\ln y), & \text{ha } 0 < y \le 1 \text{ és } 1 \le z\,, \\ 1, & \text{ha } 1 < y \text{ és } 1 \le z\,. \end{cases}$$

99. a)

$$P(\xi = j|\xi+\eta = k) = \frac{P(\xi = j, \xi+\eta = k)}{P(\xi+\eta = k)} = \frac{P(\xi = j, \eta = k-j)}{P(\xi+\eta = k)}\,.$$

Mivel $P(\xi+\eta = k) = \sum_{i=1}^{k-1} P(\xi = i, \eta = k-i)$, és ξ, η függetlenek,

$$P(\xi = j|\xi+\eta = k) = \frac{P(\xi = j)P(\eta = k-j)}{\sum_{i=1}^{k-1} P(\xi = i)P(\eta = k-i)} =$$

$$= \frac{pq^{j-1}pq^{k-j-1}}{\sum_{i=1}^{k-1} pq^{i-1}pq^{k-i-1}} = \frac{1}{k-1}\,.$$

b)

$$M(\xi|\xi+\eta = k) = \sum_{i=1}^{k-1} iP(\xi = i|\xi+\eta = k) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{i}{k-1} = \frac{k}{2}\,.$$

100. a) Az előző feladat b) pontjának megoldásához szükséges lépéseket kell elvégeznünk.

$$P(\xi = j|\xi+\eta = k) = \frac{p_j p_{k-j}}{\sum_{i=1}^{k-1} p_i p_{k-i}}$$

$$M(\xi|\xi+\eta = k) = \sum_{j=1}^{k-1} jP(\xi = j|\xi+\eta = k) = \sum_{j=1}^{k-1} j\frac{p_j p_{k-j}}{\sum_{i=1}^{k-1} p_i p_{k-i}}$$

Hozzuk ezt egyszerűbb alakra. Az utolsó szummában a törtek nevezője független j-től, így azokat kiemelhetjük. Ezen kívül, ha j befutja az

$1, 2, ..., k-1$ értékeket, akkor a $k-j$ is (fordított sorrendben) ugyanezeket az értékeket futja be; ezért, a számlálók összegét m-mel jelölve $m = \sum_{j=1}^{k-1} jp_jp_{k-j} = \sum_{j=1}^{k-1}(k-j)p_jp_{k-j}$, azaz

$$2m = \sum_{j=1}^{k-1}(j+(k-j))p_jp_{k-j} = k\sum_{j=1}^{k-1} p_jp_{k-j} \, ,$$

és így

$$M(\xi|\xi+\eta=k) = \frac{\sum_{j=1}^{k-1} jp_jp_{k-j}}{\sum_{i=1}^{k-1} p_ip_{k-i}} = \frac{\frac{k}{2}\sum_{j=1}^{k-1} p_jp_{k-j}}{\sum_{i=1}^{k-1} p_ip_{k-i}} = \frac{k}{2} \, .$$

b) Tehát $\delta = \frac{\xi+\eta}{2}$, így

$$P\left(\delta=\frac{k}{2}\right) = P\left(\frac{\xi+\eta}{2}=\frac{k}{2}\right) = P(\xi+\eta=k) = \sum_{i=1}^{k-1} p_ip_{k-i} \, , \quad k=2,3,\dots \, .$$

101. Jelöljük f-fel ξ és η közös sűrűségfüggvényét, és $f(x|y)$-nal a $P(\xi<x, \xi+\eta=y) = F(x|y)$ eloszlás sűrűségfüggvényét. Mivel ξ és η függetlenek, együttes sűrűségfüggvényük $f_{\xi,\eta}(x,y) = f(x)f(y)$. Ha meghatározzuk ξ és $\xi+\eta$ együttes sűrűségfüggvényét, akkor az $f_{\xi|\xi+\eta}(x,y) = \frac{f_{\xi,\xi+\eta}(x,y)}{f_{\xi+\eta}(y)}$ képlet megadja a keresett sűrűségfüggvényt. Tekintsük a $\delta=\xi$, $\gamma=\xi+\eta$ transzformációt. Az inverztranszformáció $\xi=\delta$, $\eta=\gamma-\delta$. A transzformáció Jacobi determinánsa 1. Így, a **T 34.11** tétel értelmében

$$f_{\delta,\gamma}(x,y) = f_{\xi,\xi+\eta}(x,y) = f(x)f(y-x) \, .$$

$f_{\xi+\eta}$ sűrűségfüggvénye pedig $\int_{-\infty}^{\infty} f(y-t)f(t)dt$. Így

$$f(x|y) = \frac{f(x)f(y-x)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(y-t)f(t)dt}$$

(Ezt az egyenlőséget az előző feladat alapján a diszkrét valószínűségi változók adott értékeihez tartozó valószínűségek és a sűrűségfüggvények közötti analógiák alapján is nyugodtan felírhatjuk.)

$$M(\xi|\xi+\eta=y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xf(x)f(y-x)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(y-t)dt}dx$$

A nevező független x-től, tehát kiemelhetjük az integrál mögül. A számláló integrálját m-mel jelölve a diszkrét esethez hasonlóan, csak most $s=y-x$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)f(y-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}(y-s)f(s)f(y-s)ds = \int_{-\infty}^{\infty}(y-x)f(x)f(y-x)dx \, ,$$

ugyanis mindegy, hogy egy határozott integrálban milyen betűt használunk integrálási változónak. Ekkor

$$2m = \int_{-\infty}^{\infty}(x+(y-x))f(x)f(y-x)\,dx = y\int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(y-x)\,dx \, ,$$

$$M(\xi|\xi+\eta=y)=\frac{\frac{y}{2}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)f(y-x)\,dx}{\int_{-\infty}^{\infty}f(t)f(y-t)\,dt}=\frac{y}{2}\,.$$

Így $\delta = M(\xi|\xi+\eta)=\frac{\xi+\eta}{2}$.

$$F_\delta(t)=P(\delta<t)=P(\xi+\eta<2t)=F_{\xi+\eta}(2t)=\int_{-\infty}^{2t}\int_{-\infty}^{\infty}f(y-s)f(s)\,ds dy\,.$$

35. Matematikai statisztika (megoldások)

1.

a) Az F_{20} empirikus eloszlásfüggvény D 35.6-beli (1) képlet szerint:

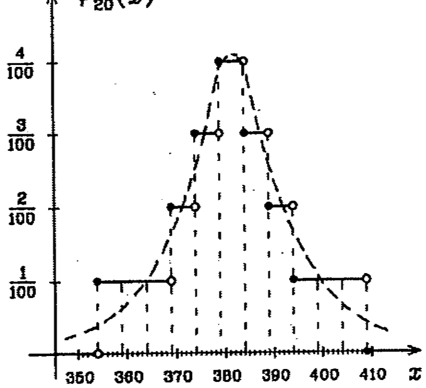
$$F_{20}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 355; \\ 1/20, & \text{ha } 355 < x \leq 359, \\ 2/20, & \text{ha } 399 < x \leq 364, \\ 3/20, & \text{ha } 364 < x \leq 369, \\ 4/20, & \text{ha } 369 < x \leq 373, \\ 5/20, & \text{ha } 373 < x \leq 375, \\ 6/20, & \text{ha } 375 < x \leq 376, \\ 7/20, & \text{ha } 376 < x \leq 377, \\ 8/20, & \text{ha } 377 < x \leq 379, \\ 9/20, & \text{ha } 379 < x \leq 380, \\ 1/2, & \text{ha } 380 < x \leq 381, \\ 11/20, & \text{ha } 381 < x \leq 383, \\ 12/20, & \text{ha } 383 < x \leq 384, \\ 13/20, & \text{ha } 384 < x \leq 385, \\ 14/20, & \text{ha } 385 < x \leq 387, \\ 15/20, & \text{ha } 387 < x \leq 390, \\ 16/20, & \text{ha } 390 < x \leq 393, \\ 17/20, & \text{ha } 393 < x \leq 396, \\ 18/20, & \text{ha } 396 < x \leq 400, \\ 19/20, & \text{ha } 400 < x \leq 408, \\ 1, & \text{ha } 408 < x. \end{cases}$$

A hisztogram előállításához állapítsuk meg a feladatban előírt részintervallumokba eső mintaelemek számát (más szóval: gyakoriságát). E gyakoriságokat az alábbi táblázat tartalmazza.

[354,359)	[359,364)	[364,369)	[369,374)	[374,379)	[379,384)
1	1	1	2	3	4

[384,389)	[389,394)	[394,399)	[399,404)	[404,409)
3	2	1	1	1

A hisztogram:



A koordinátarendszerbe szaggatott vonallal berajzolt "haranggörbét" elég jól közelíti a hisztogram. Így a mért értékek alapján a vizsgált statisztikai sokaság (a műanyagból készült mintadarabok a szakítószilárdságukkal együtt) eloszlása jól közelíthető normális eloszlással.

b) Az empirikus várhatóérték (l. **D 35.9** (3)):

$$\overline{x} = 380.65,$$

az empirikus szórás (l. **D 35.9** (4)):

$$s = 13.02795072,$$

a korrigált empirikus szórás (l. **D 35.9** (5)):

$$s^* = 13.36639541.$$

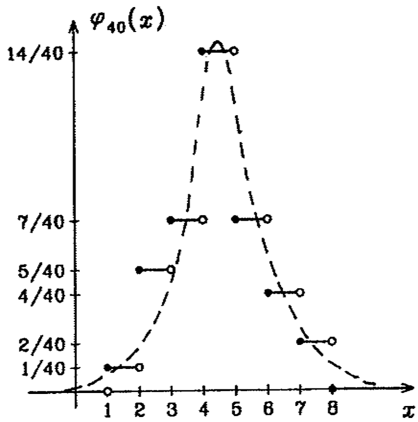
2. A szóban forgó statisztikai sokaságot leíró valószínűségi változót ξ-vel jelölve, a $P(\xi < 361)$ valószínűséget kell megbecsülnünk. Mivel $P(\xi < 361) = F(361)$, ahol F jelöli a ξ elméleti eloszlásfüggvényét, ezért $P(\xi < 361)$ becsülhető az előző feladat megoldásában előállított F_{20} empirikus eloszlásfüggvény $x = 361$ helyen felvett értékével. Az F_{20} függvény táblázatáról leolvasható, hogy

$$F_{20}(361) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}.$$

3. a) A táblázat adatai alapján a **D 35.7** (2) szerinti φ_{40} függvény a következő:

$$\varphi_{40}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 1, \\ \frac{1}{40}, & \text{ha } 1 \le x < 2, \\ \frac{5}{40}, & \text{ha } 2 \le x < 3, \\ \frac{7}{40}, & \text{ha } 3 \le x < 4, \\ \frac{14}{40}, & \text{ha } 4 \le x < 5, \\ \frac{7}{40}, & \text{ha } 5 \le x < 6, \\ \frac{4}{40}, & \text{ha } 6 \le x < 7, \\ \frac{2}{40}, & \text{ha } 7 \le x < 8, \\ 0, & \text{ha } 8 \le x. \end{cases}$$

Ennek grafikonja, azaz a hisztogram a következő:



A szaggatott vonal (a haranggörbe) az elméleti sűrűségfüggvény alakját szemlélteti. A grafikon azt mutatja, hogy ξ jó közelítéssel normális eloszlásúnak tekinthető.

b) A $P(4.2 \le \xi \le 6.2)$ valószínűséget kell megbecsülnünk. Mivel ξ folytonos valószínűségi változó, ezért a keresett valószínűség egyenlő $P(4.2 \le \xi < 6.2)$-vel. F_{40}-nel jelölve az adott mintához tartozó empirikus eloszlásfüggvényt, $P(4.2 \le \xi < 6.2) \approx F_{40}(6.2) - F_{40}(4.2)$. A minta elemeinek konkrét értékei azonban nem ismertek, csupán az egyes osztályokba eső értékek gyakorisága. Ezért F_{40}-et azzal az $\overline{F}_{40}$ empirikus eloszlásfüggvénnyel helyettesítjük, amely az osztályközepekhez tartozik, minden osztályközepet annyiszor véve, amennyi az eredeti adatok gyakorisága volt az illető osztályban. A fentiek szerint az $\overline{F}_{40}$ függvény a következő:

$$\overline{F}_{40} = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 1.5, \\ 1/40, & \text{ha } 1.5 < x \le 2.5, \\ 6/40, & \text{ha } 2.5 < x \le 3.5, \\ 13/40, & \text{ha } 3.5 < x \le 4.5, \\ 27/40, & \text{ha } 4.5 < x \le 5.5, \\ 34/40, & \text{ha } 5.5 < x \le 6.5, \\ 38/40; & \text{ha } 6.5 < x \le 7.5, \\ 1, & \text{ha } 7.5 < x. \end{cases}$$

Így a keresett valószínűség egy becsült értéke:

$$\overline{F}_{40}(6.2) - \overline{F}_{40}(4.2) = \frac{34}{40} - \frac{13}{40} = \frac{21}{40}.$$

4.

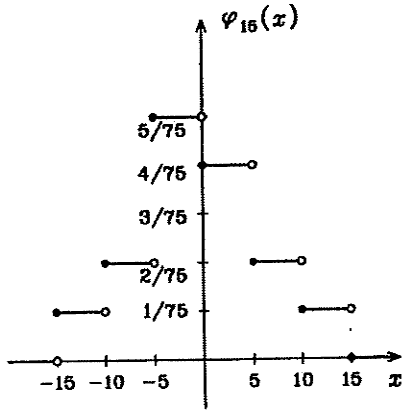
a) A -12.5, -7.5, -2.5, 2.5, 7.5, 12.5 átlagos eltérésekkel dolgozva a **D 35.6**-beli (1) képlet alapján az F_{15} eloszlásfüggvény a következő:

$$F_{15}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le -12.5, \\ \frac{1}{15}, & \text{ha } -12.5 < x \le -7.5, \\ \frac{3}{15}, & \text{ha } -7.5 < x \le -2.5, \\ \frac{8}{15}, & \text{ha } -2.5 < x \le 2.5, \\ \frac{12}{15}, & \text{ha } 2.5 < x \le 7.5, \\ \frac{14}{15}, & \text{ha } 7.5 < x \le 12.5, \\ 1, & \text{ha } 12.5 < x. \end{cases}$$

b) A $[-15, 15)$ intervallumnak 5 hosszúságú részintervallumokból álló beosztásához tartozó $\varphi_{15}(x)$ függvény

$$\varphi_{15}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < -15, \\ \frac{1}{75}, & \text{ha } -15 \le x < -10, \\ \frac{2}{75}, & \text{ha } -10 \le x < -5, \\ \frac{5}{75}, & \text{ha } -5 \le x < 0, \\ \frac{4}{75}, & \text{ha } 0 \le x < 5, \\ \frac{2}{75}, & \text{ha } 5 \le x < 10, \\ \frac{1}{75}, & \text{ha } 10 \le x < 15, \\ 0, & \text{ha } 15 \le x, \end{cases}$$

melynek grafikonja



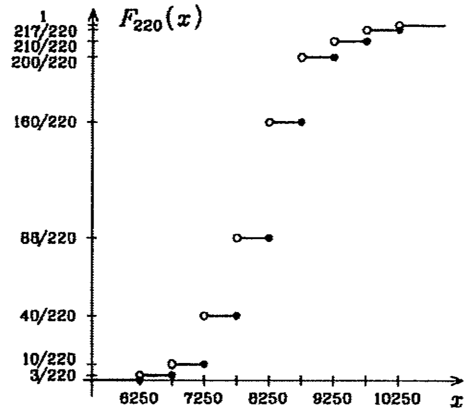
c) Az empirikus várható érték: $\overline{x} = -0.166666666$.
d) Az empirikus szórás: $s = 6.289320755$,
a korrigált empirikus szórás pedig: $s^* = 6.510065467$.

5.

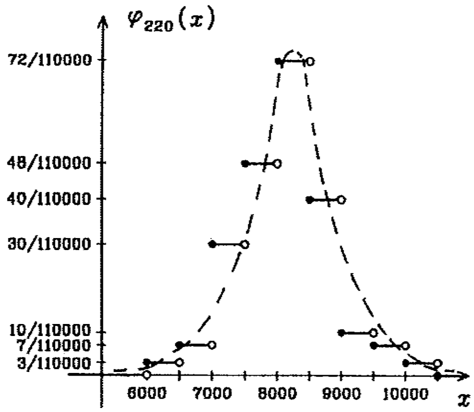
a) Az egyes osztályokhoz tartozó átlagkeresettel dolgozva az empirikus eloszlásfüggvény

$$F_{220}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 6250, \\ \frac{3}{220}, & \text{ha } 6250 < x \leq 6750, \\ \frac{10}{220}, & \text{ha } 6750 < x \leq 7250, \\ \frac{40}{220}, & \text{ha } 7250 < x \leq 7750, \\ \frac{88}{220}, & \text{ha } 7750 < x \leq 8250, \\ \frac{160}{220}, & \text{ha } 8250 < x \leq 8750, \\ \frac{200}{220}, & \text{ha } 8750 < x \leq 9250, \\ \frac{210}{220}, & \text{ha } 9250 < x \leq 9750, \\ \frac{217}{220}, & \text{ha } 9750 < x \leq 10250, \\ 1, & \text{ha } 10250 < x, \end{cases}$$

melynek grafikonja a következő:



Az alábbi ábrán látható hisztogram azt mutatja, hogy a szóban forgó statisztikai sokaságot leíró valószínűségi változó jó közelítéssel normális eloszlású.



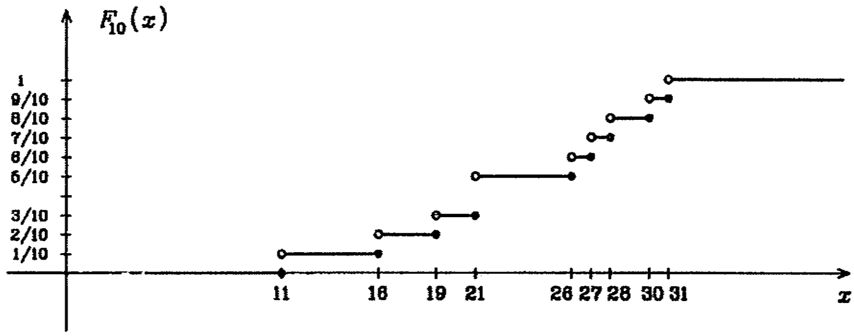
b) $\overline{x} = 8141$ Ft.

c) ξ-vel jelölve egy véletlenszerűen kiválasztott munkás havi átlagkeresetét, a $P(\xi \geq \overline{x}) = 1 - P(\xi < \overline{x})$ valószínűséget kell becsülnünk. Mivel $P(\xi < \overline{x}) \approx F_{220}(8141) = \frac{88}{220} = \frac{2}{5}$, ezért $P(\xi \geq \overline{x}) \approx 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$.

35.6

6.

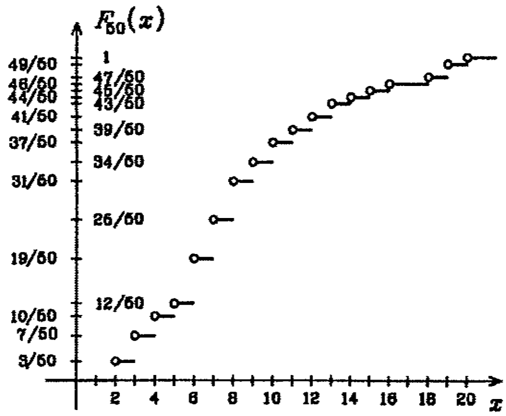
a) Az empirikus eloszlásfüggvény grafikonja az alábbi:



b) $P(\xi < 20) \approx F_{10}(20) = \frac{3}{10}$.

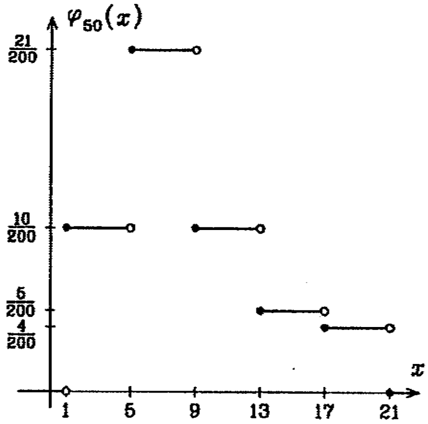
7.

a) Az empirikus eloszlásfüggvény:



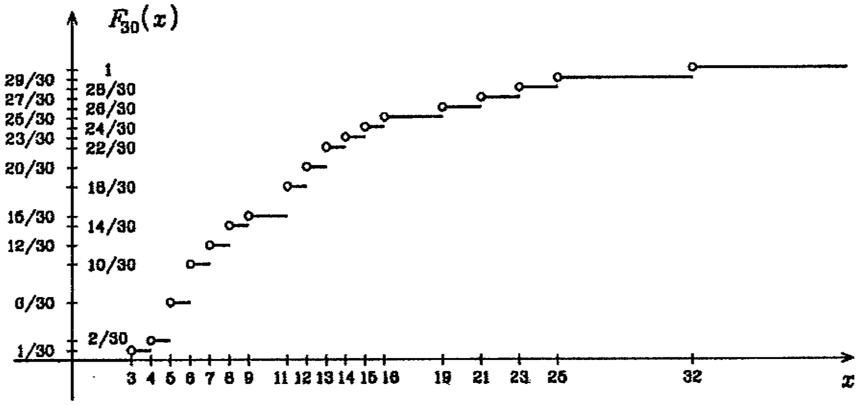
b) $P(\xi \geq 10) = 1 - P(\xi < 10) \approx 1 - F_{50}(10) = 1 - \frac{34}{50} = 1 - 0.68 = 0.32.$

c) A hisztogram:



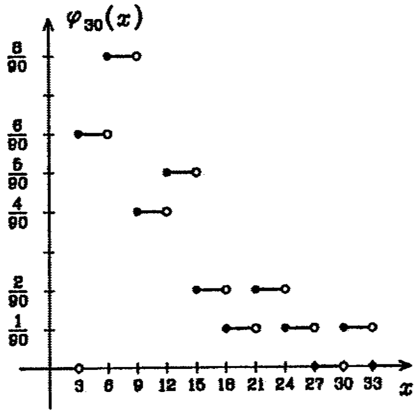
8.

a) Az empirikus eloszlásfüggvény grafikonja:

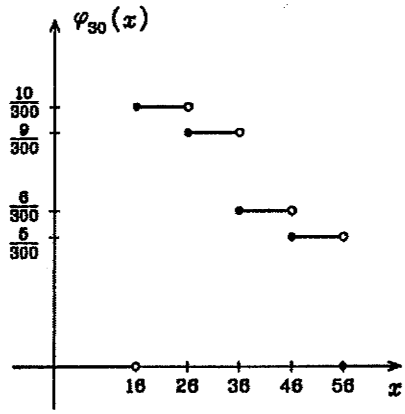


b) $P(\xi < 20) = F_{30}(20) = \frac{26}{30} \approx 0.8667.$

c) A hisztogram:



9. A hisztogram:



10. Annak valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott hallgató az első szigorlati írásbelin
a) 30 pontnál többet ért el, közelítőleg egyenlő
$1 - F_{20}(30) = 1 - \frac{14}{20} = 0.3$-del,
b) 20 pontnál kevesebbet ért el, közelítőleg egyenlő $F_{20}(20) = \frac{7}{20} = 0.35$-dal.

11. Jelöljük ξ-vel az adott városrészben egy véletlenszerűen kiválasztott napon bekövetkezett közlekedési balesetek számát. Legyenek $x_1, x_2, \dots, x_n$ a ξ-re vonatkozó n elemű $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ mintának egy adott mintavétellel kapcsolatos

konkrét értékei. A **D 35.15** (9)-nek megfelelően keressük a

$$l(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} P(\xi_i = x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda}$$

függvény maximumhelyét. Mivel $l(\lambda)$ a λ-nak akárhányszor differenciálható függvénye, ezért a maximumhely(ek) meghatározásához a differenciálszámítást is felhasználhatjuk. Sokténvezős szorzat differenciálása azonban eléggé hosszadalmas, ezért a likelihood-függvény helyett annak természetes alapú logaritmusát vesszük; ezt megtehetjük, mert a természetes alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekvő, és így az l és $\ln l$ függvények ugyanazon a helyen veszik fel legnagyobb értéküket, és ahol l differenciálható, ott $\ln l$ is differenciálható. Jelöljük az $\ln l$ függvényt L-lel. Az előzőek szerint

$$L(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} (-\lambda + \ln \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}).$$

Az L-nek a λ szerinti deriváltja:

$$\frac{d}{d\lambda} L(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} (-1 + \frac{x_i}{\lambda}) = -n + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Így a $\frac{d}{d\lambda} L(\lambda) = 0$ egyenlet megoldása $\hat{\lambda} = \overline{x}$, azaz az adatokhoz tartozó empirikus várható érték. Könnyen ellenőrizhető (akár az L' előjelének vizsgálatával, akár L'' felhasználásával) , hogy ezen a helyen L-nek (és így l-nek is) maximuma van.
Mivel a feladatban szereplő adatokhoz tartozó empirikus várható érték egyenlő 8.3-del, ezért a λ paraméter legnagyobb valószínűségű becsléseként ezt az értéket fogadjuk el.

12. Jelen esetben egy n elemű minta adott mintavétellel kapcs[illegible] $x_1, x_2, \ldots, x_n$ konkrét értékeire a likelihood-függvény (l. **D 35.15** (10)):

$$l(\lambda) = (\lambda e^{-\lambda x_1})(\lambda e^{-\lambda x_2}) \ldots (\lambda e^{-\lambda x_n}) = \lambda^n e^{-\lambda n \overline{x}},$$

feltéve, hogy $x_i > 0$ minden $i = 1, 2, \ldots, n$ indexre. Ennek [illegible], azaz

$$L(\lambda) = n \ln \lambda - \lambda n \overline{x}.$$

A $L(\lambda)$ függvénynek egyetlen maximuma van, a $\hat{\lambda} = (\overline{x})^{-1}$ helyen. Ez tehát a λ paraméter legnagyobb valószínűségű becslése.

13. A feltétel szerint ξ eloszlásfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

alakú, ahol m tetszőleges, σ pedig pozitív valós szám; m az eloszlás várható értéke, σ pedig az eloszlás szórása. A továbbiakban (az egyszerűbb írásmód kedvéért) alkalmazzuk az $a = \sigma^2$ jelölést. Ha tehát ξ-re nézve egy n elemű minta adott mintavétellel kapcsolatos konkrét értékei $x_1, x_2, \ldots, x_n$, akkor az ezen értékekhez tartozó likelihood-függvény logaritmusa:

$$L(a,m) = \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{n}{2}(\ln a + \ln 2\pi)\right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - m)^2}{2a}.$$

Így

$$L'_a = -\frac{n}{2a} + \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - m)^2}{2a^2}$$

és

$$L'_m = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - m}{a}.$$

Felírva, majd megoldva a

$$(L'_a =)\ -\frac{n}{2a} + \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - m)^2}{2a^2} = 0$$

$$(L'_m =)\ \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - m}{a} = 0$$

un. likelihood-egyenletrendszert,

$$m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x},$$

$$a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = s^2$$

adódik. Az L-nek tehát egyetlen szélsőértékhelye lehet, ez pedig az $(s^2, \overline{x})$ hely. Az L másodrendű parciális deriváltjainak segítségével könnyen ellenőrizhető, hogy ez a hely maximumhely. A feladatban szereplő adatok felhasználásával m legnagyobb valószínűségű becslése $\overline{x} = 10.36$, σ legnagyobb valószínűségű becslése pedig $s = 0.385$.

14. Mivel $f(x) \geq 0$ minden x-re, és

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{2(\sqrt{b}-\sqrt{a})\sqrt{x}}dx = \left[\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}\right]_a^b = \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}} = 1,$$

ezért f valóban sűrűségfüggvény.

Legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_n$ egy n elemű minta adott mintavétellel kapcsolatos konkrét értékei. A hozzájuk tartozó likelihood-függvény:

$$l(a,b) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2(\sqrt{b}-\sqrt{a})\sqrt{x_i}},$$

feltéve, hogy minden egyes x_i eleme (a,b)-nek. A feladat feltétele miatt $\mathrm{Dom}\, l = \{(a,b) \in \mathbf{R}^2 : 0 < a < b\}$. Mivel értelmezési tartományán l nem vesz fel maximális értéket, ezért az a és b paramétereknek nincs legnagyobb valószínűségű becslésük.

15. Mivel $f(x) \geq 0$ minden x-re, és mert $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = [-e^{-a(x-1)}]_1^{\infty} = 1$, ezért f valóban sűrűségfüggvény.
Legyenek $x_1, x_2, \ldots x_n$ az S statisztikai sokaságot leíró valószínűségi változóhoz tartozó n elemű minta adott mintavétellel kapcsolatos konkrét értékei. A hozzájuk tartozó likelihood-függvény:

$$l(a) = a^n e^{-a\sum_{i=1}^n (x_i - 1)},$$

feltéve, hogy $x_i \geq 1$ minden $i = 1, 2, \ldots, n$ indexre. Ebből

$$L(a) = \ln l(a) = n(a + \ln a) - a\sum_{i=1}^n x_i.$$

A $\frac{d}{da}L(a) = 0$ egyenletből $\hat{a} = (\overline{x} - 1)^{-1}$ adódik, ahol (abszolút) maximuma van $L(a)$-nak. Tehát a-ra a legnagyobb valószínűségű becslés $(\overline{x} - 1)^{-1}$.

16. Egy $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ minta konkrét $x_1, x_2, \ldots, x_n$ értékeihez tartozó likelihood-függvény:

$$l(a, b) = \frac{1}{(b-a)^n},$$

feltéve, hogy $x_i \in (a, b)$ minden $i = 1, 2, \ldots, n$ indexre. Ez a függvény felülről nyilvánvalóan nem korlátos. Így az a és b paramétereknek nincs legnagyobb valószínűségű becslésük.

17. Legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_n$ az S statisztikai sokaságot leíró ξ valószínűségi változóra vonatkozó n elemű minta adott mintavétellel kapcsolatos konkrét értékei. Az $m = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ jelöléssel, az adatokhoz tartozó likelihood-függvény:

$$l(a) = \begin{cases} e^{-\sum_{i=1}^n (x_i - a)}, & \text{ha } a \leq m, \\ 0, & \text{ha } a > m, \end{cases}$$

vagyis a $(-\infty, m)$ intervallumon $l(a) > 0$ és l szigorúan monoton növekvő, az (m, ∞) intervallumon pedig $l(a) = 0$. Ezért l (abszolút) maximumhelye $\hat{a} = m$. Így az a paraméter legnagyobb valószínűségű becslése $\min\{x_1, \ldots, x_n\}$.

18. Legyenek $x_1, x_2, \ldots x_n$ az S statisztikai sokaságot leíró ξ valószínűségi változóra vonatkozó n elemű minta adott mintavétellel kapcsolatos konkrét értékei. Az $m = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ jelöléssel az ezen értékekhez tartozó likelihood-függvény:

$$l(a) = \begin{cases} \frac{1}{\operatorname{ch} b - 1} \prod_{i=1}^n \operatorname{sh} x_i, & \text{ha } b \geq m, \\ 0, & \text{ha } b < m, \end{cases}$$

vagyis a $(-\infty, m)$ intervallumon $l(a) = 0$, az (m, ∞) intervallumon pedig $l(a) > 0$, és l szigorúan monoton csökkenő. Ezért l (abszolút) maximumhelye $\hat{a} = m$. Így az a paraméter legnagyobb valószínűségű becslése $\max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

19.

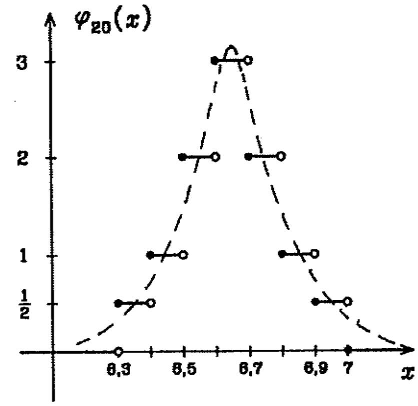
a) Az adatokhoz és a $[6.3, 7)$ intervallum

$$6.3 < 6.4 < \ldots < 7$$

beosztásához tartozó empirikus sűrűségfüggvény

$$\varphi_{20}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 6.3, \\ \frac{1}{2}, & \text{ha } 6.3 \le x < 6.4, \\ 1, & \text{ha } 6.4 \le x < 6.5, \\ 2, & \text{ha } 6.5 \le x < 6.6, \\ 3, & \text{ha } 6.6 \le x < 6.7, \\ 2, & \text{ha } 6.7 \le x < 6.8, \\ 1, & \text{ha } 6.8 \le x < 6.9, \\ \frac{1}{2}, & \text{ha } 6.9 \le x < 7, \\ 0, & \text{ha } 7 \le x. \end{cases}$$

Ábrázolva:



A szaggatott vonal az elméleti sűrűségfüggvény feltételezett jellegét szemlélteti, amely arra utal, hogy a vizsgált statisztikai sokaságot leíró valószínűségi változó a feladatbeli adatok alapján jó közelítéssel normális eloszlásúnak tekinthető.

b) A **13**. feladat szerint az (m, σ) paraméterű normális eloszlás m és σ paramétereinek legnagyobb valószínűségű becslése: $\hat{m} = \bar{x}$ és $\hat{\sigma} = s$. A feladat adataival: $\bar{x} = 6.6$ és $s = 0.144913767$.

20. $\hat{m} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln x_i$, ahol $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a ξ által leírt statisztikai sokaságra vonatkozó n elemű mintának egy adott mintavétellel kapcsolatos olyan konkrét értékei, amelyek mindegyike nagyobb 0-nál.

21. Legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a feladatbeli ξ valószínűségi változó által leírt statisztikai sokaságra vonatkozó n elemű mintának egy adott mintavétellel kapcsolatos konkrét értékei ($\xi \in \mathbf{N}$). Az ezen értékekhez tartozó likelihood-függvény logaritmusa a következő:

$$L(p) = \ln l(p) = \sum_{i=1}^{n} x_i \ln p + n \ln(1-p).$$

Ennek p szerinti elsőrendű deriváltja:

$$\frac{dL(p)}{dp} = \frac{n}{p}\overline{x} - \frac{n}{1-p}.$$

Így a likelihood-egyenletből megoldásként $\hat{p} = \frac{\overline{x}}{1+\overline{x}}$ adódik. Mivel ezen a helyen az $L(p)$ függvény p szerinti második deriváltfüggvénye negatív (és mert e derivált a $\hat{p}$ egy környezetében folytonos), ezért a p paraméter legnagyobb valószínűségű becslése: $\hat{p} = \frac{\overline{x}}{1+\overline{x}}$.

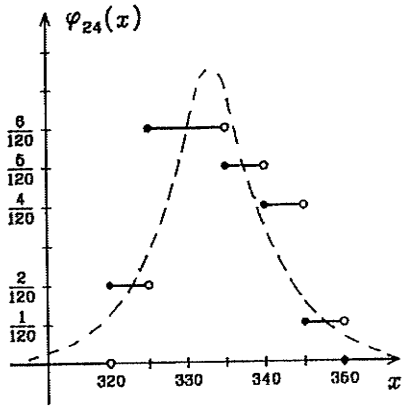
22. Jelölje ξ a villanyégők élettartamát. Mivel ξ elméleti szórása ismert ($\sigma = 180$), ezért a **T 35.20**-beli (13) képletet alkalmazzuk. Jelen feladatban $\overline{x} = 1000$ és $p = 0.01$. A **T 35.20** (14) szerinti $\Phi(u_p) = 1 - \frac{0.01}{2} = 0.995$ összefüggésből az **1**. táblázat alapján $u_p = 2.58$. Így a keresett megbízhatósági intervallum: $[953.56, 1046.44]$.

23. Mivel ξ elméleti szórása ismert, ezért ismét a **T 35.20**-beli (13) képletet alkalmazzuk. Mivel az adatok alapján $u_p = 1.96$ (l. az **1**. táblázatot) és $\overline{x} = 0.43$, ezért a keresett megbízhatósági intervallum: $[-0.4377, 1.2977]$.

24. Mivel ξ elméleti szórása ismeretlen, ezért a **T 35.21**-beli (15) képletet alkalmazzuk. Az adatok alapján $\overline{x} = 42$, $s^* = 4.7508$ és $t_p = t_{0.05} = 2.131$ (l. a **3**. táblázatot és **T 35.21** (16)-ot). Így a keresett megbízhatósági intervallum: $[39.4690, 44.5310]$.

25.

a) A ξ valószínűségi változónak az adatokhoz tartozó hisztogramja (l. az ábrát) azt mutatja, hogy ξ jó közelítéssel normális eloszlásúnak tekinthető.



b) Mivel ξ elméleti szórása ismeretlen, ezért a **T 35.21**-et alkalmazzuk. Az adatok alapján $\overline{x} = 333.4$, $s^* = 6.6589$ és $t_{0.1} = 1.714$, $t_{0.05} = 2.069$, $t_{0.01} = 2.807$. Így a 90%-os megbízhatósági intervallum: $[331.0702, 335.7297]$,
a 95%-os megbízhatósági intervallum: $[330.5877, 336.2123]$,
a 99%-os megbízhatósági intervallum: $[329.5846, 337.2154]$.

26. A **T 35.21**-beli (15) képletet alkalmazzuk. Az adatok alapján $\bar{x} = 56$ és $s^* = 12.2051$. A **3.** táblázat alapján $t_{0.05} = 2.045$, ezért a keresett megbízhatósági intervallum: $[51.4431, 60.5569]$.

27. Az empirikus várható érték: $\bar{x} = 19.3$, az empirikus szórás: $s = 4.7864$ és a korrigált empirikus szórás: $s^* = 4.9108$.
a) A ξ elméleti várható értékére vonatkozó 95%-os megbízhatósági intervallum meghatározásához **T 35.21**-et használjuk. A szabadságfok 19 és $t_p = 2.093$ (l. a **3.** táblázatot). Így a keresett megbízhatósági intervallum: $[17.0017, 21.5983]$.

b) A ξ elméleti szórására vonatkozó 90%-os megbízhatósági intervallum meghatározásához **T 35.22**-t használjuk. A szabadságfok 19, $v_{1p} = 30.144$ és $v_{2p} = 10.117$. Így a keresett megbízhatósági intervallum: $[3.8988, 6.7298]$.

28. A keresett megbízhatósági intervallumot a **T 35.22**-beli (17) képlet alapján kapjuk. Most a szabadságfok 9, $p = 0.1$ (azaz $\frac{p}{2} = 0.05$), és így a **4.** táblázatból

$$v_{1p} = 16.919, \quad v_{2p} = 3.325.$$

Mivel $s = 0.0627$, ezért a keresett 90%-os megbízhatósági intervallum: $[0.0482, 0.1087]$.

29. Mivel ξ elméleti szórása ismeretlen, a keresett megbízhatósági intervallum a ξ elméleti várható értékére a **T 35.21**-beli (15) szerinti, elméleti szórására pedig a **T 35.22**-beli (17) szerinti intervallum. Az adatok alapján a szabadságfok 9, $\bar{x} = 52.21$, $s = 9.4836$ és $s^* = 9.9966$. A **3.** táblázatból $t_{0.1} = 1.833$, a 4. táblázatból $v_{1p} = 21.666$ és $v_{2p} = 2.088$. Így a keresett megbízhatósági intervallumok az elméleti várható értékre, illetve az elméleti szórásra: $[46.4155, 58.0045]$, illetve $[6.4429, 20.7543]$.

30. Konstruáljuk meg az

$$u = \frac{\bar{\xi} - m_0}{\sigma}\sqrt{n} \tag{23}$$

próbafüggvényt, ahol $\bar{\xi}$ a mintaátlagot jelöli (l. **D 35.13** (6)). Megmutatható, hogy ha a H_0 hipotézis fennáll, akkor u standard normális eloszlású valószínűségi változó, és így bármely p valószínűséghez megadható olyan u_p pozitív szám, hogy

$$P(-u_p \leq u \leq u_p) = 1 - p,$$

ahol u_p a $\Phi(u_p) = 1 - \frac{p}{2}$ feltételből határozható meg. A jelen esetben $p = 0.05$, tehát $1 - \frac{p}{2} = 0.975$; az 1. táblázat szerint $u_{0.05} = 1.96$. Az $n = 9$ elemű minta alapján $\bar{x} = 51.0333$ és $\hat{u} = 0.0396$. Mivel $\hat{u} \in [-1.96, 1.96]$, ezért 95%-os szinten nincs szignifikáns eltérés a ξ elméleti várható értéke és a H_0 hipotézis szerinti érték között.

31. Jelöljük az ellenőrzés pillanatában mért méretet (mint valószínűségi változót) ξ-vel. Egymintás u-próbát alkalmazunk az előző megoldásban szereplő (23) szerinti próbafüggvénnyel. A hipotézis: $M(\xi) = 35$. Az **1.** táblázatból $u_{0.01} = 2.58$. Az adatok alapján $\bar{x} = 37.86$, $m_0 = 35$, $\sigma = 0.59$ és $n = 10$. Ezért $\hat{u} = 15.329$. Mivel $\hat{u} \notin [-2.58, 2.58]$, ezért az $M(\xi) = 35$ hipotézis 99%-os szignifikancia-szinten nem fogadható el.

32. Jelöljük ξ-vel az átlagsebességet. A H_0 : $M(\xi) = 55$ hipotézist vizsgáljuk az $M(\xi) \neq 55$ alternatív hipotézissel szemben. Egymintás u-próbát alkalmazunk a **30**. feladat megoldásában szereplő (23) próbafüggvénnyel. Mivel $\overline{x} = 59$ km/h, $\sigma = 17$ km/h, $n = 50$, ezért $\hat{u} = 1.6638$. Az **1**. táblázat alapján $u_{0.05} = 1.96$, és $\hat{u} \in [-1.96, 1.96]$. A hipotézis tehát 95%-os szignifikancia-szinten elfogadható, azaz 0.95 valószínűséggel állítható, hogy az egész forgalom átlagsebessége nem változott.

33. Konstruáljuk meg az

$$u = \frac{\overline{\xi} - \overline{\eta}}{\sqrt{\frac{\sigma_\xi{}^2}{n} + \frac{\sigma_\eta{}^2}{m}}} \tag{24}$$

próbafüggvényt, ahol $\overline{\xi}$ és $\overline{\eta}$ mintaátlagot jelölnek (l. **D 35.13** (6)), és n a ξ-re, m az η-ra vonatkozó minta elemeinek száma. Megmutatható, hogy ha a H_0 hipotézis igaz, akkor u standard normális eloszlású valószínűségi változó. Így

$$P(-u_p \leq u \leq u_p) = 1 - p, \text{ ha } \Phi(u_p) = 1 - \frac{p}{2}.$$

Példánkban $p = 0.01$, és így $1 - \frac{p}{2} = 0.995$. Az **1**. táblázat alapján $u_{0.01} = 2,58$. Mivel $\hat{u} = 0.0760$ adódik, ezért a H_0 hipotézis elfogadható 99%-os szignifikancia-szinten.

34. A szóban forgó méretet jelöljük az I. gép által gyártott alkatrészeknél ξ-vel, a II. gép által gyártott alkatrészeknél pedig η-val. A hipotézis: $M(\xi) = M(\eta)$. Kétmintás u-próbát alkalmazunk az előző megoldásban szereplő (24) szerinti próbafüggvénnyel. Az adatok alapján

$$n = 5, \quad \overline{x} = 3.796, \quad \sigma_\xi = 0.1169,$$
$$m = 6, \quad \overline{y} = 3.865, \quad \sigma_\eta = 0.1364,$$

ahol $\overline{x}$ a ξ-re, $\overline{y}$ pedig az η-ra vonatkozó empirikus várható értéket jelöli. Ezek alapján $\hat{u} = -0.0717$. Az **1**. táblázatból $u_{0.05} = 1.96$. Mivel $\hat{u} \in [-1.96, 1.96]$, ezért a hipotézis 95%-os szinten elfogadható, vagyis a két gép beállítását 0.95 valószínűséggel azonosnak tekinthetjük.

35. Statisztikai próbát az

$$F = \frac{\sigma_\xi^{*2}}{\sigma_\eta^{*2}} \quad \text{és} \quad \frac{1}{F} = \frac{\sigma_\eta^{*2}}{\sigma_\xi^{*2}} \tag{25}$$

próbafüggvényekkel végzünk, ahol σ_ξ^*, illetve σ_η^* a ξ-re, illetve η-ra vonatkozó minta korrigált szórását jelöli (l. **D 35.13** (8)). Kimutatható, hogy a H_0 hipotézis teljesülése esetén F egy $(m-1, n-1)$ szabadságfokú, $\frac{1}{F}$ pedig egy $(n-1, m-1)$ szabadságfokú F-eloszlású valószínűségi változó. Ha a p valószínűséghez az F-eloszlás **2**. táblázatából megkeressük azokat az F_1 és F_2 értékeket, amelyekre teljesülnek a

$$P\left(\frac{1}{F} > \frac{1}{F_1}\right) = \frac{p}{2} \quad \text{és} \quad P(F > F_2) = \frac{p}{2}$$

feltételek, akkor $F_1 < F_2$ és $P(F_1 \leq F \leq F_2) = 1 - p$. Példánkban $s_\xi^{*2} = 0.1$, $s_\eta^{*2} = 0.9$, $m = 10$ és $n = 21$. Ezen adatokkal $\hat{F} = 0.1111$. Mivel $p = 0.05$, ezért az F-eloszlás 2. táblázata alapján $\frac{1}{F_1} = 2.93$ (mivel $\frac{1}{F}$ (20, 9) szabadságfokú) és $F_2 = 2.4$ (mivel F (9, 20) szabadságfokú). Tehát a próbához szükséges intervallum $[F_1, F_2] = [0.3412, 2.4]$. Mivel $\hat{F} = 0.1111 \notin [F_1, F_2]$, ezért a ξ és η szórása között szignifikáns eltérés van 95%-os szinten (tehát a H_0 hipotézist nem fogadjuk el ezen a szinten).
A feladatot természetesen úgy is megoldhatjuk, hogy az $F' = \frac{1}{F}$ és $\frac{1}{F'} = F$ próbafüggvényekkel dolgozunk. Ekkor az F_1' és F_2' értékeket (az F_1-hez és F_2-höz hasonlóan) a $P(\frac{1}{F'} > \frac{1}{F_1'}) = \frac{p}{2}$ és a $P(F' > F_2') = \frac{p}{2}$ feltételekből határozzuk meg (az F-eloszlás táblázata alapján). Mivel $F' = \frac{1}{F}$, ezért $F_1' = \frac{1}{F_2}$ és $F_2' = \frac{1}{F_1}$. Így $[F_1', F_2'] = [\frac{1}{F_2}, \frac{1}{F_1}]$. A feladat adatai alapján $[F_1', F_2'] = [0.4167, 2.93]$. Mivel $\hat{F}' = 9 \notin [F_1', F_2']$, a vizsgált hipotézist 95%-os szignifikancia-szinten nem fogadhatjuk el, összhangban a feladat első megoldásával.
Megjegyezzük, hogy a táblázatból kiolvasott F_1 és F_2 (illetve F_1' és F_2') értékek közül F_1 (illetve F_1') egynél kisebb, F_2 (illetve F_2') pedig egynél nagyobb. F-próbánál ezért úgy is eljárhatunk, hogy az

$$F = \max\left\{\frac{\sigma_\xi^{*2}}{\sigma_\eta^{*2}}, \frac{\sigma_\eta^{*2}}{\sigma_\xi^{*2}}\right\} \tag{26}$$

próbafüggvénnyel dolgozunk, és a hipotézist elfogadjuk, ha $\hat{F} \leq F_p$, ahol F_p-t az F-eloszlás 2. táblázatából olvassuk ki a szignifikancia-szint által meghatározott p valószínűség és (f_1, f_2) szabadságfok mellett, ahol f_1 az F számlálóját, f_2 pedig az F nevezőjét meghatározó valószínűségi változóra vonatkozó minta elemszámának eggyel csökkentett értéke. Mivel példánkban $s_\eta^{*2} > s_\xi^{*2}$, ezért a próbafüggvény $F = \frac{\sigma_\eta^{*2}}{\sigma_\xi^{*2}}$, és $f_1 = 20$, $f_2 = 9$. Így $F_{0.05} = 2.93$. Mivel $\hat{F} = 9 > F_{0.05}$, ezért a vizsgált hipotézis 95%-os szignifikancia-szinten nem fogadható el.

36. Jelöljük az egyes puskáknál véletlenszerűen leadott lövés eredményét ξ-vel, illetve η-val. A hipotézis: $D(\xi) = D(\eta)$. F-próbát alkalmazunk az előző megoldásban szereplő (26) szerinti próbafüggvénnyel. Az adatok alapján $s_\xi^{*2} = 0.7667 < s_\eta^{*2} = 0.9889$. Az $F = \frac{\sigma_\eta^{*2}}{\sigma_\xi^{*2}}$ próbafüggvénnyel dolgozva, $\hat{F} = 1.2896$. A 2. táblázatból az $(f_1 = 9, f_2 = 9)$ szabadságfokokhoz az $F_{0.05} = 3.18$ érték tartozik. Mivel $\hat{F} < F_{0.05}$, ezért a $D(\xi) = D(\eta)$ hipotézist 95%-os szignifikancia-szinten elfogadjuk.

37. Konstruáljuk meg a

$$t = \frac{\overline{\xi} - m_0}{s^*}\sqrt{n} \tag{27}$$

próbafüggvényt, amelyben n a mintaelemek száma és s^* az adatokhoz tartozó korrigált empirikus szórás. Megmutatható, hogy a H_0 hipotézis teljesülése esetén t egy $(n-1)$ szabadságfokú t-eloszlású valószínűségi változó, és ezért a t-eloszlás **3**. táblázatából olvasható ki az a t_p érték, amellyel

$$P(-t_p \leq t \leq t_p) = 1 - p$$

teljesül. Mivel jelen esetben $p = 0.1$ és a szabadságfok 9, ezért $t_{0.1} = 1.833$. A minta alapján $\bar{x} = 23$, $s^* = 6.4979$, és így $\hat{t} = -1.9466 \notin [-1.833, 1.833]$. Ezért az $M(\xi) = 27$ hipotézist nem fogadjuk el 90%-os szignifikancia-szinten.

38. Egymintás t-próbát alkalmazunk az előző megoldásban szereplő (27) szerinti próbafüggvénnyel. A hipotézis: $M(\xi) = 8.5$. Esetünkben $\bar{x} = 9.1$, $m_0 = 8.5$, $s^* = 4.2$, $n = 30$ és $p = 0.05$. Ezekből $\hat{t} = 0.7825$. Az $n-1 = 29$ szabadságfokhoz a **3**. táblázatból $t_{0.05} = 2.045$ érték tartozik, és $\hat{t} \in [-2.045, 2.045]$. Ezért a hipotézist 95%-os szignifikancia-szinten fenntarthatjuk. (A minta elemszáma azonban nem elegendő nagy ahhoz, hogy a gyári adatok további vizsgálata nélkül elfogadjuk a hipotézist.)

39. Egymintás t-próbát alkalmazunk a **37**. feladat megoldásában szereplő (27) szerinti próbafüggvénnyel. A hipotézis: $M(\xi) = 9$. Az adatok alapján $\bar{x} = 9.1$, $s_\xi^* = 0.8756$, $n = 10$, és $\hat{t} = 0.3612$. Mivel a **3**. táblázatban az $n - 1 = 9$ szabadságfokhoz és $p = 0.01$-hez a $t_{0.01} = 3.25$ érték tartozik, és mert $\hat{t} \in [-3.25, 3.25]$, ezért 99%-os szignifikancia-szinten elfogadjuk az $M(\xi) = 9$ hipotézist.

40. Megmutatható, hogy ha $D(\xi) = D(\eta)$ és a H_0 hipotézis fennáll, akkor

$$t = \frac{\bar{\xi} - \bar{\eta}}{\sqrt{(n-1)s_\xi^{*2} + (m-1)s_\eta^{*2}}} \sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}} \tag{28}$$

$n + m - 2$ szabadságfokú t-eloszlású valószínűségi változó.
Ha pedig $D(\xi) \neq D(\eta)$ és a H_0 hipotézis teljesül, akkor

$$t = \frac{\bar{\xi} - \bar{\eta}}{\sqrt{\frac{s_\xi^2}{n} + \frac{s_\eta^2}{m}}} \tag{29}$$

közelítően olyan t-eloszlást követ, melynek f szabadságfokát a következő képlettel határozzuk meg:

$$\frac{1}{f} = \frac{c^2}{m-1} + \frac{(1-c)^2}{n-1}, \tag{30}$$

ahol

$$c = \frac{\frac{s_\eta^2}{m}}{\frac{s_\xi^2}{n} + \frac{s_\eta^2}{m}}; \tag{31}$$

ha f nem egész szám, akkor az f-hez legközelebb álló pozitív egész számmal dolgozunk. (Megjegyezzük, hogy ha n és m elég nagyok – például mindkettő nagyobb 40-nél –, akkor t már közelítőleg normális eloszlású valószínűségi változó. A példában szereplő adatok alapján alkalmazzunk először F-próbát. Ennek eredményeként a $D(\xi) = D(\eta)$ feltételt nem fogadhatjuk el

95%-os szignifikancia-szinten. Így a $D(\xi) \neq D(\eta)$ feltétel miatt a (25) szerinti próbafüggvénnyel dolgozunk tovább. A példabeli adatok alapján $\overline{x} = 17.1$, $s_\xi = 3.986$, $\overline{y} = 17.2$ és $s_\eta = 1.4236$. Így $c = 0.07897$, s ebből $f = 10.5466$. Mivel f nem egész, ezért a hozzá legközelebb álló egész számmal, azaz $f = 11$-el dolgozunk. A **3.** táblázat szerint az $f = 11$ szabadságfokhoz és $p = 0.05$ valószínűséghez a 2.201 érték tartozik. Mivel $\hat{t} = -0.0762 \in [-2.201, 2.201]$, ezért ξ és η várható értéke között nincs szignifikáns eltérés 95%-os szinten.

41. Jelöljük ξ-vel, illetve η-val az I., illetve a II. gépen előállított alkatrészek vizsgált méretét. A hipotézis: $M(\xi) = M(\eta)$. Mivel $D(\xi) \neq D(\eta)$, ezért kétmintás t-próbát alkalmazunk az előző megoldásban szereplő (29) szerinti próbafüggvénnyel. Az adatok alapján $n = 5$, $m = 6$, $\overline{x} = 3.796$, $\overline{y} = 3.865$, $s_\xi^2 = 0.0137$, $s_\eta^2 = 0.0186$. Így $\hat{t} = -0.9029$. Az f szabadságfokot (30) alapján határozzuk meg a (31) szerint számítható képlettel: $c = 0.4802$; ezzel a c-vel $f = 8.7976$. Mivel f nem egész, ezért 9 szabadságfokkal számolunk. A **3.** táblázat alapján $t_{0.05} = 2.262$. Mivel $\hat{t} \in [-2.262, 2.262]$, ezért a hipotézist 99%-os szinten elfogadjuk.

42. A χ^2 próbánál teljes eseményrendszert alkotó A_i, $i = 1, 2, \dots r$ eseményekkel kapcsolatban azt a hipotézist vizsgáljuk, hogy adott p_i ($\sum_{i=1}^r p_i = 1$) valószínűségek mindegyikére teljesül-e a $H_0 : P(A_i) = p_i$ hipotézis $100(1-p)$%-os szignifikancia-szinten $(0 < p < 1)$. Az események bekövetkezésének gyakoriságára vonatkozóan végezzünk N számú megfigyelést. Jelölje q_i az A_i esemény bekövetkezésének gyakoriságát; nyilván $\sum_{i=1}^r q_i = N$. Minden q_i binomiális eloszlású valószínűségi változónak tekinthető Np_i várható értékkel. Meg lehet mutatni, hogy ha a H_0 hipotézis teljesül, akkor a

$$\chi = \sum_{i=1}^{r} \frac{(q_i - Np_i)^2}{Np_i} \tag{32}$$

$N \to \infty$ esetén $(r-1)$ szabadságfokú χ^2-eloszlású valószínűségi változóhoz tart. Így, ha r rögzített és N elég nagy, akkor χ közelítőleg $r-1$ szabadságfokú χ^2-eloszlású valószínűségi változónak tekinthető. A H_0 hipotézis vizsgálatához a $J = [0, \chi_{r-1}(p)]$ intervallumot konstruáljuk meg, ahol $\chi_{r-1}(p)$-t a χ^2-eloszlás **4.** táblázatából vesszük (az adott p valószínűséghez és $r-1$ szabadságfokhoz). Példánkban a

$$H_0 : p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$$

hipotézist vizsgáljuk 95%-os szignifikancia-szinten, ahol p_1 a fej, p_2 pedig az írás dobásának valószínűségét jelöli. A próbafüggvénynek a konkrét mintavétellel kapcsolatos értékére $\hat{\chi} = \frac{(485-1000\frac{1}{2})^2}{1000\frac{1}{2}} + \frac{(515-1000\frac{1}{2})^2}{1000\frac{1}{2}} = 0.45 + 0.45 = 0.9$ adódik, míg a **4.** táblázatból az $r - 1 = 1$ szabadságfokhoz és $p = 0.05$ valószínűséghez a $\chi_1(0.05) = 3.841$ érték tartozik. Így a hipotézisvizsgálathoz tartozó intervallum $J = [0, 3.841]$. Mivel $\hat{\chi} = 0.9 \in J$, ezért a H_0 hipotézis elfogadható 95%-os szignifikancia-szinten, azaz ezen a szignifikancia-szinten az érme szabályosnak tekinthető.

43. χ^2-próbát alkalmazunk az előző megoldásban szereplő (32) szerinti próbafüggvénnyel. Jelölje A_i azt az eseményt, hogy a dobás eredménye i, $(i = 1,2,3,4,5,6)$. A hipotézis: $P(A_i) = p_i = \frac{1}{6}$, $(i = 1,2,3,4,5,6)$. Jelen esetben (az előző megoldás jelöléseit használva) $N = 1000$, $p = 0.05$, $q_1 = 175$, $q_2 = 158$, $q_3 = 166$, $q_4 = 150$, $q_5 = 182$, $q_6 = 169$. Így $\hat{\chi} = 3.9800$. A **4.** táblázat alapján (a szabadságfok $f = 5$) $\chi_5(0.05) = 11.07$. Mivel $\hat{\chi} < 11.07$, ezért 95%-os szignifikancia-szinten a hipotézist elfogadjuk.

44. Az $A_i = \{\xi = x_i\}$ események választásával χ^2-próba alkalmazható (l. **42.** feladat).

45. Osszuk fel a $(-\infty, \infty)$ intervallumot a $z_1 < z_2 < \ldots < z_r$ osztópontokkal r számú

$$J_1 = (-\infty, z_1), J_2 = [z_1, z_2), \ldots, J_r = [z_{r-1}, \infty)$$

részintervallumra. Az $A_i = \{\xi \in J_i\}$, $(i = 1,2,\ldots,r)$ események teljes eseményrendszert alkotnak; az A_i gyakoriságát jelöljük q_i-vel. Legyen $p_1 = F(z_1)$, $p_i = F(z_i) - F(z_{i-1})$, $(i = 2,3,\ldots,r-1)$, $p_r = 1 - F(z_{r-1})$; az eredeti hipotézis helyett a kissé módosított

$$H_0' : P(A_i) = p_i \tag{33}$$

hipotézist vizsgáljuk. Ha a felosztást úgy végezzük, hogy minden i-re $q_i \leq 10$ teljesüljön, akkor ezen hipotézis eldöntésére a **42.** feladat szerinti χ^2-próba alkalmazható.

46. Tiszta illeszkedésvizsgálatot végzünk. Az előző feladat szerint tekintsük a számegyenesnek a táblázatban szereplő intervallumok szerinti beosztását, és használjuk az $A_i = \{\xi \in J_i\}$, $(i = 1,2,\ldots,11)$ jelölést. Ha a feladatbeli H_0 hipotézis teljesül, akkor $p_i = P(A_i)$ jelöléssel

$$p_1 = P(\xi < -\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}(-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$

$$p_2 = P(\xi < -\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}) - P(\xi < -\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}) =$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}(-\operatorname{tg}\frac{\pi}{8})\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}(-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4})\right) = \frac{1}{8},$$

és hasonlóan

$$p_3 = p_9 = \frac{1}{24}, \quad p_4 = p_8 = \frac{1}{48}, \quad p_5 = p_7 = \frac{1}{80},$$

$$p_6 = \frac{1}{10}, \quad p_{10} = \frac{1}{8}, \quad p_{11} = \frac{1}{4}.$$

Az előző megoldásbeli (33) szerinti módosított hipotézis

$$H_0' : \; P(A_i) = p_i \quad (i = 1,2,\ldots,11).$$

A **42.** feladat megoldásában szereplő (32) szerinti próbafüggvénnyel számolva, $\hat{\chi} = 0.9063$. Mivel a részintervallumok száma 11, ezért a szabadságfok 10. A **4.** táblázatból $\chi_{10}(0.05) = 18.307$. Mivel $\hat{\chi} < 18.307$, ezért a H_0' és így a H_0 hipotézist 95%-os szignifikancia-szinten elfogadjuk.

47. Ha a $(-\infty,\infty)$ intervallumot a $z_1 < z_2 < \ldots < z_r$ osztópontokkal r számú

$$J_1 = (-\infty, z_1), J_2 = [z_1, z_2), \ldots, J_r = [z_{r-1}, \infty)$$

részintervallumokra osztva a J_i részintervallumba eső mintaelemek száma a ξ-re vonatkozóan g_i, az η-ra vonatkozóan h_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, akkor a H_0 hipotézis fennállásakor a

$$\Phi = mn \sum_{i=1}^{r} \frac{(\frac{g_i}{n} - \frac{h_i}{m})^2}{g_i + h_i} \tag{34}$$

próbafüggvény $n \to \infty$ és $m \to \infty$ esetén $(r-1)$-szabadságfokú χ^2-eloszlású valószínűségi változóhoz konvergál. Ha tehát n és m elég nagy, akkor χ^2-próba alkalmazható a homogenitás-vizsgálatra. Példánkban $p = 0.05$, $n = 100$, $m = 200$, $r = 10$, $z_i = -40 + (i-1)10$, $(i = 1, 2, \ldots, 9)$, továbbá $g_i = 10$ $(i = 1, 2, \ldots, 10)$, $h_j = 20$ $(j = 1, 2, \ldots 8)$, $h_9 = 15$, $h_{10} = 25$. A 4. táblázat alapján (figyelembe véve, hogy a szabadságfok 9) a feladatbeli hipotézis vizsgálatához szükséges intervallum a következő: $J_0 = [0, 16.9]$. A (34) próbafüggvénynek az adatainkhoz tartozó $\hat{\Phi}$ értékére

$$\hat{\Phi} = 20000 \left(\frac{(\frac{10}{100} - \frac{15}{200})^2}{25} + \frac{(\frac{10}{100} - \frac{25}{200})^2}{35} \right) = 0.8571$$

adódik, azaz $\hat{\Phi} \in J_0$. Így az a H_0 hipotézis, hogy ξ és η azonos eloszlásúak, elfogadható 95%-os szignifikancia-szinten.

48. Homogenitás-vizsgálatot végzünk. Tekintsük a számegyenesnek az $1.5 < 2.5 < 3.5 < 4.5$ osztáspontokkal meghatározott beosztását. Az előző feladat jelöléseit alkalmazva

$$g_1 = 2, \quad g_2 = 20, \quad g_3 = 59, \quad g_4 = 15, \quad g_5 = 4,$$

$$h_1 = 10, \quad h_2 = 48, \quad h_3 = 69, \quad h_4 = 11, \quad h_5 = 12.$$

Az előző megoldásban szereplő (34) szerinti próbafüggvénnyel dolgozunk. A szabadságfok 4. Mivel a 4. táblázatból $\chi_4(0.05) = 9.488$, és a próbafüggvénynek az adatokhoz tartozó értéke $\hat{\Phi} = 12.7702$ (azaz $\hat{\Phi} > \chi_4(0.05)$), ezért azt a hipotézist, hogy a ξ és η azonos eloszlású, 95%-os szignifikancia-szinten nem fogadjuk el.

49. Megmutatható, hogy a H_0 hipotézis teljesülésekor az

$$\Omega = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{(k_{ij} - np_i q_j)^2}{np_i q_j} \tag{35}$$

próbafüggvény $n \to \infty$ esetén $(rs-1)$ szabadságfokú χ^2-eloszlású valószínűségi változóhoz tart. Ha tehát n elég nagy, akkor a **42.** feladat szerinti χ^2-próba alkalmazható a függetlenség-vizsgálatra. A példánkban szereplő adatokkal: $\chi_{29}(0.05) = 42.557$ és $\hat{\Omega} = 5$. Mivel $\hat{\Omega} < \chi_{29}(0.05)$, ezért a hipotézist 95%-os szignifikancia-szinten elfogadjuk.

50. Függetlenségvizsgálatot végzünk az előző feladat megoldásában szereplő (35) szerinti próbafüggvénnyel. Tekintsük a számegyenesnek a $0.5 < 1.5 < 2.5 < 3.5$ osztáspontok által meghatározott beosztását. Legyen

$$A_1 = \{\xi < 0.5\}, \quad A_2 = \{0.5 \le \xi < 1.5\}, \dots, A_5 = \{3.5 \le \xi\},$$

valamint

$$B_1 = \{\eta < 0.5\}, \quad B_2 = \{0.5 \le \eta < 1.5\}, \dots, B_5 = \{3.5 \le \eta\}.$$

A hipotézis: $P(A_iB_j) = P(A_i)P(B_j)$, $i, j = 1, 2, \dots 5$. A szabadságfok 24. Mivel a χ^2-eloszlás 4. táblázatából kiolvasott $\chi_{24}(0.01) = 42.980$ érték kisebb a próbafüggvénynek a feladat adatai szerinti $\hat{\Omega} = 418.458333$ értéknél, ezért a hipotézist 99%-os szignifikancia-szinten nem fogadjuk el.

51. a) A kimutatandó állítás egyenértékű azzal, hogy ξ és $\ln\eta$ között lineáris kapcsolat tételezhető fel, ugyanis $\eta \approx ae^{b\xi}$ akkor és csak akkor, ha $\ln\eta \approx b\xi + \ln a$. A

ξ	1	2	3	4	5	6
$\ln\eta$	2.079	3.091	4.078	5.1	6.105	7.098

táblázat adatai alapján ξ és $\ln\eta$ empirikus korrelációs együtthatója (l. **D 35.34** (2)) $\varrho(\xi, \ln\eta) = 0.999991512$, ezért ξ és $\ln\eta$ között valóban feltételezhető lineáris kapcsolat.
b) Alkalmazzunk ξ-re és $\ln\eta$-ra lineáris regressziót. Az adatokhoz tartozó empirikus regressziós egyenes $Y = BX + A$ egyenletében szereplő együtthatók (az **M 35.35**-beli (21) egyenletrendszer felhasználásával): $A = 1.083266667$, $B = 1.002971429$. Így az empirikus regressziós görbe egyenlete $\ln y = 1.004885714x + 1.073733333$. Az $a = e^A$ jelöléssel $a = 2.954314576$. Tehát

$$\eta \approx 2.954314576e^{1.002971429\xi}.$$

52. Jelölje ξ egy véletlenszerűen kiválasztott készítmény kódszámát, η pedig a daganat súlycsökkenését a készítmény hatására. Mivel ξ és η empirikus korrelációs együtthatója $\varrho(\xi, \eta) = -0.4967$, ezért ξ és η között nem tételezhető fel lineáris kapcsolat. Alkalmazzunk kvadratikus regressziót. Az adatokhoz tartozó empirikus regressziós parabola $y = ax^2 + bx + c$ egyenletének együtthatói az **M 35.35**-beli (22) szerint a következő egyenletrendszer megoldásai:

$$\begin{aligned} 2533.3a + 302.5b + 38.5c &= 0.988 \\ 302.5a + 38.5b + 5.5c &= 5.051 \\ 38.5a + 5.5b + c &= 35.833 \end{aligned}$$

Ebből $a = 13.8968$, $b = -176.1416$, $c = 469.5838$. Az empirikus regressziós parabola egyenlete tehát: $y = 13.8968x^2 - 176.1416x + 469.5838$.

53. Mivel $\varrho(\xi, \eta) = 0.998143876$, ezért lineáris regresszió alkalmazható. Az empirikus regressziós egyenes egyenlete: $y = 1.503636364x + 0.018181818$.

54. Mivel $\varrho(\xi,\eta) = 0.995606933$, ezért ξ és η között lineáris kapcsolat feltételezhető. Az empirikus regressziós egyenes egyenlete:

$$y = 0.011742857x + 0.007185714.$$

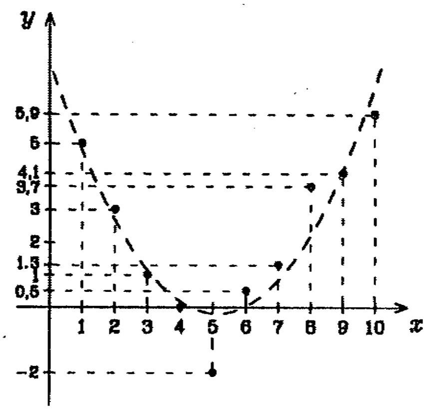
Az ebből adódó értékek a ξ függvényében:

ξ	1	2	2.5	3	3.5	4
$y(\xi)$	0.019	0.031	0.037	0.042	0.048	0.054

55. Mivel $\varrho(\xi,\eta) = 0.983935693$, ezért ξ és η között lineáris kapcsolat feltételezhető. Az empirikus regressziós egyenes egyenlete:

$$y = 12.07327586x - 0.504310344.$$

56. Mivel $\varrho(\xi,\eta) = 0.263497339$, ezért ξ és η között nem indokolt lineáris kapcsolatot feltételezni. Az adatokat ábrázolva, a következő grafikont kapjuk:



A grafikon alapján ξ és η között másodfokú kapcsolat feltételezhető. Az M **35.35**-beli (22) szerinti egyenletrendszer

$$\begin{aligned} 2533.3a + 302.5b + 38.5c &= 121.66 \\ 302.5a + 38.5b + 5.5c &= 14.16 \\ 38.5a + 5.5b + c &= 2.25. \end{aligned}$$

Ebből $a = 0.291666666$, $b = -2.991969697$, $c = 7.476666667$. Az empirikus regressziós parabola egyenlete:

$$y = 0.291666666x^2 - 2.991969697 + 7.476666667.$$

57. A

ξ^2	1	2.25	4	6.25	9	12.25	16
η	0.9	4.7	10.1	16.5	25	35.1	45.9

táblázat alapján $\varrho(\xi^2, \eta) = 0.999938259$; eszerint ξ^2 és η között lineáris kapcsolat, s így ξ és η között $\eta \approx a\xi^2 + b$ kapcsolat feltételezhető. A ξ^2 és η-ra vonatkozó lineáris regresszió alkalmazásával $a = 3.009292649$,
$b = -2.074514563$. Így

$$\eta \approx 3.009292649x^2 - 2.074514563.$$

58. Az

$\ln\xi$	0	0.693	1.099	1.386	1.609	1.792	1.945	2.079	2.197	2.303
η	2	5.4	7.4	8.8	9.9	10.9	11.6	12.2	13	13.5

táblázat alapján $\varrho(\ln\xi, \eta) = 0.99983006$, ami az $\ln\xi$ és η közötti lineáris kapcsolatra utal. Az $\ln\xi$-re és η-ra alkalmazott lineáris regresszió alapján:

$$\eta \approx 4.9814518641\ln\xi + 1.94651325.$$

59. Mivel $\varrho(\xi, \eta) = 0.919206148$, ezért ξ és η között lineáris kapcsolat feltételezhető. Az empirikus regressziós egyenes egyenlete:

$$y = 1.010989011x + 6.540659341.$$

60. Mivel $\varrho(\xi, \eta) = -0.982684604$, ezért ξ és η között lineáris kapcsolat feltételezhető. Az empirikus regressziós egyenes egyenlete:

$$y = -0.172167832x + 27.41631702.$$

1. táblázat: Standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye ($\Phi(x)$)

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

2. táblázat: (f_1, f_2) szabadságfokú F-eloszlás (95%-os szignifikancia-szint)

f_2 \ f_1	1	2	3	4	5	6	8	9	20	24	∞
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	238.9	241.0	248.0	249.0	254.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.37	19.38	19.44	19.45	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.84	8.81	8.66	8.64	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.04	6.00	5.80	5.77	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.82	4.78	4.56	4.53	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.15	4.10	3.87	3.84	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.73	3.68	3.44	3.41	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.44	3.39	3.15	3.12	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.23	3.18	2.93	2.90	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.07	3.02	2.77	2.74	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	2.95	2.90	2.65	2.61	2.40
12	4.75	3.88	3.49	3.26	3.11	3.00	2.85	2.80	2.54	2.50	2.30
13	4.67	3.80	3.41	3.18	3.02	2.92	2.77	2.72	2.46	2.42	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.70	2.65	2.39	2.35	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.64	2.59	2.33	2.29	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.59	2.54	2.28	2.24	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.55	2.50	2.23	2.19	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.51	2.46	2.19	2.15	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.48	2.43	2.15	2.11	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.45	2.40	2.12	2.08	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.42	2.35	2.07	2.05	1.78
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.36	2.30	2.02	1.98	1.73
26	4.22	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.32	2.27	1.99	1.95	1.69
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.44	2.29	2.24	1.96	1.91	1.65
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.18	2.12	1.84	1.79	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.52	2.37	2.25	2.10	2.04	1.75	1.70	1.39
∞	3.84	2.99	2.60	2.37	2.21	2.10	1.94	1.88	1.52	1.52	1.00

3. táblázat: t-eloszlás

szabadságfok	90% (p = 0.1)	95% (p = 0.05)	99% (p = 0.01)
1	6.314	12.706	63.657
2	2.920	4.303	9.925
3	2.353	3.182	5.841
4	2.132	2.776	4.604
5	2.015	2.571	4.032
6	1.943	2.447	3.707
7	1.895	2.365	3.499
8	1.860	2.306	3.355
9	1.833	2.262	3.250
10	1.812	2.228	3.169
11	1.796	2.201	3.106
12	1.782	2.179	3.055
13	1.771	2.160	3.012
14	1.761	2.145	2.977
15	1.753	2.131	2.947
16	1.746	2.120	2.921
17	1.740	2.110	2.898
18	1.734	2.101	2.878
19	1.729	2.093	2.861
20	1.725	2.086	2.845
21	1.721	2.080	2.831
22	1.717	2.074	2.819
23	1.714	2.069	2.807
24	1.711	2.064	2.797
25	1.708	2.060	2.787
26	1.706	2.056	2.779
27	1.703	2.052	2.771
28	1.701	2.048	2.763
29	1.699	2.045	2.756
30	1.697	2.042	2.750
40	1.684	2.021	2.704
60	1.671	2.000	2.660
120	1.658	1.980	2.617
∞	1.645	1.960	2.576

4. táblázat: χ^2-eloszlás

szabadságfok	95% (p = 0.05)	97.5% (p = 0.025)	99% (p = 0.01)	99.5% (p = 0.005)
1	3.841	5.024	6.635	7.879
2	5.991	7.378	9.210	10.597
3	7.815	9.348	11.345	12.838
4	9.488	11.143	13.277	14.860
5	11.070	12.832	15.086	16.750
6	12.592	14.449	16.812	18.548
7	14.067	16.013	18.475	20.278
8	15.507	17.535	20.090	21.955
9	16.919	19.023	21.666	23.589
10	18.307	20.483	23.209	25.188
11	19.675	21.920	24.725	26.757
12	21.026	23.337	26.217	28.300
13	22.362	24.736	27.688	29.819
14	23.685	26.119	29.141	31.319
15	24.996	27.488	30.578	32.801
16	26.296	28.845	32.000	34.267
17	27.587	30.191	33.409	35.718
18	28.869	31.526	34.805	37.156
19	30.144	32.852	36.191	38.582
20	31.410	34.170	37.566	39.997
21	32.671	35.479	38.932	41.401
22	33.924	36.781	40.289	42.796
23	35.172	38.076	41.638	44.181
24	36.415	39.364	42.980	45.558
25	37.652	40.646	44.314	46.928
26	38.885	41.923	45.642	48.290
27	40.113	43.194	46.963	49.645
28	41.337	44.461	48.278	50.993
29	42.557	45.722	49.588	52.336
30	43.773	46.979	50.892	53.672

H I B A J E G Y Z É K a 075005 sz. jegyzethez

Oldal : Feladat: Sor : Helyesen:

Feladatok:

31-5	42.	5.	d) a szigorúan monoton növekvő A$\rightarrow$ B leképezések számát!
32-1	D 32.5	1-3.	Az $A_1, A_2, ... \subseteq \Omega$ események összességét teljes eseményrendszernek nevezzük, ha $A_1 + A_2 + ... = \Omega$, és $A_i A_j = \varnothing \quad i \neq j$.
32-5	D 32.11	1.	...véges számú, egyenlő valószínűségű elemi esemény....
33-2	T 33.9	4-6.	...u-val jelölve t szintén monoton és differenciálható inverzét: $f_\eta(y) = f_\xi(u(y)) \cdot \lvert u'(y) \rvert$.
33-13	D 33.20	6.	...olyan pozitív egészek, amelyekre $0 \le k \le n \le N$, és ha $k>M$ ill. n-k>N-M, akkor $\binom{M}{k}$ ill. $\binom{N-M}{n-k}$ egyenlő nullával..
33-14	T 33.29	2.	$D(\xi) = \frac{1}{\lambda}$
34-9	33.	1.	...értékei: -2, -1, 0, 1, 2, 3;
34-19	95.	5.	c) $M(\xi_{10} \vert \xi_2 = 120)$,
34-19	100.	3-4.	*Az* a) *ill.* b) *alkérdéseket fel kell cserélni.*

Megoldások:

31.2	13.	6.	$3^5 - \binom{3}{2} 2^5 + 3 = 150$
31.5	42.	8.	...növekvő és csökkenő leképezések száma összesen: $C_n^{k,i} = \binom{n+k-1}{k} \cdot 2 - n$
32.23	142.	5.	P(legfeljebb egy selejtes)= $(1-p_s)^5 + 5(1-p_s)^4 p_s$
33.2	9.	7.	19/20, ha $3 < x \le 4$,
33.6	27.	2.	$=P(0 \le \xi < (x-3)^2)$
34.1	1.	3-4.	$\frac{k-1}{6}$ ill. $\frac{l-1}{6}$
34.15	46.	6.	$a<t<b$-nek és x-b<t<x-a-nak is teljesülnie kell.
34.17	49.	3.	$\pi \cdot f_{\xi+\eta}(x) = ...$
34.25	78.	14-16..	(Ugyanis, ha egy valószínűségi változó normális eloszlású, akkor 0.5 valószínűséggel lesz a várható értékénél kisebb, és 0.5 valószínűséggel lesz annál nagyobb.)
34.28	82.		*utolsó 3 sorában minden* ε *helyett d betű kell, továbbá* $I_8 = P(AT_8)$
34.29	86.	7.	$F(y \mid x) = ...\begin{cases} 0, & 0 < x < 2, \quad y < \frac{3}{2}x \\ \dots & \dots \quad \dots \end{cases}$
34.31	94.	2-4.	$f(x \mid y) = ... = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x^2 - 2xy + y^2)}$, *és ennek alapján* $M(\xi \mid \eta = y) = y$, $M(\xi \mid \eta = 2) = 2$, $M(\xi \mid \eta) = \eta$.