KOMPLEX FÜGGVÉNYEK, DIFFERENCIÁLEGYENLETEK VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

Matematika A3k

NAGY ATTILA

EGYETEMI JEGYZET

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Algebra Tanszék

2022

Ez a jegyzet a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Közlekedésmérnöki és Járműmérnöki Karának hallgatói számára meghirdetett, Szász Gábor Matematika II és Matematika III tankönyveire épülő tematikájú Matematika A3K című tantárgy általam tartott előadásainak anyagát tartalmazza.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Komplex függvények I

1.1. Komplex függvények. Határérték és folytonosság

Definíció 1.1.1 *Egyváltozós komplex függvényen olyan f függvényt értünk, amelynek értelmezési tartománya és értékkészlete a komplex számok halmazának részhalmaza, azaz $Dom f \subseteq \mathbb{C}$ és $Ran f \subseteq \mathbb{C}$. Komplex függvényen egyváltozós komplex függvényt értünk.*

Megjegyzés 1.1.2 Ha az előző definícióban, speciálisan, $Dom f \subseteq \mathbb{R}$, és $Ran f \subseteq \mathbb{R}$ teljesül, akkor az egyváltozós valós függvény fogalmához jutunk.

Megjegyzés 1.1.3 *Ha egy f komplex függvény z független változóját felbontjuk valós és képzetes részre, azaz $z = x + iy$, akkor a $f(z)$ függvényérték valós és képzetes része a z valós részének és képzetes részének kétváltozós valós függvényei, azaz $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.*

Definíció 1.1.4 *(Heine-féle definíció) Akkor mondjuk, hogy az f komplex függvény értelmezési tartományának valamely z_0 torlódási pontjában f-nek van határértéke, és ez a határérték az L komplex szám, ha f értelmezési tartományának z_0-hoz konvergáló tetszőleges z_n (n=1, ...) pontsorozata esetén az $f(z_n)$ fügvényértékek sorozata L-hez konvergál.*

Definíció 1.1.5 *(Cauchy-féle definíció) Akkor mondjuk, hogy az f komplex függvény értelmezési tartományának valamely z_0 torlódási pontjában f-nek van határértéke, és ez a határérték az L komplex szám, ha minden $\epsilon > 0$ valós számhoz megadható olyan $\delta > 0$ valós szám, hogy f értelmezési tartományának minden olyan z pontjára, amely eleget tesz a $|z - z_0| < \delta$ feltételnek, az $|f(z) - L| < \epsilon$ egyenlőtlenség teljesül.*

Megjegyzés 1.1.6 A függvényhatárérték Heine-féle és Cauchy-féle definíciói egymással ekvivalensek.

Ha az $f(z)$ komplex függvény z_0 pontbeli határértéke L, akkor ezt $L = \lim_{z\to z_0} f(z)$ módon jelöljük.

Tétel 1.1.7 *Egy $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ komplex függvénynek a komplex számsík valamely $z_0 = x_0 + iy_0$ pontjában akkor és csak akkor határértéke az $L = a + ib$ komplex szám (azaz $L = \lim_{z\to z_0} f(z)$), ha*

$$a = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y), \quad \text{és} \quad b = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y).$$

Példa 1.1.8 Határozzuk meg az

$$f(z) = \frac{(x+2)(\sqrt{x^2+y^2} - y)}{x^2} + iy\cos(2 + 5xy - 2y)$$

komplex függvény határértékét a $z_0 = i$ pontban!

Megoldás. Az előző tétel alapján az $L = a + ib$ határéték a valós és b képzetes részére:

$$a = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \frac{(x+2)(\sqrt{x^2+y^2} - y)}{x^2} =$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \frac{(x+2)\left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right)\left(\sqrt{x^2+y^2}-y\right)}{x^2\left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right)} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \frac{(x+2)}{\sqrt{x^2+y^2}+y} = \frac{2}{2} = 1$$

és

$$b = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} y\cos(2+5xy-2y) = 1.$$

Tehát

$$\lim_{z\to i} f(z) = 1+i.$$

Definíció 1.1.9 *Egy f komplex függvényről akkor mondjuk, hogy a komplex számsík valamely z_0 pontjában folytonos, ha*

(1) f értelmezve van z_0-ban,

(2) f-nek van határértéke z_0-ban,

(3) $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Tétel 1.1.10 *Egy $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ komplex függvény akkor és csak akkor folytonos egy $z_0 = x_0 + iy_0$ pontban, ha az $u(x,y)$ és $v(x,y)$ függvények folytonosak az (x_0, y_0) pontban.*

Bizonyítás A bizonyítás a 1.1.7 Tétel felhasználásával egyszerűen adódik.□

1.2. Komplex elemi függvények

Ismeretes, hogy tetszőleges x valós számra

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0} \frac{x^n}{n!},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

A hatványsorokkal kapcsolatos Abel-tétel következményeként az is igaz, hogy az

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0} \frac{z^n}{n!},$$

$$1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

$$z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Maclaurin-sorok az egész komplex számsíkon abszolút konvergensek, így ezen sorok összegfüggvényei az egész komplex számsíkon léteznek.

Definíció 1.2.1 *A*

$$\sum_{n=0} \frac{z^n}{n!}$$

Maclaurin sor összegfüggvényét, az e alapú exponenciális komplex függvénynek nevezzük, azaz, tetszőleges z komplex szám esetén,

$$e^z := \sum_{n=0} \frac{z^n}{n!}.$$

Definíció 1.2.2 *A*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Maclaurin sor összegfüggvényét komplex koszinuszfüggvénynek nevezzük, azaz, tetszőleges z komplex szám esetén,

$$\cos z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Definíció 1.2.3 *A*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Maclaurin sor összegfüggvényét komplex szinuszfüggvénynek nevezzük, azaz, tetszőleges z komplex szám esetén,

$$\sin z := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Ezek alapján definiálhatjuk a komplex tangensfüggvényt, kotangensfüggvényt, és a komplex hiperbolikus függvényeket:

Definíció 1.2.4

$$tgz := \frac{\sin z}{\cos z}, \quad ctgz := \frac{\cos z}{\sin z},$$

$$chz := \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad shz := \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad thz := \frac{shz}{chz}, \quad cthz := \frac{chz}{shz}.$$

Tétel 1.2.5 *Tetszőleges z és w komplex számokra igazak az alábbiak:*

$$e^{z+w} = e^z e^w,$$

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \text{ (Euler-formula)},$$

$$\cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z,$$

$$\cos z = chiz, \quad i \sin z = shiz.$$

Bizonyítás.

$$e^z e^w = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}\right).$$

Használva a binomiális tételt is, az egyenlőség jobb oldala (a sorok közötti szorzás definíciója alapján) a következő alakú:

$$1 + (z + w) + \left(\frac{z^2}{2!} + zw + \frac{w^2}{2}\right) + \cdots$$

$$+\left(\frac{z^n}{n!}+\frac{z^{n-1}w}{(n-1)!}+\cdots+\frac{z^{n-k}w^k}{(n-k)!k!}+\cdots+\frac{zw^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{w^n}{n4}\right)+\cdots=$$

$$=1+(z+w)+\frac{z^2+2zw+w^2}{2}+\cdots$$

$$+\frac{z^n+\binom{n}{1}z^{n-1}w+\cdots+\binom{n}{k}z^{n-k}w^k+\cdots\binom{n}{n-1}zw^{n-1}+w^n}{n!}+\cdots=$$

$$=1+(z+w)+\frac{(z+w)^2}{2!}+\cdots+\frac{(z+w)^n}{n!}+\cdots=e^{z+w}.$$

Az Euler-formula bizonyításához induljunk ki az e^{iz} kifejezésből!

$$e^{iz}=1+iz+\frac{(iz)^2}{2!}+\frac{(iz)^3}{3!}+\frac{(iz)^4}{4!}++\frac{(iz)^5}{5!}+\cdots=$$

$$=1+iz-\frac{z^2}{2!}-i\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+i\frac{z^5}{5!}+\cdots.$$

A hatványsor abszolút konvergenciája miatt ezen utóbbi sor összege nem változik, ha a tagokat bárhogy is felcseréljük, így

$$e^{iz}=\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots\right)+i\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots\right)=\cos z+i\sin z.$$

A $\cos(-z)=\cos z$ és $\sin(-z)=-\sin z$ egyenlőségek a definíciók közvetlen következményei.

Az Euler formula alapján (használva azt is, hogy a szinuszfüggvény páratlan, a koszinusfüggvény pedig páros) a következők igazak:

$$\cos z+i\sin z=e^{iz},\ \text{ és }\ \cos z-i\sin z=\cos(-z)+i\sin(-z)=e^{-iz}.$$

Ezen egyenlőségek összeadásával, majd 2-vel való osztással adódik, hogy

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=chiz.$$

Ha a fenti egyenlőségeket kivonjuk egymásból (az elsőből a másodikat), majd elosztjuk 2-vel, akkor az

$$i\sin z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=shiz$$

egyenlőséget kapjuk. □

Tétel 1.2.6 *A komplex e^z függvény $2\pi i$ egész számú többszörösei szerint periodikus; más periódusa nincs.*

Bizonyítás.

$$e^{(z+2\pi i)} = e^z e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z.$$

Ebből már következik, hogy az e^z komplex függvény $2\pi i$ egész számú többszörösei szerint periodikus. Tegyük fel, hogy $c = a + bi$ periódusa e^z-nek. Akkor

$$e^z = e^{(z+a+bi)} = e^z e^{a+bi} = e^z e^a e^{bi} = e^z e^a(\cos b + i \sin b).$$

Az e^z-vel való egyszerűsítés után

$$1 = e^a(\cos b + i \sin b)$$

adódik. Két trigonometrikus alakban adott komplex szám egyenlőségének kritériuma alapján ez az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha

$$e^a = 1 \text{ és } b = k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Mivel az előzőekből $a = 0$ adódik, ezért $c = k2\pi\mathrm{i}$ $(k \in \mathbb{Z})$. Tehát a komplex e^z függvény $2\pi i$ egész számú többszörösei szerint periodikus, és más periódusa nincs. □

Az előző tétel, valamint a $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ és a $\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ egyenlőségek felhasználásával egyszerűen bizonyítható a következő tétel.

Tétel 1.2.7 *A komplex $\sin z$ és $\cos z$ függvények 2π egész számú többszörösei szerint periodikusak; más periódusuk nincs.*

Az Euler formula alapján, ha egy z komplex szám trigonometriai alakja $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, akkor $z = re^{i\varphi}$.

Definíció 1.2.8 *A $z = re^{i\varphi}$ alakot az r abszolút értékű és φ argumentumú z komplex szám exponenciális alakjának nevezzük.*

Definíció 1.2.9 *A $z \neq 0$ komplex szám e alapú (vagy természetes alapú) logaritmusán értünk minden olyan w komplex számot, amely kielégíti az $e^w = z$ egyenletet. Jelölése $w = lnz$.*

Tétel 1.2.10 *Ha a $z \neq 0$ komplex szám exponenciális alakja $z = re^{i\varphi}$, akkor*

$$lnz = lnr + i(\varphi + 2\pi k) \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

ahol lnr az r pozitív valós szám valós logaritmusát jelöli.

Definíció 1.2.11 *Az lnz főértékének nevezzük az $lnr + i\varphi$ komplex számot, ahol a φ argumentumra $0 \leq \varphi < 2\pi$ teljesül.*

Definíció 1.2.12 *Tetszőleges w és $z \neq 0$ komplex számokra a z^w hatványt a $z^w = e^{wlnz}$ képlettel értelmezzük.*

1.3. Komplex függvények differenciálása

Definíció 1.3.1 *Akkor mondjuk, hogy egy $f(z)$ komplex függvény differenciálható a komplex számsík valamely z_0 pontjában, ha létezik az*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

határérték. Ezt a határértéket az $f(z)$ függvény z_0 pontbeli differenciálhányadosának nevezzük.

Megjegyzés 1.3.2 Az előző definícióban szereplő határértéket

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

formában is írhatjuk.

Definíció 1.3.3 *Az $f(z)$ komplex függvény deriváltfüggvényén azt az $f'(z)$-vel jelölt komplex függvényt értjük, melynek értelmezési tartománya mindazon z_0 komplex számok halmaza, amelyekben létezik az $f'(z_0)$ differenciálhányados, és minden ilyen z_0-hoz az $f'(z_0)$ differenciálhányadost rendeli függvényértékként.*

Példa 1.3.4 Mivel tetszőleges z_0 komplex szám esetén

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{(z_0 + h)^2 - z_0^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2z_0 + h) = 2z_0,$$

ezért az $f(z) = z^2$ komplex függvény deriváltfüggvénye:

$$f'(z) = 2z.$$

Tétel 1.3.5 *Tetszőleges $f(z)$ és $g(z)$ komplex függvények esetén*

$$(f \pm g)'(z) = f'(z) \pm g'(z),$$

$$(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z),$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)} \quad (g(z) \neq 0).$$

Megmutatható (a hatványsorok tagonkénti differenciálhatóságának felhasználásával), hogy

$$(e^z)' = e^z, \quad \sin' z = \cos z, \quad \cos' z = -\sin z.$$

Tétel 1.3.6 *Ha az $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ komplex függvény differenciálható, a $z_0 = x_0 + iy_0$ helyen, akkor*

$$f'(z_0) = u'_x(x_0, y_0) + iv'_x(x_0, y_0).$$

Bizonyítás. Ha az $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ függvény differenciálható a $z_0 = x_0 + iy_0$ helyen, akkor az $f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ határérték akkor is létezik, ha $z = x + iy$ úgy tart z_0-hoz, hogy a z-t és z_0-t összekötő szakasz (a komplex számsíkon) párhuzamos a valós tengellyel, azaz

$$f'(z_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{u(x,y_0) + iv(x,y_0) - (u(x_0,y_0) + iv(x_0,y_0))}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{u(x,y_0) - u(x_0,y_0)}{x - x_0} + i \lim_{x\to x_0} \frac{v(x,y_0) - v(x_0,y_0)}{x - x_0}.$$

A határértékre vonatkozó 1.1.7 Tétel alapján ebből az következik, hogy a jobb oldalon levő két határérték létezik; az első egyenlő az $u'_x(x_0,y_0)$ parciális differenciálhányadossal, a második pedig a $v'_x(x_0,y_0)$ parciális differenciálhányadosal. Tehát

$$f'(z_0) = u'_x(x_0,y_0) + iv'_x(x_0,y_0).$$

□

Tétel 1.3.7 *Ha az $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ komplex függvény differenciálható, a $z_0 = x_0 + iy_0$ helyen, akkor*

$$f'(z_0) = v'_y(x_0,y_0) - iu'_y(x_0,y_0).$$

Bizonyítás Ha az $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ függvény differenciálható a $z_0 = x_0 + iy_0$ helyen, akkor az $f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ határérték létezik, ha $z = x + iy$ úgy tart z_0-hoz, hogy a z-t és z_0-t összekötő szakasz párhuzamos a képzetes tengellyel, azaz

$$f'(z_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{u(x_0,y) + iv(x_0,y) - (u(x_0,y_0) + iv(x_0,y_0))}{i(y - y_0)} =$$

$$= \lim_{y\to y_0} \frac{u(x_0,y) - u(x_0,y_0)}{i(y - y_0)} + i \lim_{y\to y_0} \frac{v(x_0,y) - v(x_0,y_0)}{i(y - y_0)} =$$

$$= -i \lim_{y\to y_0} \frac{u(x_0,y) - u(x_0,y_0)}{(y - y_0)} + \lim_{y\to y_0} \frac{v(x_0,y) - v(x_0,y_0)}{(y - y_0)} =$$

A határértékre vonatkozó 1.1.7 Tétel alapján ebből az következik, hogy a jobb oldalon levő két határérték létezik; az első egyenlő az $u'_y(x_0,y_0)$ parciális differenciálhányados $-i$-szeresével, a második pedig a $v'_y(x_0, y_0)$ parciális differenciálhányadosal. Tehát

$$f'(z_0) = -iu'_y(x_0, y_0) + v'_y(x_0, y_0) = v'_y(x_0, y_0) - iu'_y(x_0, y_0).$$

□

A következő tétel az előző két tétel közvetlen folyamánya.

Tétel 1.3.8 *Ha az $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ komplex függvény differenciálható, a $z_0 = x_0 + iy_0$ helyen, akkor az (x_0, y_0) számpár kielégíti az*

$$u'_x(x, y) = v'_y(x, y), \quad u'_y(x, y) = -v'_x(x, y) \tag{1.1}$$

un. Cauchy-Riemann-féle differenciálegyenlet-rendszert.

A következő tétel állítása az előző tétel állításának egyfajta megfordítása.

Tétel 1.3.9 *Ha az $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ komplex függvény $u(x, y)$ valós és $v(x, y)$ képzetes része differenciálható az (x_0, y_0) helyen, továbbá az (x_0, y_0) számpár kielégíti a Cauchy-Riemann-féle differenciálegyenlet-rendszert, akkor az $f(z)$ függvény differenciálható a $z_0 = x_0 + iy_0$ helyen.*

Definíció 1.3.10 *Az f komplex függvényt a z_0 pontban regulárisnak (vagy holomorfnak) mondjuk, ha differenciálható z_0 valamely teljes környezetében. Azt mondjuk, hogy f reguláris a komplex számsík valamely T halmazán, ha f reguláris T minden pontjában. Mindazon pontok halmazát a komplex számsíkon, amelyekben f reguláris, az f regularitási tartományának nevezzük.*

A korábbi félévekben már szerepeltek az "összefüggő halmaz" és a "nyílt halmaz" fogalmak. Emlékeztetőül felidézzük ezeket a fogalmakat a komplex számsík halamzaira.

Definíció 1.3.11 *A komplex számsík valamely H részhalmazát nyílt halmaznak nevezünk, ha H minden pontja belső pont, azaz tetszőleges x_0 pontjának van olyan teljes környezete, amelynek minden pontja H-hoz tartozik.*

Definíció 1.3.12 *A komplex számsík valamely H részhalmazát összefüggőnek nevezzük, ha bármely két pontja összeköthető a H-ban haladó töröttvonallal. Egy összefüggő, nyílt halmazt tartománynak is nevezünk.*

Tétel 1.3.13 *Ha egy f komplex függvény a komplex számsík valamely T tartományán reguláris, akkor az f függvény a T tartomány minden pontjában akárhányszor differenciálható.*

Definíció 1.3.14 *Egy $u(x,y)$ kétváltozós valós függvényről azt mondjuk, hogy az xy-sík valamely nyílt H részhalmazán harmonikus, ha a H halmazon kétszer folytonosan differenciálható, továbbá a H-n eleget tesz az*

$$u''_{xx} + u''_{yy} = 0$$

un. Laplace-egyenletnek. A H halmazon harmonikus $u(x,y)$ és $v(x,y)$ függvényekről azt mondjuk, hogy H-n harmonikus társak, ha H-n kielégítik együtt a Cauchy-Riemann-féle differenciálegyenlet-rendszert.

Tétel 1.3.15 *Ha egy $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ komplex függvény reguláris a komplex számsík T tartományán, akkor az $u(x,y)$ és $v(x,y)$ függvények egymás harmonikus társai az xy-sík T-nak megfelelő részhalmazán (azaz mindazon (x,y) pontok halmazán, amelyekre a $z = x + iy$ komplex szám H-nak eleme).*

Bizonyítás. A 1.3.13 Tételből következik, hogy egy összefüggő, nyílt halmazon reguláris $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ komplex függvény valós és képzetes részének összes parciális differenciálhányadosai léteznek és folytonosak. A 1.3.8 Tétel szerint $u(x,y)$ és $v(x,y)$ kielégítik a Cauchy-Riemann-féle differenciálegyenlet-rendszert. Ebből pedig könnyen levezethető, hogy $u(x,y)$ és $v(x,y)$ harmonikus függvények. Tehát egymás harmonikus társai. □

Definíció 1.3.16 *A komplex számsík egy T részhalmazát egyszeresen összefüggőnek nevezzük, ha T összefüggő, valamint teljesül rá az is, hogy bármely önmagát át nem metsző T-beli zárt görbe által határolt síkidom is T-ben fekszik. Az egyszeresen összefüggő, nyílt halmazokat egyszeresen özefüggő tartományoknak is modjuk.*

Tétel 1.3.17 *Egyszeresen összefüggő (síkbeli) T tartományon harmonikus függvénynek vannak harmonikus társai T-n, amelyek csak egy konstansban különböznek egymástól.*

Megjegyzés 1.3.18 *Így egy egyszeresen összefüggő T tartományon harmonikus $u(x,y)$ függvényhez lehet találni olyan T-n hamonikus $v(x,y)$ függvényt, hogy az $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ komplex függvény reguláris a komplex számsík T-nek megfelelő részhalmazán (azaz mindazon $z = x + iy$ pontok halmazán, amelyekre az (x,y) pont T-ben van).*

Példa 1.3.19 Mutassuk meg, hogy a $v(x,y) = 2xy$ függvény harmonikus az xy-síkon, és adjuk meg a harmonikus társait.
Megoldás. $v''_{xx} = 0 = v''_{yy}$ minden (x,y) pontban, ezért $v(x,y)$ harmonikus az xy-síkon. Legyen $u(x,y)$ a $v(x,y)$ egy harmonikus társa. Akkor

$$u'_x(x,y) = v'_y(x,y) = 2x,$$

és ezért

$$u(x,y) = x^2 + t(y),$$

ahol $t(y)$ egy y-tól függő egyváltozós valós függvény. Így

$$-2y = -v'_x(x,y) = u'_y(x,y) = t'(y),$$

amelyből

$$t(y) = -y^2 + c$$

adódik, ahol c tetszőleges valós konstans. Tehát

$$u(x,y) = x^2 - y^2 + c.$$

Az $f(z) = z^2$ függvény valós és képzetes részei:

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy.$$

Ezek (az előző példa alapján) egymás harmonikus társai. Megjegyezzük, hogy ez nem véletlen, mert az $f(z) = z^2$ komplex függvény reguláris a komplex számsíkon.

2. fejezet

Komplex függvények II

2.1. Komplex függvények integrálása

Definíció 2.1.1 *Legyen $\mathcal{G}$ a komplex számsíkban elhelyezkedő, a kezdőpontú és b végpontú írányított, rektifikálható (azaz ívhosszal rendelkező) görbeív. Tekintsük a $\mathcal{G}$ görbe egy beosztását, azaz osszuk fel az $\mathcal{G}$ ívet, az a-tól b felé haladva, tetszőlegesen felvett*

$$a = r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}, r_n = b$$

komplex számokkal részívekre. Minden egyes $r_{i-1}r_i$ részíven válasszunk ki egy-egy z_i $(i = 1, \ldots n)$ pontot, a szóban forgó beosztás egy reprezentánsrendszerét. Legyen f a $\mathcal{G}$ görbeíven értelmezett korlátos komplex függvény. Képezzük az f függvényhez, a fenti beosztáshoz és a beosztás fenti reprezentánsrendszeréhez tartozó

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(z_i)(r_i - r_{i-1})$$

integrálközelítő összeget. Ha az f függvényhez és a $\mathcal{G}$ görbeív tetszőleges minden határon túl finomodó beosztássorozatához tartozó I_n integrálközelítő összegek sorozatai konvergensek, a beosztássorozat és a reprezentánsrendszer választásától függetlenül, akkor azt mondjuk, hogy az f komplex függvény integrálható a $\mathcal{G}$ görbeíven, az adott irány szerint.

Tétel 2.1.2 *Ha egy f komplex függvény integrálható egy rektifikálható $\mathcal{G}$ görbeíven, akkor az f függvényhez és a $\mathcal{G}$ görbeív tetszőleges minden határon túl finomodó beosztássorozatához tartozó I_n integrálközelítő összegek sorozatai közös határértékhez konvergálnak.*

Definíció 2.1.3 *Egy rektifikálható $\mathcal{G}$ görbeíven integrálható f komplex függvény $\mathcal{G}$ görbementi integrálján az f függvényhez és a $\mathcal{G}$ görbeív tetszőleges minden határon túl finomodó beosztássorozatához tartozó I_n integrálközelítő összegek sorozatainak közös határértékét értjük. Jelölése:*

$$\int_{\mathcal{G}} f(z)dz.$$

Ha a $\mathcal{G}$ görbe zárt, akkor az

$$\oint_{\mathcal{G}} f(z)dz$$

jelölés is használatos.

Megjegyzés 2.1.4 *A definícióból következik, hogy a $\mathcal{G}$ görbementi integrál előjelet vált, ha a görbe irányítását megfordítjuk. Ha pedig a $\mathcal{G}$ görbe az egymáshoz csatlakozó és a $\mathcal{G}$-vel egyezően irányított $\mathcal{G}_1$ és $\mathcal{G}_2$ ívekből áll, továbbá az f komplex függvény integrálható $\mathcal{G}$-n, akkor f integrálható $\mathcal{G}_1$-en és $\mathcal{G}_2$-n is, mégpedig*

$$\int_{\mathcal{G}} f(z)dz = \int_{\mathcal{G}_1} f(z)dz + \int_{\mathcal{G}_2} f(z)dz.$$

Tétel 2.1.5 *Legyen az f komplex függvény integrálható az irányított, rektifikálható $\mathcal{G}$ görbeíven. Ha a $\mathcal{G}$ egyenlete $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, ahol a t paraméter a t_1 és t_2 valós számok által határolt intervallumot futja be úgy, hogy $z(t_1)$ a görbe kezdőpontja, $z(t_2)$ pedig a görbe végpontja, továbbá a $z(t)$ függvény t szerinti $\dot{z}(t) = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t)$ deriváltja folytonos a t_1 és t_2 által határolt intervallumon, akkor*

$$\int_{\mathcal{G}} f(z)dz = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t))\dot{z}(t)dt.$$

Példa 2.1.6 Számoljuk ki az $f(z) = z^2$ komplex függvény integrálját a komplex számsík azon $\mathcal{G}$ görbeívén, amely egy 0 középpontú, 1 sugarú, pozitív irányítású kör.

Megoldás. A 2.1.5 Tételben szereplő képletet alkalmazzuk. A féldánkban szereplő $f(z)$ függvény algebrai alakja:

$$f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i2xy.$$

A $\mathcal{G}$ görbe, ahol integrálunk, egy origó középpontú, 1 sugarú kör. Ennek paraméteres egyenlete

$$z(t) = \cos t + i \sin t,$$

ahol t a kör tetszőleges pontjába mutató helyvektornak a valós tengely nemnegatív felével bezárt pozitív irányú szöge. Mivel teljes körről van szó, ezért $0 \le t \le 2\pi$, és így $t_1 = 0$, valamint $t_2 = 2\pi$. Szükség lesz még a $\dot{z}(t)$ deriváltra:

$$\dot{z}(t) = -\sin t + i \cos t.$$

A 2.1.5 Tétel képletében szereplő $f(z(t))$ függvényt úgy kapjuk meg, hogy az $f(z)$ függvény algebrai alakjában szereplő x, illetve y független változók helyére mindenhová beírjuk a $\mathcal{G}$ görbe egyenletében szereplő $x(t)$, illetve $y(t)$ kifejezéseket. A mi esetünkben ez az

$$f(z(t)) = (\cos^2 t - \sin^2 t) + i2 \cos t \sin t$$

függvényt adja. Így

$$\oint_{\mathcal{G}} f(z)dz = \int_0^{2\pi} f(z(t))\dot{z}(t) =$$

$$\int_0^{2\pi} ((\cos^2 t - \sin^2 t) + i2 \cos t \sin t)(-\sin t + i \cos t)dt =$$

$$\int_0^{2\pi} (\sin^3 t - 3\cos^2 t \sin t) + i(\cos^3 t - 3\sin^2 t \cos t)dt.$$

Mivel

$$\sin^3 t = \sin^2 t \sin t = (1 - \cos^2 t) \sin t = \sin t - \cos^2 t \sin t$$

és

$$\cos^3 t = \cos^2 t \cos t = (1 - \sin^2 t) \cos t = \cos t - \sin^2 t \cos t,$$

ezért

$$\oint_{\mathcal{G}} f(z)dz = \int_0^{2\pi} (\sin t - 4\cos^2 t \sin t) + i(\cos t - 4\sin^2 t \cos t)dt =$$

$$\left[(-\cos t + \frac{4}{3}\cos^3 t)\right]_0^{2\pi} + i\left[(\sin t - \frac{4}{3}\sin^3 t)\right]_0^{2\pi} = 0 + 0i = 0.$$

Tétel 2.1.7 *Ha az f komplex függvény valamely T ponthalmazon folytonos, akkor az f függvény a T belsejében fekvő bármely rektifikálható görbeíven integrálható.*

Tétel 2.1.8 *(Cauch-féle integráltétel) Ha az f komplex függvény az egyszeresen összefüggő T tartományon reguláris, akkor minden T-ben fekvő zárt rektifikálható görbén vett integrálja zérus.*

Megjegyzés 2.1.9 *A 2.1.6 Példában szereplő $f(z) = z^2$ komplex függvény az egész komplex számsíkon reguláris (mert annak minden pontjában differenciálható), így tetszőleges zárt rektifikálható görbén vett integrálja zérus. Így az origó középpontú, 1 sugarú körön vett integrálja is zérus, mint ahogy azt a példában kiszámítottuk. A Cauchy-féle integráltétel előnye, hogy felhasználásával egyből megkapjuk $\oint_{\mathcal{G}} z^2 dz = 0$ a végeredményt, és így nincs szükség a példában bemutatott hosszú számolásra.*

Tétel 2.1.10 *(Morera tétele) Ha az f komplex függvény az egyszeresen összefüggő T tartományon folytonos, és f-nek minden T-ben fekvő zárt rektifikálható görbén vett integrálja zérus, akkor f a T halmazon reguláris.*

Megjegyzés 2.1.11 Morera-tétele a Cauchy-féle integráltétel megfordítása.

Tétel 2.1.12 *Legyen az f komplex függvény folytonos az egyszeresen összefüggő T tartományon. Az f-nek akkor és csak akkor van T-ben primitív függvénye, ha f reguláris a T halmazon. Ebben az esetben f-nek egy primitív* *függvénye megadható $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(w)dw$ alakban, ahol z_0 a T tetszőleges rögzített pontja, és az integrálás tetszőleges olyan T-beli rektifikálható görbe mentén történik, amelynek kezdőpontja z_0 és végpontja z.*

Tétel 2.1.13 *Ha $F(z)$ a T tartományon reguláris $f(z)$ komplex függvény primitív függvénye a T-n, akkor bármely a kezdőpontú és b végpontú T-beli rektifikálható $\mathcal{G}$ görbére teljesül az*

$$\int_{\mathcal{G}} f(z)dz = F(b) - F(a)$$

un. Newton-Leibniz-formula.

Példa 2.1.14 *Számoljuk ki az $f(z) = \sin z$ komplex függvény integrálját az origó középpontú, π sugarú kör π és $i\pi$ közötti részívén, pozitív irányítás mellett.*

Megoldás. *Jelölje $\mathcal{G}$ a példában szereplő kör π és $i\pi$ közötti ívét (pozitív irányítással). Mivel az $f(z) = \sin z$ függvény reguláris az egész komplex számsíkon, és egy primitív függvénye az $F(z) = -\cos z$ függvény, ezért (a Cauchy-féle integrálformula szerint)*

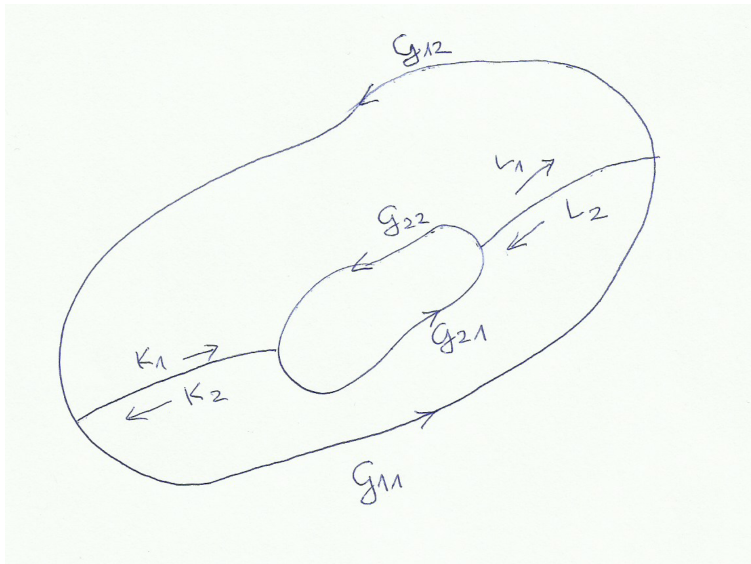
$$\int_{\mathcal{G}} \sin z dz = [-\cos z]_{\pi}^{i\pi} = -\cos i\pi + \cos \pi = -\cos i\pi - 1 =$$

$$= -ch(i^2\pi) - 1 = -ch(-\pi) - 1 = -ch\pi - 1 =$$

$$= -\frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{2} - 1 = -\frac{(e^{\pi} + 1)^2}{2e^{\pi}}.$$

Tétel 2.1.15 *Legyen $\mathcal{G}_1$ és $\mathcal{G}_2$ két olyan zárt rektifikálható görbe, hogy $\mathcal{G}_2$ a $\mathcal{G}_1$ belsejében fekszik. Ha az f komplex függvény a $\mathcal{G}_1$ és $\mathcal{G}_2$ által határolt zárt gyűrűtartományt magában foglaló valamely ponthalmazon reguláris, akkor*

$$\int_{\mathcal{G}_1} f(z)dz = \int_{\mathcal{G}_2} f(z)dz.$$



2.1. ábra. (G_1, G_2) Körgyűrű alakú tartomány

Bizonyítás. A 2.1. ábrának megfelelően kössük össze a $\mathcal{G}_1$ és $\mathcal{G}_2$ görbéket a K és L görbékkel. Mivel ezen görbéknek kétféle irányítása létezik, ennek megfelelően jelöljük K_1-gyel, K_2-vel, L_1-gyel és L_2-vel az ábra szerinti irányításnak megfelelő görbeíveket. A $\mathcal{G}_{12}$, a K_1, a $\mathcal{G}'_{22}$, és az L_1 görbék egy zárt görbét határoznak meg, ahol $\mathcal{G}'_{22}$ azt a görbét jelöli, amely a $\mathcal{G}_{22}$-ből úgy adódik, hogy azon ellenkezőjére változtatjuk az irányítást. A Chaucy-féle integráltétel szerint, az $f(z)$ függvény integrálja ezen a zárt görbén 0, azaz

$$\int_{\mathcal{G}_{12}} f(z)dz + \int_{K_1} f(z)dz + \int_{\mathcal{G}'_{22}} f(z)dz + \int_{L_1} f(z)dz = 0.$$

Mivel $\int_{\mathcal{G}'_{22}} f(z)dz = -\int_{\mathcal{G}_{22}} f(z)dz$, ezért a fenti egyenlőség a következő alakú:

$$\int_{\mathcal{G}_{12}} f(z)dz + \int_{K_1} f(z)dz - \int_{\mathcal{G}_{22}} f(z)dz + \int_{L_1} f(z)dz = 0.$$

Hasonlóan adódik, hogy az ábra szerinti alsó, a $\mathcal{G}_{11}$, L_2, $\mathcal{G}'_{21}$, K_2 részívekből álló zárt görbére:

$$\int_{\mathcal{G}_{11}} f(z)dz + \int_{L_2} f(z)dz - \int_{\mathcal{G}_{21}} f(z)dz + \int_{K_2} f(z)dz = 0.$$

Mivel $\int_{K_1} f(z)dz = -\int_{K_2} f(z)dz$ és $\int_{L_1} f(z)dz = -\int_{L_2} f(z)dz$, ezért a kapott két egyenlőség összeadása után a következő egyenlőség adódik:

$$\int_{\mathcal{G}_{11}} f(z)dz + \int_{\mathcal{G}_{12}} f(z)dz - (\int_{\mathcal{G}_{21}} f(z)dz + \int_{\mathcal{G}_{22}} f(z)dz) = 0.$$

Ebből pedig

$$\int_{\mathcal{G}_1} f(z)dz - \int_{\mathcal{G}_2} f(z)dz = 0,$$

azaz az

$$\int_{\mathcal{G}_1} f(z)dz = \int_{\mathcal{G}_2} f(z)dz$$

egyenlőséget kapjuk. □

Megjegyzés 2.1.16 *Az előző tétel általánosítható a $\mathcal{G}, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \ldots, \mathcal{G}_n$ zárt rektifikálható görbékre, ha a $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \ldots, \mathcal{G}_n$ görbék a $\mathcal{G}$ belsejében fekszenek, de kölcsönösen egymás külsejében. Ekkor*

$$\int_{\mathcal{G}} f(z)dz = \int_{\mathcal{G}_1} f(z)dz + \int_{\mathcal{G}_2} f(z)dz + \cdots + \int_{\mathcal{G}_n} f(z)dz.$$

Tétel 2.1.17 *(Cauchy-féle integrálformula) Ha az f komplex függvény reguláris a T tartományon, akkor T minden z_0 pontjára*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{G}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

teljesül, ahol $\mathcal{G}$ tetszőleges olyan T-ben haladó, önmagát át nem metsző, pozitív irányítású zárt görbe, amelynek belseje is T-hez tartozik, és z_0 a $\mathcal{G}$ belsejében van.

Példa 2.1.18 Számítsuk ki az

$$\oint_{\mathcal{G}} \frac{2z-1}{z(z-1)} dz$$

integrált, ahol $\mathcal{G}$ a komplex számsík 1 középpontú, $\frac{1}{2}$ sugarú köre, melynek irányítása pozitív.

Megoldás. A $\frac{2z-1}{z}$ függvény a komplex számsík 0-tól különböző pontjaiban differenciálható. Így van olyan T tartomány, amely a 0-t nem tartalmazza, de amelynek a belsejében van a $\mathcal{G}$ kör, és amelyben a $\frac{2z-1}{z}$ függvény reguláris. Így a Cauchy-féle integrálformula szerint

$$\oint_{\mathcal{G}} \frac{2z-1}{z(z-1)} dz = \oint_{\mathcal{G}} \frac{\frac{2z-1}{z}}{z-1} = \left(2\pi i \frac{2z-1}{z}\right)_{z=1} = 2\pi i.$$

Tétel 2.1.19 *(Cauchy-féle integrálformula általános alakja) Ha az f komplex függvény reguláris a T tartományon, akkor ott akárhányszor differenciálható, és a T-ben fekvő minden z_0 pontra*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\mathcal{G}} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \quad (n = 0, 1, \dots),$$

ahol $\mathcal{G}$ olyan önmagát át nem metsző, pozitív irányítású zárt görbe, amelynek belseje is T-hez tartozik, és magában foglalja a z_0 pontot.

Megjegyezzük, hogy ha az előző tételben $n = 0$, akkor a 2.1.17 Tétel állítását kapjuk.

Példa 2.1.20 Az $|z| = 4$ egyenletű $\mathcal{G}$ körön, pozitív irányban haladva, integráljuk az

$$\frac{e^{iz}}{(z-\pi)^6}$$

függvényt.
Megoldás. Mivel a π pont a $\mathcal{G}$ kör belsejében van, ezért az előző tétel szerint

$$\frac{5!}{2\pi i} \oint_{\mathcal{G}} \frac{e^{iz}}{(z-\pi)^6} dz = \left((e^{iz})^{(5)}\right)_{z=\pi} = i^5 e^{ip} = i(\cos\pi + i \sin\pi) = -i.$$

Ebből

$$\oint_{\mathcal{G}} \frac{e^{iz}}{(z-\pi)^2} dz = \frac{2}{5!}\pi = \frac{\pi}{60}.$$

3. fejezet

Differenciálegyenletek I

3.1. A differenciálegyetem fogalma, típusai

Definíció 3.1.1 *Differenciálegyenleten olyan egyenletet értünk, amelyben a meghatározandó ismeretlen egy függvény, és az egyenletben az ismeretlen függvény különböző rendű deriváltjai, valamint (egy- vagy többváltozós) adott függvények szerepelnek.*

Differenciálegyenletek például az alábbi egyenletek.

$$y^{(4)}(x) + y''(x)\sin x = y(x)\cos x,$$

$$u''_{xy}(x,y) + e^{x+y}u'_y(x,y) = x - y.$$

Az elsőben szereplő ismeretlen függvény egyváltozós (ez az $y(x)$ függvény), a másodikban szereplő ismeretlen függvény többváltozós (ez az $u(x,y)$ függvény).

Definíció 3.1.2 *Közönséges differenciálegyenleten olyan differenciálegyenletet értünk, amelyben az ismeretlen függvény egyváltozós, parciális differenciálegyenleten pedig olyat, amelyben az ismeretlen függvény többváltozós.*

A fenti két példa közül az első közönséges, a második parciális differenciálegyenlet. Ebben a jegyzetben csak közönséges differenciálegyenletekkel foglalkozunk, ezért differenciálegyenleten mindig közönséges differenciálegyenletet értünk.

Definíció 3.1.3 *Egy differenciálegyenletet n-edrendűnek nevezünk, ha az ismeretlen függvény differenciálegyenletben szereplő legmagasabb rendű deriváltjának rendje n.*

Például, az

$$y^{(4)}(x) = x^3 y^{(5)}(x) + y(x)\cos x$$

differenciálegyenlet 5-ödrendű.

Definíció 3.1.4 *Ha a differenciálegyenlet olyan alakú, hogy egyik oldalán csak az egyenletben előforduló legmagasabb rendű derivált áll, a másik oldalon viszont ez a derivált már nem lép fel, akkor a differenciálegyenletet explicitnek, minden más esetben implicitnek nevezzük.*

Az

$$y''(x) = 3y'(x) + y(x)\cos x \tag{3.1}$$

differenciálegyenlet explicit alakú. A

$$2y''(x) = 3y'(x) + y(x)\cos x$$

és a

$$y''(x) = 5y''(x) + 3y'(x) + y(x)\cos x$$

differenciálegyenletek mindegyike implicit alakú. A differenciálegyenlet azon alakját, amelyben az egyenlet egyik oldalán 0 áll, a differenciálegyenlet 0-ra redukált alakjának nevezzük. Az

$$y''(x) - 3y'(x) - y(x)\cos x = 0$$

differenciálegyenlet 0-ra redukált alakja az (3.1) differenciálegyenletnek.

Definíció 3.1.5 *Ha az $m + r$ számú $u_1, \dots, u_m; x_1, \dots, x_r$ változótól függő F függvény véges sok*

$$a(u_1, \dots, u_m) x_1^{n_1} \dots x_r^{n_r} \quad (n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}^+) \tag{3.2}$$

alakú tag összege, ahol az a függvény az $u_1, \dots, u_m$ változók tetszőleges valós függvénye, akkor azt mondjuk, hogy F polinomfüggvény az $x_1, \dots, x_r$ változókra nézve. Az $n_1 + \dots + n_r$ összeget az (3.2) tag fokszámának nevezzük. Az F fokszámán a tagok fokszámának maximumát értjük.

Definíció 3.1.6 *Ha egy differenciálegyenlet 0-ra redukált alakjában a nem 0 oldalon olyan függvény áll, amely az ismeretlen függvényre és annak deriváktjaira nézve k-adfokú polinomfüggvény, akkor a differenciálegyenletet k-adfokúnak nevezzük; mégpedig, ha az ilyen differenciálegyenletben minden nem 0 tagnak ugyanaz a fokszáma, akkor a differenciálegyenletet homogénnek, ellenkező esetben inhomogénnek mondjuk. Más alakú differenciálegyenletről pdig azt mondjuk, hogy nincs fokszáma.*

Az

$$y(x)y^{(4)}(x) + x^3y'(x)y''(x)y^{(3)}(x) + 5y(x) = 0$$

differenciálegyenlet bal oldalán szereplő 3 tag közül az első tag másodfokú, a második tag harmadfokú, a harmadik tag pedig elsőfokú. Így a differenciálegyenlet harmadfokú. A

$$\sin(x + y'(x)) + e^{xy(x)} = 0$$

differenciálegyenletnek nincs fokszáma.

3.2. A közönséges differenciálegyenletek megoldhatósága

Definíció 3.2.1 *Egy $y(x)$ függvényről akkor mondjuk, hogy egy differenciálegyenlet megoldása a valós számok valamely H részhalmazán, ha az $y = y(x)$ helyettesítést elvégezve, a differenciálegyenlet a H halmazon azonossággá válik. Ha a H halmaz a valós számok $\mathbb{R}$ halmaza, akkor csak azt mondjuk, hogy az $y(x)$ függvény a differenciálegyenlet megoldása. Az $y(x)$ megoldás grafikonját a differenciálegyenlet egy integrálgörbéjének mondjuk.*

Az

$$y' - 3y = 0$$

differenciálegyenletnek az $y(x) = e^{3x}$ függvény megoldása, mert az $y = e^{3x}$ helyettesítést elvégezve, a valós számok halmazán érvényes

$$3e^{3x} - 3e^{3x} = 0$$

azonosságot kapjuk.

A gyakorlatban egy differenciálegyenletnek többnyire nem az összes megoldását keressük. Többnyire olyan $y(x)$ megoldását, amely valamely ξ helyen eleget tesz az

$$y(\xi) = \eta_0, y'(\xi) = \eta_1, \ldots, y^{(r)}(\xi) = \eta_r$$

feltételnek is, ahol $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_r$ előre megadott valós számok. Az ilyen típusú feltételeket Taylor-típusú kezdeti feltételeknek nevezzük.

Definíció 3.2.2 *Legyen f egy $(n+1)$-változós valós függvény,*

$$P = (\xi, \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{n-1})$$

pedig az $(n+1)$-dimenziós $\mathbb{R}^{n+1}$ tér egy rögzített pontja. Az

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

differenciálegyenlethez és a P ponthoz tartozó Taylor-típusú kezdetérték-problémán olyan egyváltozós valós $y(x)$ függvény meghatározását értjük, amely megoldása a differenciálegyenletnek a ξ pont valamely teljes környezetében, és eleget tesz az

$$y(\xi) = \eta_0, y'(\xi) = \eta_1, \ldots, y^{(n-1)}(\xi) = \eta_{n-1}$$

kezdeti feltételnek. Ha van ilyen függvény, akkor azt mondjuk, hogy a kezdetiérték-probléma megoldható. Ha pontosan egy ilyen függvény van, akkor azt mondjuk, hogy a kezdetiérték-probléma egyértelműen megoldható.

A következő tétel a Taylor-típusú kezdetiérték-probléma megoldhatóságával kapcsolatos.

Tétel 3.2.3 *(Cauchy-Peano-féle egzisztenciatétel) Ha az $(n+1)$-változós valós f függvény az $(n+1)$-dimenziós $\mathbb{R}^{n+1}$ tér valamely korlátos zárt D halmazán folytonos, akkor az*

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

differenciálegyenlethez és a D halmaz tetszőleges belső pontjához tartozó Taylor-típusú kezdetiérték-probléma megoldható.

Példa 3.2.4 Az

$$y''' = xy + \frac{\cos(y + y')}{y'^2 + y''}; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \pi, \quad y''(0) = 1$$

kezdetiérték-probléma megoldható, mivel a $(0, 0, \pi, 1) \in \mathbb{R}^4$ pont egy teljes környezetében az

$$f : (x, y_0, y_1, y_2) \mapsto xy_0 + \frac{\cos(y_0 + y_1)}{y_1^2 + y_2}$$

függvény folytonos.

A Taylor-típusú kezdetiérték-probléma egyértelmű megoldhatóságával kapcsolatos tétel mogfogalmazásához szükség van az alábbi fogalomra.

Definíció 3.2.5 *Legyen D az r-változós valós f függvény értelmezési tartományának valamely részhalmaza. Az f függvényről akkor mondjuk, hogy a D halmazon az i-edik változójában eleget tesz a Lipschitz-feltételnek, ha megadható olyan N_i pozitív valós szám, hogy a D halmaz bármely két, esetleg csak az i-edik koordinátáikban különböző*

$$P^* = (p_1, \ldots, p_{i-1}, p_i^*, p_{i+1}, \ldots, p_r)$$

és

$$P^{**} = (p_1, \ldots, p_{i-1}, p_i^{**}, p_{i+1}, \ldots, p_r)$$

pontjaira az

$$| f(P^*) - f(P^{**}) | \leq N_i | p^* - p_i^{**} |$$

egyenlőtlenség érvényes.

A következő tétel elégséges feltételt ad a Lipschitz-feltétel teljesülésére.

Tétel 3.2.6 *Ha a k-változós valós f függvénynek az $\mathbb{R}^k$ metrikus tér valamely konvex D halmazán az i-edik változó szerinti parciális deriváltja létezik és korlátos, akkor a D belsejében az f függvény eleget tesz az i-edik változójában a Lipschitz-feltételnek.*

Bizonyítás A bizonyítást $k = 3$ esetre végezzük el. Legyen D egy térbeli konvex halmaz. Definíció szerint ez azt jelenti, hogy D bármely két pontját összekötő szakasz minden pontja D-hez tartozik. Legyen $f(x, y, z)$ egy 3-változós valós függvény. A bizonyítást az y változóra végezzük el (a bizonyítás hasonló a többi változó esetén is). Tegyük fel, hogy az $f(x, y, z)$ függvénynek létezik D-n az y változó szerinti parciális deriváltja, és ez korlátos is D-n. Legyenek $P^*(x_0, y^*, z_0)$ és $P^{**}(x_0, y^{**}, z_0)$ egymástól különböző tetszőleges D-beli belső pontok. Feltehetjük, hogy $y^* < y^{**}$. Akkor D-ben vannak olyan $A(x_0, a, z_0)$ és $B(x_0, b, z_0)$ pontok, hogy $a < y^* < y^{**} < b$. A feltételek szerint az $F(y) = f(x_0, y, z_0)$ egyváltozós valós függvény az $[a, b]$ zárt intervallumon differenciálható. Így alkalmazhatjuk rá a differenciálszámítás három középértéktétele közül a Lagrange-féle középértéktételt, amely szerint van olyan $\xi \in (y^*, y^{**})$ pont, melyre

$$\frac{F(y^*) - F(y^{**})}{y^* - y^{**}} = F'(\xi)$$

teljesül. Mivel $F'(\xi) = f'_y(x, \xi, z)$, ezért az f'_y parciális derivált korlátossága miatt létezik olyan N pozitív valós szám, melyre

$$| f'_y(x_0, \xi, z_0) | \leq N$$

teljesül. Így

$$| f(P^*) - f(P^{**}) | = | F(y^*) - F(y^{**}) | \leq N | y^* - y^{**} | .$$

$\square$

Tétel 3.2.7 *(Picard-Lindelöf-féle egzisztencia- és unicitástétel) Abban az esetben, ha az $(n + 1)$-változós valós f függvény az $(n + 1)$-dimenziós $\mathbb{R}^{n+1}$ tér valamely korlátos zárt D halmazán folytonos, és a második változójától kezdve minden változójában eleget tesz a Lipschitz-feltételnek, akkor az*

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

differenciálegyenlethez és a D halmaz tetszőleges belső pontjához tartozó Taylor-típusú kezdetiérték-probléma egyértelműen megoldható.

Példa 3.2.8 *Az*

$$y'' = x + y + \sin(y + y'); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

kezdetiértékprobléma egyértelműen megoldható, mert az

$$f : (x, y_0, y_1) \mapsto x + y_0 + \sin(y_0 + y_1)$$

függvény az $\mathbb{R}^3$ *tér minden pontjában folytonos, és az*

$$f'_{y_0} = 1 + \cos(y_0 + y_1), \quad f'_{y_1} = \cos(y_0 + y_1)$$

parciális deriváltak az $\mathbb{R}^3$ *téren korlátosak.*

4. fejezet

Differenciálegyenletek II

4.1. Elsőrendű közönséges differenciálegyenletek

4.1.1. Szétválasztható változójú differenciálegyenletek

Definíció 4.1.1 *Egy elsőrendű differenciálegyenletet szétválasztható változójúnak (vagy szeparálhatónak) nevezünk, ha ekvivalens átalakításokkal*

$$y' = f(x)g(y)$$

alakra hozható.

Szétválasztható változójú például az

$$(x^2 + 1)y' - x(y^2 - 1) = 0$$

differenciálegyenlet, mert ekvivalens átalakításokkal

$$y' = \frac{x}{x^2 + 1}(y^2 - 1)$$

alakra hozható (itt $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ és $g(y) = y^2 - 1$).

Tétel 4.1.2 . *Ha az egyváltozós valós $f(x)$ függvény az $[a, b]$ zárt intervallumon, az egyváltozós valós $g(y)$ függvény pedig a $[c, d]$ intervallumon folytonos, akkor az $y' = f(x)g(y)$ szétválasztható változójú differenciálegyenlethez és a*

$$D = \{(x, y)|\ x \in [a, b],\ y \in [c, d]\}$$

téglalap alakú halmaz tetszőleges belső pontjánoz tartozó Taylor- típusú kezdetiérték-probléma megoldható. Ha még az is teljesül, hogy a g függvény a $[c, d]$ intervallum egyetlen pontjában sem veszi fel a nulla függvényértéket, akkor a differenciálegyenlethez és a D halmaz tetszőleges belső pontjánoz tartozó Taylor-típusú kezdetiérték-probléma egyértelműen megoldható.

Bizonyítás Ha az egyváltozós valós $f(x)$ függvény az $[a, b]$ zárt intervallumon, az egyváltozós valós $g(y)$ függvény pedig a $[c, d]$ intervallumon folytonos, akkor a kétváltozós valós $f(x)g(y)$ függvény folytonos az $\mathbb{R}^2$ tér korlátos zárt $D = \{(x, y)|\ x \in [a, b],\ y \in [c, d]\}$ halmazán, így a (Cauchy-Peanó-féle egzisztenciatétel miatt) az $y' = f(x)g(y)$ differenciálegyenlethez és a D tetszőleges belső pontjához tartozó Taylor-típusú kezdetiérték-probléma megoldható. Megmutatjuk, hogy ha még az is teljesül, hogy a g függvény a $[c, d]$ intervallum egyetlen pontjában sem veszi fel a nulla függvényértéket, akkor a differenciálegyenlethez és a D halmaz tetszőleges belső pontjánoz tartozó Taylor-típusú kezdetiérték-probléma egyértelműen megoldható. Ha a $g(y)$ függvény sehol sem veszi fel a nulla értéket a $[c, d]$ intervallumon, a vizsgált differenciálegyenlet

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x)$$

alakban írható. Ekkor viszont

$$\int \frac{1}{g(y)} y'(x)dx = \int f(x)dx.$$

Az egyenlőség bal oldala úgy adódik, hogy az $\frac{1}{g(y)}$ függvényt integráljuk az $y = y(x)$ helyettesítéssel. Tehát

$$\int \frac{1}{g(y)} dy|_{y=y(x)} = \int f(x)dx.$$

Jelölje $G(y)$ az $\frac{1}{g(y)}$ függvény egy primitív függvényét. Mivel $\frac{1}{g(y)}$ folytonos a $[c, d]$ intervallumon, ezért ilyen $G(y)$ függvény létezik (pl. $G(y) = \int_c^t \frac{1}{g(t)} dt$). Hasonlóan, létezik az $f(x)$ függvénynek is egy $F(x)$ primitív függvénye. Tehát

$$G(y)|_{y=y(x)} = F(x) + c.$$

Mivel az $\frac{1}{g(y)}$ függvény a $[c, d]$ intervallmon vagy mindenütt pozitív, vagy mindenütt negatív, ezért a $G(y)$ függvény vagy szigorúan monoton növekvő vagy szigorúan monoton csökkenő (mert $G'(y) = \frac{1}{g(y)}$). Mindét esetben $G(y)$ invertálható. Jelölje $G^{-1}(y)$ a $G(y)$ inverzfüggvényét. Akkor a fenti $G(y(x)) = F(x) + c$ egyenlőségből $y(x)$ kifejezhető:

$$y(x) = G^{-1}\left(F(x) + c\right).$$

Így a D tetszőleges (ξ, η) belső pontjára $\eta = G^{-1}\left(F(\xi) + c\right)$ adódik, amelyből a c konstans egyértelműen kifejezhető:

$$c = G(\eta) - F(\xi);$$

ez lesz az

$$y' = f(x)g(y) \quad y(\xi) = \eta$$

Taylor-típusú kezdetiérték-probléma egyetlen megoldása. □

A bizonyítás egyben módszert ad a szétválasztható változójú differenciálegyenlet megoldásához (ha $g(y)$ sehol sem nulla a $[c, d]$ intervallumon). Alkalmazzuk ezt a módszert a következő feladat megoldásához!

Példa 4.1.3 Adjuk meg az

$$y' = e^x y ln y$$

differenciálegyenlet azon $y(x)$ megoldását, amely eleget tesz az $y(ln2) = e$ feltételnek!

Megoldás.

$$\int \frac{1}{y ln y} dy|_{y=y(x)} = \int e^x dx.$$

$$ln(ln\ y(x)) = e^x + c.$$

$$y(x) = e^{e^{(e^x + c)}}.$$

$$e = e^{e^{(e^{ln2} + c)}} = e^{e^{(2+c)}},$$

amely akkor és csak akkor teljesül, ha

$$1 = e^{(2+c)},$$

azaz

$$2 + c = 0.$$

Tehát $c = -2$. Így a megoldás:

$$y(x) = e^{e^{(e^x - 2)}}.$$

4.1.2. Szétválaszthatójúra visszavezethető differenciálegyenletek

Helyettesítéssel szétválasztható változójúvá alakíthatók azok az

$$y' = f(x, y)$$

differenciálegyenletek, amelyekben szereplő $f(x, y)$ függvény az $\frac{y}{x}$ függvénye. Ekkor az $u(x) = \frac{y(x)}{x}$, azaz $y(x) = xu(x)$ helyettesítéssel a differenciálegyenlet

$$u + xu' = f(u)$$

alakra hozható, amely rendezés után

$$u' = \frac{1}{x}(f(u) - u)$$

alakú lesz. Ez pedig egy szétválasztható változójú differenciálegyenlet. Ha $u_0(x)$ ennek egy megoldása, akkor (a fenti helyettesítés alapján)

$$y(x) = xu_0(x)$$

lesz az eredeti differenciálegyenlet általános megoldása.

Példaként oldjuk meg az $y' = \frac{y}{x-y}$ differenciálegyenletet. Ez $x \neq 0$ esetén $y' = \frac{\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$ alakra hozható. Alkalmazzuk az $u = \frac{y}{x}$ helyettesítést. Akkor az

$$u' = \frac{1}{x}(\frac{u}{1-u} - u),$$

azaz

$$u' = \frac{1}{x}\frac{u^2}{1-u}$$

szétválasztható változójú differenciálegyenletet kapjuk. Oldjuk meg ezt a differenciálegyenletet.

$$\int \frac{1-u}{u^2} du = \int \frac{1}{x} dx,$$

$$\int \left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u}\right) du = \int \frac{1}{x} dx,$$

$$-\frac{1}{u} - ln|u| = ln|x| + lnc \quad (c > 0).$$

Átrendezés után

$$-\frac{1}{u} = ln|axu|, \quad (a \neq 0)$$

adódik, amelyben $a = \pm c$. Az u helyébe $\frac{y}{x}$-et visszaírva, majd y-nal szorozva,

$$x = -yln|ay|$$

adódik, amelyben $a \neq 0$.

4.2. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

Az elsőrendű lineáris differenciálegenlet általános (explicit) alakja

$$y' = f(x)y + g(x).$$

Ha $g(x)$ azonosan nulla (azaz a második tag hiányzik a jobb oldalról), akkor a differenciálegyenlet elsőrendű homogén lineáris (azaz elsőfokú), mert minden tag fokszáma 1. Ha $g(x)$ nem azonosan nulla, akkor a differenciálegyenlet elsőrendű inhomogén lineáris, mert a $g(x)$ tag nulladfokú, a másik kettő pedig elsőfokú.

Tétel 4.2.1 *Ha az $f(x)$ és $g(x)$ függvények folytonosak az $[a, b]$ intervallumon, akkor az $y' = f(x)y + g(x)$ differenciálegyenlethez és a $T = \{(x, y) : a < x < b\}$ nyílt halmaz tetszőleges (ξ, η) pontjához tartozó Taylor-típusú kezdetiérték probléma egyértelműen megoldható.*

Bizonyítás Legyen (ξ, η) a nyílt T halmaz teszőleges pontja. Akkor (ξ, η) benne van T-nek egy D korlátos zárt konvex részhalmazában. Az adott feltétel miatt az $f(x)y + g(x)$ kétváltozós függvény folytonos D. Mivel az x-től és y-tól függő $f(x)y + g(x)$ függvény y szerinti parciális deriváltja $f(x)$ folytonos D, ezért korlátos is, hiszen az $\mathbb{R}^2$ tér bármely korlátos zárt részhalmazán folytonos függvény korlátos is ezen a részhalmazon. Így az $f(x)y + g(x)$ függvény a másidik változójában, azaz y-ban eleget tesz a Lipschitz-feltételnek. Ebből pedig adódik a tétel álltása a Picard-Lindelöf-tétel alapján. □

4.2.1. Elsőrendű homogén lineáris differenciálegyenletek

Az elsőrendű homogén lineáris differenciálegyenlet általános alakja

$$y' = f(x)y,$$

amely egy speciális szétválasztható változójú differenciálegyenlet. Ennek megoldása (a korábbi részek alapján):

$$\int \frac{1}{y}dy = \int f(x)dx,$$

amiből

$$lny = F(x) + c$$

adódik, ahol $F(x)$ az $f(x)$ függvény egy primitív függvénye. Ebből $y(x)$ kifejezhető:

$$y(x) = e^{F(x)+c} = Ae^{F(x)},$$

ahol $A = e^c$.

4.2.2. Elsőrendű inhomogén lineáris differenciálegyenletek

Megoldásuk a konstans variálásának módszerével:

Az elsőrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános alakja

$$y' = f(x)y + g(x),$$

ahol $g(x)$ egy nem azonosan nulla függvény. Az elsőrendű inhomogén lineáris differenciálegyenletek megoldása két lépésből áll. Először megoldjuk a hozzá tartozó

$$y' = f(x)y$$

homogén részt; ennek megoldása $y(x) = Ae^{F(x)}$ alakú, ahol $F(x)$ a $f(x)$ egy primitív függvénye. A megoldás második részében az inhomogén egyenlet megoldását keressük

$$y(x) = A(x)e^{F(x)}$$

formában. Mivel a homogén egyenlet megoldásában szereplő konstans A helyére egy x-től függő $A(x)$ függvényt írunk, azért erről az eljárásról azt mondjuk, hogy a konstans variálása. Feltéve, hogy $y(x) = A(x)e^{F(x)}$ megoldása az inhomogén differenciálegyenletnek, behelyettesítés után a következő függvényegyenletet kapjuk a még ismeretlen $A(x)$ függvényre:

$$A'(x)e^{F(x)} + A(x)f(x)e^{F(x)} = f(x)A(x)e^{F(x)} + g(x).$$

Átalakítás után

$$A'(x)e^{F(x)} = g(x),$$

azaz

$$A'(x) = \frac{g(x)}{e^{F(x)}}.$$

Ebből integrálással kapjuk, hogy

$$A(x) = \int \frac{g(x)}{e^{F(x)}} dx.$$

Ezt az $A(x)$-et behelyettesítve az $y(x) = A(x)e^{F(x)}$ képletbe, kapjuk az inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldását.

Példa 4.2.2 Oldjuk meg az

$$y' = yx + x$$

inhomogén lineáris differenciálegyenletet!
Megoldás. A homogén rész

$$y' = yx$$

alakú. Ennek általános megoldása

$$y(x) = ce^{\frac{x^2}{2}},$$

ahol c tetszőleges valós konstans. Az inhomogén egyenlet általános megoldását a konstans variálásának módszerével keressük meg: keressük a megoldást

$$y(x) = A(x)e^{\frac{x^2}{2}}$$

alakban. Az előzőek alapján

$$A(x) = \int xe^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

azaz

$$A(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}} + a,$$

ahol a tetszőleges valós konstans. Ennek alapján az inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}} e^{\frac{x^2}{2}} + ae^{\frac{x^2}{2}} = -1 + ae^{\frac{x^2}{2}}.$$

5. fejezet

Differenciálegyenletek III

5.1. Hiányos másodrendű differenciálegyenletek

Definíció 5.1.1 *Ha az expicit másodrendű*

$$y'' = f(x, y, y')$$

differenciálegyenletből x, y és y' közül legalább az egyik hiányzik, akkor a differenciálegyenletet hiányos másodrendű differenciálegyenletnek nevezzük.

Ha egy expicit másodrendű differenciálegyenletből x és y közül legalább az egyik hiányzik, akkor a differenciálegyenlet megoldása könnyen visszavezethető elsőrendű differenciálegyenletek megoldására.

5.1.1. Az y hiányzik

Ekkor a differenciálegyenlet

$$y'' = f(x, y')$$

alakú. Alkalmazzuk az

$$y'(x) = p(x)$$

helyettesítést. Ekkor az eredeti differenciálegyenlet a $p(x)$ függvényre nézve elsőrendű differenciálegyenlet:

$$p' = f(x, p).$$

Jelölje ennek megoldását (ha van) $p(x, c)$, ahol c valós paraméter. Ebből az eredeti differenciálegyenlet megoldása:

$$y(x) = \int p(x, c)dx.$$

A jobb oldalon az integrálás elvégzésekor újabb paraméter lép be, tehát az eredeti differenciálegyenlet általános megoldását kapjuk.

Példa 5.1.2 Két végén felfüggesztett, csak saját súlyával terhelt lánc a nehézségi erő hatására egy függőleges síkbeli görbe mentén helyezkedik el. Adjuk meg a lánc alakját leíró $y = y(x)$ függvényt.

Megoldás. Kimutatható, hogy ha a görbe síkjában úgy veszünk fel vizszintes x tengelyű derékszögű koordináta-rendszert, hogy a lánc helyzetét leíró $y(x)$ függvényre

$$y(0) = a, \quad y'(0) = 0 \quad (a \neq 0)$$

feltételek teljesülnek, akkor az $y(x)$ függvényt az

$$y'' = \frac{1}{a}\sqrt{1 + y'^2}$$

differenciálegyenlet megoldásaként kapjuk. Oldjuk meg ezt a differenciálegyenletet a fent leírt kezdeti feltételekkel! A $p(x) = y'(x)$ helyettesítés után a differenciálegyenlet

$$p' = \frac{1}{a}\sqrt{1 + p^2},$$

amely egy szétválasztható változójú differenciálegyenlet. Oldjuk meg ezt az egyenletet! Átalakítás után:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}} dp|_{p=p(x)} = \int \frac{1}{a}dx,$$

amely az integrálás elvégzése után

$$arshp(x) = \frac{x}{a} + c_1$$

alakú. Tehát

$$p(x) = sh\left(\frac{x}{a} + c_1\right).$$

Ebből

$$y(x) = a\ ch\left(\frac{x}{a} + c_1\right) + c_2.$$

A kezdeti feltételek alapján

$$a = y(0) = a\ chc_1 + c_2$$

és

$$0 = y'(0) = sh0 + c_1.$$

Ezekből $c_1 = 0$ és $c_2 = 0$ adódik. Így a keresett megoldás:

$$y(x) = a\ ch\frac{x}{a}.$$

5.1.2. Az x hiányzik

Ekkor a differenciálegyenlet

$$y'' = f(y, y')$$

alakú. Az y' függvény úgy is tekinthető, mint y-nak valamely $p(y)$ függvénye. Az x független változót is kiírva,

$$y'(x) = p(y(x)).$$

Deriváljuk x szerint mindkét oldalt:

$$y''(x) = \frac{dp}{dy}y'(x).$$

Tehát

$$y'' = \frac{dp}{dy}p.$$

Így az eredeti differenciálegyenlet

$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p)$$

alakú, amely a $p(y)$ függvényre nézve egy elsőrendű differenciálegyenlet. Jelölje $p = p(y, c_1)$ ennek a megoldását (ha van)! Akkor

$$y' = p(y(x)) = p(y, c_1),$$

amely egy újabb elsőrendű differenciálegyenlet, de most az $y(x)$ függvényre. Ennek megoldásával megkapjuk az eredeti differenciálegyenlet általános megoldását.

Példa 5.1.3 *Határozzuk meg az*

$$1 + y'^2 = 2yy''$$

differenciálegyenlet általános megoldását!

Megoldás. *Végezzük el az $y' = p(y)$ helyettesítést! Akkor az*

$$1 + p^2 = 2yp\frac{dp}{dy}$$

szétválasztható változójú differenciálegyenletet kapjuk. Ennek $p(y)$ megoldására

$$y = c_1(1 + p^2)$$

teljesül, ahol c_1 a 0-tól különböző tetszőleges valós konstans. Az $y' = p(y)$ figyelembevételével, ez az egyenlet az $y(x)$ függvényre nézve egy

$$y = c_1(1 + y'^2)$$

alakú, szétválasztható változójú differenciálegyenlet. Ennek megoldása:

$$y(x) = \frac{(x - c_2)^2}{4c_1} + c_1.$$

5.2. Egzakt differenciálegyenletek

Definíció 5.2.1 *Az elsőrendű*

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0 \tag{5.1}$$

differenciálegyenletet egzakt differenciálegyenletnek nevezzük, ha megadható olyan $u(x, y)$ kétváltozós valós függvény, amelyre

$$P(x, y) = u'_x(x, y) \quad \text{és} \quad Q(x, y) = u'_y(x, y) \tag{5.2}$$

teljesül.

Megjegyzés 5.2.2 Ha a (5.2) feltétel teljesül, akkor az (5.1) differenciálegyenletnek megoldása lesz az az $y(x)$ függvény, amely kielégíti az $u(x,y)=c$ implicit függvénykapcsolatot (itt c tetszőleges valós konstans). Ugyanis az $u(x,y)=c$ egyenlőségből következik, hogy y az x függvénye, és ezért az $u(x,y)=c$ egyenlőség $u(x,y(x))=c$ alakban is írható. Mindkét oldalt x-szerint deriválva, az

$$u'_x(x,y)+u'_y(x,y)y'(x)=0$$

egyenlőség adódik, amely a (5.2) feltételek alapján

$$P(x,y)+Q(x,y)y'=0$$

alakú, azaz $y(x)$ a (5.1) differenciálegyenlet megoldása.

Tétel 5.2.3 *Legyenek $P(x,y)$ és $Q(x,y)$ az xy-sík egyszeresen összefüggő D tartományán olyan folytonos függvények, amelyek esetén a $P'_y(x,y)$ és $Q'_x(x,y)$ parciális deriváltak is léteznek és folytonosak a D halmazon. Ebben az esetben a*

$$P(x,y)+Q(x,y)y'=0$$

differenciálegyenlet akkor és csak akkor egzakt, ha

$$P'_y(x,y)=Q'_x(x,y)$$

teljesül a D halmaz tetszőleges (x,y) pontjában.

A "csak akkor" rész bizonyítása. Ha a

$$P(x,y)+Q(x,y)y'=0$$

differenciálegyenlet egzakt, akkor megadható olyan $u(x,y)$ függvény, melyre

$$u'_x(x,y)=P(x,y) \quad \text{és} \quad u'_y(x,y)=Q(x,y)$$

teljesül. A tétel feltétele szerint léteznek a $P'_y(x,y)=u''_{xy}(x,y)$ és $Q'_x(x,y)=u''_{yx}(x,y)$ parciális deriváltak és folytonosak a D halmazon. A kétváltozós valós függvények vegyes parciális deriváltjairól tanult Young-tétel alapján

$$u''_{xy}(x,y)=u''_{yx}(x,y),$$

azaz

$$P'_y(x,y) = Q'_x(x,y)$$

teljesül a D halmaz minden (x,y) pontjában. □

Példa 5.2.4 Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet:

$$2x + \cos y - (x \sin y)y' = 0.$$

Megoldás. A $P(x,y) = 2x + \cos y$ és $Q(x,y) = -x \sin y$ jelölés alapján

$$P'_y(x,y) = -\sin y = Q'_x(x,y).$$

Tehát a vizsgált differenciálegyenlet egzakt az xy-számsík minden egyszeresen összefüggő D részhalmazán. Így van olyan $u(x,y)$ függvény, amelyre

$$P(x,y) = u'_x(x,y) \quad \text{és} \quad Q(x,y) = u'_y(x,y)$$

teljesül a D halmaz minden (x,y) pontjában. Az $u'_x(x,y) = P(x,y)$ egyenlőségből

$$u(x,y) = \int P(x,y)dx = \int (2x + \cos y)dx = x^2 + x\cos y + g(y)$$

adódik. (Mivel x szerint történt az integrálás, ezért a szokásos konstans tag helyett egy x-től nem függő $g(y)$ tag írható az integrálás eredményébe.) Így az $u'_y(x,y) = Q(x,y)$ feltétel

$$-x \sin y + g'(y) = -x \sin y,$$

azaz

$$g'(y) = 0$$

alakú. Ennek a differenciálegyenletnek megoldása $g(y) = k$, ahol k tetszőleges valós konstans. Tehát

$$u(x,y) = x^2 + x \cos y + k.$$

Így az egzakt differenciálegyenlet megoldása:

$$x^2 + x \cos y = c.$$

Ebből az x-től függő $y(x)$ függvény kifejezhető:

$$y(x) = Arccos\left(\frac{c}{x} - x\right).$$

Definíció 5.2.5 *A kétváltozós valós $M(x, y)$ függvényt a*

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$$

differenciálegyenlet multiplikátorának nevezzük, ha beszorozva vele a differenciálegyenletet, egzakt differenciálegyenletet kapunk.

Megjegyzés 5.2.6 *A 5.2.3 Tétel szerint, ha az xy-sík egyszeresen összefüggő D részhalmazán az $M(x, y)$, $(P(x, y)M(x, y))'_y$ és $(Q(x, y)M(x, y))'_x$ függvények folytanosak, akkor annak szükséges és elégséges feltétele, hogy $M(x, y)$ a differenciálegyenlet multiplikátora legyen az, hogy teljesüljön a*

$$(P(x, y)M(x, y))'_y = (Q(x, y)M(x, y))'_x$$

egyenlőség.

Megjegyzés 5.2.7 *Megmutatható, hogy akkor és csak akkor létezik csak x-től függő $M(x)$ multiplikátor, ha a*

$$\frac{P'_y(x, y) - Q'_x(x, y)}{Q(x, y)}$$

függvény csak x-től függ; ekkor

$$ln|M(x)| = \int \frac{P'_y(x, y) - Q'_x(x, y)}{Q(x, y)}dx.$$

Hasonlóan, akkor és csak akkor létezik csak y-től függő $M(y)$ multiplikátor, ha a

$$\frac{Q'_x(x, y) - P'_y(x, y)}{P(x, y)}$$

függvény csak y-től függ; ekkor

$$ln|M(y)| = \int \frac{Q'_x(x, y) - P'_y(x, y)}{P(x, y)}dy.$$

Példa 5.2.8 Mutassuk meg, hogy a

$$(2xy\cos y + yln y + y\cos x) + (x - x^2 y\sin y - yshy)y' = 0.$$

differenciálegyenlet nem agzakt, és keressünk csak x-től vagy csak y-tól függő multiplikátort!
Megoldás. Most

$$P(x,y) = 2xy\cos y + yln y + y\cos x \quad \text{és} \quad Q(x,y) = x - x^2 y\sin y - yshy.$$

Mivel

$$P'_y(x,y) = 2x\cos y - 2xy\sin y + lny + 1 + \cos x \quad \text{és} \quad Q'_x(x,y) =^{1} -2xy\sin y,$$

ezért a differenciálegyenlet nem egzakt. Mivel

$$\frac{P'_y(x,y) - Q'_x(x,y)}{Q(x,y)} = \frac{2x\cos y + lny + \cos x}{x - x^2 y\sin y - yshy},$$

ezért nincs csak x-től függő multiplikátor. Mivel

$$\frac{Q'_x(x,y) - P'_y(x,y)}{Q(x,y)} = \frac{-2x\cos y - lny - \cos x}{2xy\cos y + yln y + y\cos x} = -\frac{1}{y},$$

ezért van csak y-tól függő $M(y)$ multiplikátor, amely a 5.2.7 Megjegyzés szerint: teljesíti az

$$ln|M(y)| = -\int \frac{1}{y} dy^{=} - lny = ln\frac{1}{y}.$$

Tehát $M(y) = \frac{1}{|y|}$ a vizsgált differenciálegyenlet egy multiplikátora.

6. fejezet

Differenciálegyenletek IV

6.1. Homogén lineáris differenciálegyenletek

Definíció 6.1.1 *A homogén lineáris n-edrendű differenciálegyenlet általános alakja:*

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0, \tag{6.1}$$

ahol $a_0(x)$ *nem azonosan nulla függvény. Az* $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ *valós függvényeket a differenciálegyenlet együtthatófüggvényeinek nevezzük. Ha az együtthatófüggvények mindegyike konstans, akkor az (6.1) differenciálegyenletet állandó együtthatós differenciálegyenletnek nevezzük.*

Megjegyzés 6.1.2 *Nyilvánvaló, hogy minden homogén lineáris differenciálegyenletnek megoldása az azonosan nulla függvény; ezt a függvényt a homogén lineáris differenciálegyenlet triviális megoldásának nevezzük.*

A homogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldásáról szóló tétel megfogalmazásához szükség van néhány fogalomra. A következőkben ezeket részletezzük.

Definíció 6.1.3 *Valamely* I *intervallumon értelmezett komplex (vagy valós) értékű* $f_1, f_2, \ldots, f_r$ *függvények rendszerét az* I *intervallumon lineárisan függetlennek nevezzük, ha a*

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_r f_r(x) = 0 \quad (c_1, c_2, \ldots, c_r \in \mathbb{C})$$

egyenlőségnek az I intervallum minden x pontjára való teljesüléséből

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_r = 0$$

következik. Ha a fenti egyenlőség úgy is teljesül az I intervallum minden x pontjára, hogy a benne szereplő együtthatók között van olyan, amely nem nulla, akkor azt mondjuk, hogy az $f_1, f_2, \ldots, f_r$ függvényrendszer lineárisan függő az I intervallumon.

Megjegyzés 6.1.4 Ha az $f_1, f_2, \ldots, f_r$ függvények valamennyien valós értékűek, akkor az előző definícióban szereplő $c_1, c_2, \ldots, c_r$ konstansok valós számok. Ha csak azt mondjuk, hogy a valós értékű $f_1, f_2, \ldots, f_r$ függvényrendszer lineárian független, illetve lineárisan függő, akkor az intervallumon mindig a $(-\infty, \infty)$ intervallumot értjük.

Példa 6.1.5 Mutassuk meg, hogy a

$$\{\sin x,\ \cos x\}$$

függvényrendszer lineárisan független!

Megoldás. Tegyük fel, hogy a

$$c_1 \sin x + c_2 \cos x = 0$$

egyenlőség tetszőleges x valós számra érvényes. Akkor érvényes az $x = 0$ és $x = \frac{\pi}{2}$ pontokra is, azaz

$$c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 = 0$$

és

$$c_1 \sin \frac{\pi}{2} + c_2 \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

Mivel $\sin 0 = 0,\ \cos 0 = 1,\ \sin \frac{\pi}{2} = 1\ \cos \frac{\pi}{2} = 0$, ezért $c_1 = c_2 = 0$. Tehát a vizsgált függvényrendszer lineárisan független.

Megjegyzés 6.1.6 Mivel $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ minden valós x-re, ezért a $\{\sin^2 x,\ \cos^2 x,\ 1\}$ függvényrendszer lineárisan függő.

Definíció 6.1.7 *Valamely I intervallumon legalább $(r-1)$-szer differenciálható komplex (vagy valós) értékű $f_1, f_2, \ldots, f_r$ függvények Wronski-determinánsán a*

$$W = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_r(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \ldots & f_r'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(r-1)}(x) & f_2^{(r-1)}(x) & \ldots & f_r^{(r-1)}(x) \end{vmatrix}$$

determináns értjük.

Tétel 6.1.8 *Ha az I intervallumon legalább $(r-1)$-szer differenciálható $f_1, f_2, \ldots, f_r$ függvények Wronski-determinánsa az I intervallum legalább egy pontjában nem zérus, akkor ezek a függvények az I intervallumon lineárisan független rendszert alkotnak.*

Megjegyzés 6.1.9 *Az előzőekben megmutattuk, hogy a $\{\sin x,\ \cos x\}$ függvényrendszer lineárisan független. Ennek a függvényrendszernek a Wronski-determinánsa:*

$$W = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1.$$

Így - az előző tétel szerint is - a $\{\sin x,\ \cos x\}$ függvényrendszer lineárisan független

Definíció 6.1.10 *Függvények valamely rendszeréről akkor mondjuk, hogy az egy adott n-edrendű homogén lineáris differenciálegyenletnek alaprendszere egy I intervallumon, ha az alábbi három feltétel mindegyike teljesül.*

(a) A függvényrendszer az I-n értelmezett n számú függvényből áll.

(b) A függvényrendszer lineárisan független I felett.

(c) A függvényrendszer minden függvénye megoldása a differenciálegyenletnek I felett.

Tétel 6.1.11 *Legyenek $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)$ az $[a, b]$ intervallumon folytonos valós függvények, és legyen $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$ az*

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = 0$$

homogén lineáris differenciálegenlet alaprendszere az (a, b) intervallumon. Ekkor a differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x)$$

alakban írható fel, ahol $c_1, c_2, \ldots c_n$ tetszőleges valós számok.

Definíció 6.1.12 *Az n-edrendű állandó együtthatós homogén lineáris*

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = 0$$

differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletén az n-edfokú

$$a_0t^n + a_1tn - 1 + \cdots + a_{n-1}t + a_n = 0$$

algebrai egyenletet értjük. A karakterisztikus egyenlet bal oldalán álló polinomot a differenciálegyenlet karakterisztikus polinomjának nevezzük.

Tétel 6.1.13 *Egy e^{tx} alakú függvény (t komplex konstans) függvény akkor és csak akkor megoldása az n-edrendű állandó együtthatós homogén lineáris*

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = 0$$

differenciálegyenletnek, ha t gyöke a differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletének.

Bizonyítás Mivel a e^tx függvény k-dik deriváltja t^ke^{tx}, ezért e^{tx} akkor és csak akkor megoldása az

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = 0$$

differenciálegyenletnek, ha az e^{tx} függvénynek a differenciálegyenletbe való behelyettesítésével azonosságot kapunk, azaz

$$a_0 t^n e^{tx} + a_1 t^{n-1} e^{tx} + \cdots + a_{n-1} t e^{tx} + a_n e^{tx} = 0,$$

ami

$$(a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_{n-1} t + a_n) e^{tx} = 0$$

alakban is írható. Mivel az e^{tx} függvény sehol sem vesz fel nulla értéket, ezért ennek az egyenlőségnek a bal oldalán álló szorzat akkor és csak akkor nulla, ha az első tényezője nulla, azaz,

$$a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_{n-1} t + a_n = 0.$$

Ez pedig éppen azt jelenti, hogy t gyöke a differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletének. $\square$

Megjegyzés 6.1.14 Az

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

differenciálegyenlethez az

$$a_0 t^n + a_1 tn - 1 + \cdots + a_{n-1} t + a_n = 0$$

karakterisztikus egyenlet gyökeinek segítségével, exponenciális függvényekből, trigonometriai függvényekből és polinomfüggvényekből képezhetünk alaprendszert a következő szabály szerint:

(1) Ha t_0 a karakterisztikus egyenletnek egyszeres valós gyöke, akkor az alaprendszerbe az
$$e^{t_0 x}$$
függvényt vesszük be.

(2) Ha t_0 a karakterisztikus egyenletnek egyszeres nem valós gyöke, mégpedig $t_0 = u_0 + iv_0$ ($v_0 \neq 0$), akkor az alaprendszerbe az
$$e^{u_0 x} \cos v_0 x \quad \text{és} \quad e^{u_0 x} \sin v_0 x$$
függvényeket vesszük fel (ezzel már a t_0 konjugáltját is figyelembe vettük).

(3) Ha t_0 a karakterisztikus egyenletnek többszörös valós gyöke, mégpedig m_0-szoros, akkor az alaprendszerbe az

$$x^k e^{t_0 x} \quad (k = 0, 1, \ldots, m_0 - 1)$$

függvényeket vesszük be.

(4) Ha t_0 a karakterisztikus egyenletnek többszörös nem valós gyöke, mégpedig $t_0 = u_0 + iv_0 (v_0 \neq 0)$, és t_0 a karakterisztikus egyenletnek m_0-szoros gyöke, akkor az alaprendszerbe az

$$x^k e^{u_0 x} \cos v_0 x \text{ és } x^k e^{u_0 x} \sin v_0 x \ (k = 0, 1, \ldots, m_0 - 1)$$

függvényeket vesszük fel (ezzel már a t_0 konjugáltját is figyelembe vettük).

Az összes t_0 gyökkel így képezett függvények együtt meg is adják az állandó együtthatós homogén lineáris

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

differenciálegyenlet alaprendszerét.

Példa 6.1.15 Oldjuk meg az

$$y^{(5)} + y^{(4)} - y' - y = 0$$

5-ödrendű homogén lineáris differenciálegyenletet!

Megoldás. A differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete

$$t^5 + t^4 - t - 1 = 0.$$

A racionális gyökteszt alapján ennek az egyenletnek a racionális gyökei lehetnek 1, illetve -1. Alkalmazzuk a Horner-módszert. Az

	1	1	0	0	-1	-1
1	1	2	2	2	1	0

táblázat azt mutatja, hogy 1 gyöke a karakterisztikus egyenletnek, és

$$t^5 + t^4 - t - 1 = (t - 1)(t^4 + 2t^3 + 2t^2 + 2t + 1).$$

A $t^4 + 2t^3 + 2t^2 + 2t + 1 = 0$ egyenlet lehetséges racionális gyökei 1 és -1. Alkalmazzuk ismét a Horner-módszert.

	1	2	2	2	1
1	1	3	5	7	8

táblázat azt mutatja, hogy 1 nem gyök. Az

	1	2	2	2	1
-1	1	1	1	1	0

táblázat viszont azt mutatja, hogy -1 gyök, és

$$t^4 + 2t^3 + 2t^2 + 2t + 1 = (t+1)(t^3 + t^2 + t + 1).$$

Így

$$t^5 + t^4 - t - 1 = (t-1)(t+1)(t^3 + t^2 + t + 1).$$

A $t^3 + t^2 + t + 1 = 0$ egyenletnek -1 lehet gyöke. Alkalmazzuk a Horner-módszert. Az

	1	1	1	1
-1	1	0	1	0

táblázat azt mutatja, hogy -1 gyök és

$$t^3 + t^2 + t + 1 = (t+1)(t^2+1).$$

Mivel

$$t^2 + 1 = (t-i)(t+i),$$

ezért

$$t^5 + t^4 - t - 1 = (t-1)(t+1)^2(t-i)(t+i).$$

Tehát a karakterisztikus egyenlet gyökei:

- $t_1 = 1$ egyszeres valós gyök;
- $t_{2,3} = -1$ kétszeres valós gyök;
- $t_4 = i$ és annak konjugáltja $t_5 = -i$ egyszeres nem valós komplex gyökök.

Ennek alapján a differenciálegyenlet alaprendszere:

$$e^x,\ e^{-x},\ xe^{-x},\ \cos x,\ \sin x.$$

Így a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3xe^{-x} + c_4\cos x + c_5\sin x.$$

7. fejezet

Differenciálegyenletek V

7.1. Inhomogén lineáris differenciálegyenletek

Definíció 7.1.1 *Az n-edrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános alakja:*

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x), \tag{7.1}$$

ahol $a_0(x)$ és $f(x)$ nem azonosan nulla függvények. A (7.1) inhomogén lineáris differenciálegyenlethez tartozó homogén lineáris differenciálegyenleten az

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0, \tag{7.2}$$

differenciálegyenletet értjük.

Megjegyzés 7.1.2 *Az inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldását úgy határozzuk meg, hogy meghatározzuk a homogén rész*

$$Y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x)$$

általános megoldását, és a konstansok variálásának módszerét (a 7.1.3 Tételt) vagy a 7.1.8 Tételt alkalmazzuk.

Tétel 7.1.3 *Ha $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ az*

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0$$

n-edrendű homogén lineáris differenciálegyenlet alaprendszere valamely I intervallumon, akkor az

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x)$$

inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \cdots + c_n(x)y_n(x),$$

ahol a $c_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ függvények az

$$\begin{array}{cccc} y_1(x)c_1'(x) & +\cdots & +y_n(x)c_n'(x) & = 0 \\ y_1'(x)c_1'(x) & +\cdots & +y_n'(x)c_n'(x) & = 0 \\ y_1''(x)c_1'(x) & +\cdots & +y_n''(x)c_n'(x) & = 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x)c_1'(x) & +\cdots & +y_n^{(n-1)}(x)c_n'(x) & = f(x) \end{array}$$

egyenletrendszerből számíthatók.

Megjegyzés 7.1.4 *A fenti egyenletrendszer mátrixa*

$$\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & \cdots & y_n''(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix},$$

melynek determinánsa az $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$ függvényrendszer Wronski-determinánsa.

Tétel 7.1.5 *($n = 2$ eset) Ha $\{y_1, y_2\}$ az*

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

másodrendű homogén lineáris differenciálegyenlet alaprendszere valamely I intervallumon, akkor az

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$$

inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x),$$

ahol

$$c_1(x) = \int \frac{W_1(x)}{W(x)}\,dx \quad c_2(x) = \int \frac{W_2(x)}{W(x)}\,dx,$$

amelyekben

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

és

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}, \quad W_2(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & f(x) \end{vmatrix}.$$

Példa 7.1.6 Oldjuk meg az

$$y'' - 5y' + 6y = x$$

másodrendű inhomogén lineáris differenciálegyenletet!

Megoldás. A vizsgált differenciálegyenlet homogén része a konstans együtthatós

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

differenciálegyenlet, melynek karakterisztikus egyenlete

$$t^2 - 5t + 6 = 0.$$

Ennek megoldásai $t_1 = 2$ és $t_2 = 3$. Így a homogén rész alaprendszere az $\{e^{2x},\ e^{3x}\}$ függvényrendszer. Ennek Wronski determinánsa

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix} = 3e^{5x} - 2e^{5x} = e^{5x}.$$

Mivel

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & e^{3x} \\ x & 3e^{3x} \end{vmatrix} = -xe^{3x}, \quad W_2(x) = \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & x \end{vmatrix} = xe^{2x},$$

ezért

$$c_1(x) = \int \frac{-xe^{3x}}{e^{5x}}\,dx = -\int xe^{-2x}\,dx = \frac{1}{4}(2x+1)e^{-2x} + k_1,$$

$$c_2(x) = \int \frac{xe^{2x}}{e^{5x}}\, dx = \int xe^{-3x}\, dx = -\frac{1}{9}(3x+1)e^{-3x} + k_2.$$

Így az inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) =$$

$$= (\frac{1}{4}(2x+1)e^{-2x} + k_1)e^{2x} + (-\frac{1}{9}(3x+1)e^{-3x} + k_2)e^{3x} =$$

$$= \frac{1}{4}(2x+1) - \frac{1}{9}(3x+1) + k_1e^{2x} + k_2e^{3x} = \frac{1}{6}x + \frac{5}{36} + k_1e^{2x} + k_2e^{3x}.$$

Behelyettesítéssel ellenőrízhető, hogy ez a függvény megoldása a kiinduló inhomogén differenciálegyenletnek.

Tétel 7.1.7 *($n = 3$ eset) Ha $\{y_1, y_2, y_3\}$ az*

$$y^{(3)} + a_1(x)y'' + a_2(x)y' + a_3(x)y = 0$$

harmadrendű homogén lineáris differenciálegyenlet alaprendszere valamely I intervallumon, akkor az

$$y^{(3)} + a_1(x)y'' + a_2(x)y' + a_3(x)y = f(x)$$

inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + c_3(x)y_3(x),$$

ahol

$$c_1(x) = \int \frac{W_1(x)}{W(x)}\, dx \quad c_2(x) = \int \frac{W_2(x)}{W(x)} \quad c_3(x) = \int \frac{W_3(x)}{W(x)} dx,$$

amelyekben

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{vmatrix}, \quad W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & y_2(x) & y_3(x) \\ 0 & y_2'(x) & y_3'(x) \\ f(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{vmatrix},$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & 0 & y_3(x) \\ y_1'(x) & 0 & y_3'(x) \\ y_1''(x) & f(x) & y_3''(x) \end{vmatrix} \quad W_3(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & 0 \\ y_1'(x) & y_2'(x) & 0 \\ y_1''(x) & y_2''(x) & f(x) \end{vmatrix}.$$

Tétel 7.1.8 *Inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása egy I intervallumon úgy is megkapható, hogy a homogén rész általános megoldásához hozzáadjuk az inhomogén differenciálegyenlet egy tetszőlegesen választott partikuláris megoldását.*

Példa 7.1.9 Oldjuk meg az

$$y'' - 5y' + 4y = 4x - 5$$

inhomogén lineáris differenciálegyenletet!

Megoldás. A homogén rész karakterisztikus egyenlete

$$t^2 - 5t + 4 = 0,$$

melynek gyökei $t_1 = 1$ és $t_2 = 4$. Így az alaprendszere $\{e^x, e^{4x}\}$. Tehát a homogén rész általános megoldása

$$Y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{4x}.$$

Könnyen ellenőrízhető, hogy az $y_0(x) = x$ függvény megoldása az inhomogén differenciálegyenletnek. Így az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = Y(x) + y_0(x) = c_1 e^x + c_2 e^{4x} + x.$$

Az előző feladatnál segítségül megmondtuk, hogy $y_0(x) = x$ az inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása. A következő tételek segítséget nyújtanak ahhoz, hogy találjunk az állanó együtthatós inhomogén lineáris differenciálegyenletnek parikuláris megoldásait egyes esetekben.

Tétel 7.1.10 *Ha az állandó együtthatós*

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = B_0 e^{mx} \quad (B_0 \neq 0)$$

ihhomogén lineáris differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletének az m szám nem gyöke, akkor ennek a differenciálegyenletnek van

$$y_0(x) = Ae^{mx}$$

alakú partikuláris megoldása.

Bizonyítás Mivel az $y_0(x) = Ae^{mx}$ függvény k-dik deriváltja $y_0^{(k)}(x) = Am^k e^{mx}$, ezért $y_0(x)$ akkor és csak akkor megoldása a differenciálegyenletnek, ha

$$a_0Am^n e^{mx} + a_1Am^{n-1}e^{mx} + \cdots + a_nAe^{mx} = B_0e^{mx},$$

azaz

$$A(a_0m^n + a_1m^{n-1} + \cdots + a_n)e^{mx} = B_0e^{mx},$$

ami azzal ekvivalens, hogy

$$A(a_0m^n + a_1m^{n-1} + \cdots + a_n) = B_0.$$

Mivel m nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek, a fenti egyenlőség bal oldalának második tényzője nem nulla. Ezzel elosztva az egyenletet,

$$A = \frac{B_0}{a_0m^n + a_1m^{n-1} + \cdots + a_n}$$

adódik. Ezzel az A-val képezett $y_0(x) = Ae^{mx}$ függvény megoldása az inhomogén differenciálegyenletnek. □

Tétel 7.1.11 *Ha az*

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = e^{mx}(b_0 + b_1x + \cdots + b_rx^r)\ (b_r \neq 0)$$

ihhomogén lineáris differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletének az m szám k-szoros gyöke, akkor ennek a differenciálegyenletnek van

$$y_0(x) = x^k e^{mx}(B_0 + B_1x + \cdots + B_rx^r)$$

alakú partikuláris megoldása.

Tétel 7.1.12 *Ha az állandó együtthatós*

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_ny = a\ ch\ mx + b\ sh\ mx\ (m \neq 0, a^2 + b^2 \neq 0)$$

ihhomogén lineáris differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletének az m és a $-m$ szám is k-szoros gyöke, akkor ennek a differenciálegyenletnek van

$$y_0(x) = x^k(A\ ch\ mx + B\ sh\ mx)$$

alakú partikuláris megoldása.

Tétel 7.1.13 *Ha az állandó együtthatós*

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_ny = a\cos mx + b\sin mx \ (m \neq 0, a^2 + b^2 \neq 0)$$

ihhomogén lineáris differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletének az im képzetes szám k-szoros gyöke, akkor ennek a differenciálegyenletnek van

$$y_0(x) = x^k(A\cos mx + B\sin mx)$$

alakú partikuláris megoldása.

Tétel 7.1.14 *Ha egy*

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_r(x)$$

alakú ihhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása $Y(x)$, és az

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f_i(x)$$

inhomogén lineáris differenciálegyenletnek $g_i(x)$ egy partikuláris megoldása ($i = 1, 2, \ldots, r$), akkor az eredeti

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_r(x)$$

differenciálegyenletnek az általános megoldása

$$y(x) = Y(x) + g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_r(x).$$

8. fejezet

Differenciálegyenletek VI

8.1. Euler-féle differenciálegyenletek

Definíció 8.1.1 *Euler-féle n-edrendű differenciálegyenletnek az olyan*

$$a_0 y^{(n)} + \frac{a_1}{x} y^{(n-1)} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} y' + \frac{a_n}{x^n} y = f(x), \quad (a_0 \neq 0) \tag{8.1}$$

alakú differenciálegyenleteket nevezzük, amelyekben $a_0, a_1, \ldots, a_n$ adott konstansok, $f(x)$ pedig adott egyváltozós valós függvény. Ha $f(x)$ azonosan nulla, akkor homogén, ha $f(x)$ nem azonosan nulla, akkor inhomogén Euler-féle differenciálegyenletről beszélünk.

Az Euler-féle differenciálegyenletnek $x = 0$ esetén nincs értelme.

8.1.1. Homogén Euler-féle differenciálegyenletek

A homogén Euler-féle differenciálegyenletek megoldása úgy történik, hogy pozitív x-ek esetén az $x = e^z$, negatív x-ek esetén az $x = -e^z$ helyettesítést végezzük el, és ezzel (mindkét esetben) a z-től függő y függvényre egy konstans együtthatós homogén lineáris differenciálegyenletet kapunk. Ennek karakterisztikus egyenletét az eredeti homogén Euler-féle differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletének nevezzük.

Az y-nak a z szerinti deriváltját $\dot{y}$-nal jelölve, az előzőekben említett helyettesítéseknél

$$y' = \dot{y} e^{-z} sgn x, \; y'' = (\ddot{y} - \dot{y}) e^{-2z}, \; y''' = (\dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y}) e^{-3z} sgn x$$

adódik. Ezeknek megfelelően az (8.1) homogén Euler-féle differenciálegyenletből az $n = 2$ esetben az

$$a_0\ddot{y} + (a_1 - a_0)\dot{y} = a_2 y = 0$$

az $n = 3$ esetben pedig az

$$a_0\dddot{y} + (a_1 - 3a_0)\ddot{y} + (a_2 - a_1 + 2a_0)\dot{y} + a_3 y = 0$$

állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenletet kapjuk, amelyben szereplő y függvény és deriváltjai a z független változó függvényei.

Egyszerű számolássl igazolható, hogy a karakterisztikus egyenlet gyökeinek ismeretében a homogén Euler-féle differenciálegyenlet egy alaprendszerét a $(0, \infty)$ intervallumon a következőképpen írhatjuk fel.

(1) Ha t_0 a karakterisztikus egyenletnek egyszeres valós gyöke, akkor az alaprendszerbe az

$$x^{t_0}$$

függvényt vesszük be.

(2) Ha t_0 a karakterisztikus egyenletnek egyszeres nem valós gyöke, mégpedig $t_0 = u_0 + iv_0$ $(v_0 \neq 0)$, akkor az alaprendszerbe az

$$x^{u_0}\cos(v_0 lnx) \quad \text{és} \quad x^{u_0}\sin(v_0 lnx)$$

függvényeket vesszük fel (ezzel már a t_0 konjugáltját is figyelembe vettük).

(3) Ha t_0 a karakterisztikus egyenletnek többszörös valós gyöke, mégpedig m_0-szoros, akkor az alaprendszerbe az

$$x^{t_0} ln^s x \quad (s = 0, 1, \dots, m_0 - 1)$$

függvényeket vesszük be.

(4) Ha t_0 a karakterisztikus egyenletnek többszörös nem valós gyöke, mégpedig $t_0 = u_0 + iv_0 (v_0 \neq 0)$, és t_0 a karakterisztikus egyenletnek m_0-szoros gyöke, akkor az alaprendszerbe az

$$x^{u_0} ln^s x \cos(v_0 lnx) \text{ és } x^{u_0} ln^s x \sin(v_0 lnx) \ (s = 0, 1, \dots, m_0 - 1)$$

függvényeket vesszük fel (ezzel már a t_0 konjugáltját is figyelembe vettük).

Az előzőekből az is nyílvánvaló, hogy a homogén Euler-féle differenciálegyenlethez úgy adhatjuk meg az alaprendszert a $(-\infty, 0)$ intervallumon, hogy az előzőekben leírtakat x helyett $-x$-szel vesszük figyelembe.

8.2. Inhomogén Euler-féle differenciálegyenletek

Egy inhomogén Euler-féle differenciálegyenlet általános megoldását megkaphatjuk, ha meghatározzuk a homogén részének egy alaprendszerét, majd alkalmazzuk a konstansok variálásának módszerét. Az inhomogén Euler-féle differenciálegyenlet általános megoldást úgy is megkaphatjuk, hogy az $x = e^z$ (vagy $x = -e^z$) helyettesítést az eredeti Euler-féle inhomogén differenciálegyenletnél alkalmazzuk, az így keletkezett konstans együtthatós inhomogén lineáris differenciálegyenletnek meghatározzuk a z-től függő általános megoldását, majd ebben elvégezzük a $z = lx$ helyettesít. Ilyen megoldást szemléltet a következő példa.

Példa 8.2.1 Oldjuk meg az

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = \frac{1}{x^2}lnx$$

Euler-féle inhomogén differenciálegyenletet!

Megoldás. Az lnx tag miatt $x > 0$. Alkalmazzuk az $x = e^z$, helyettesítést. Ekkor $y' = \dot{y}e^{-z}$ és $y'' = (\ddot{y} - \dot{y})e^{-2z}$. Helyettesítsük be ezeket a differenciálegyenletbe:

$$(\ddot{y} - \dot{y})e^{-2z} + \dot{y}e^{-2z} - ye^{-2z}y = z.$$

Átrendezés után a z-től függő y függvényre az alábbi konstans együtthatós inhomogén lineáris differenciálegyenlet adódik:

$$\ddot{y} - y = z.$$

Ennek homogén része az

$$\ddot{y} - y = 0,$$

melynek karakterisztikus egyenlete

$$t^2 - 1 = 0.$$

Ennek gyökei

$$t_1 = -1, \quad t_2 = 1.$$

Így az alaprendszer függvényei

$$y(z) = e^{-z} \quad \text{és} \quad e^z.$$

Ennek alapján a homogén rész általános megoldása

$$Y(z) = c_1 e^{-z} + c_2 e^z.$$

Az inhomogén konstans együtthatós differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása $y_0(z) = Az + B$ alakban kereshető. Ekkor

$$y_0'(z) = A \quad \text{és} \quad y_0''(z) = 0.$$

Helyettesítsük ezeket be az inhomogén konstans együtthatós differenciálegyenletbe:

$$-(Az + B) = z,$$

azaz,

$$-Az - B = z.$$

Ebből $A = -1$ és $B = 0$ adódik. Tehát $y_0(z) = -z$. Így az inhomogén konstans együtthatós differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(z) = c_1 e^{-z} + c_2 e^z - z.$$

Az eredeti Euler-féle differenciálegyenlet általános megoldását megkapjuk, ha ebbe a függvénybe az e^z helyére x-et helyettesítünk. Tehát

$$y(x) = \frac{c_1}{x} + c_2 x - lnx.$$

9. fejezet

Laplace-transzformáció és alkalmazása

9.1. A Laplace-transzformáció fogalma és alaptulajdonságai

Definíció 9.1.1 *A $(0, \infty)$ intervallumon értelmezett komplex értékű f függvény Laplace-transzformáltján azt a komplex változós függvényt értjük, amely valamely p komplex helyen függvényértékként az*

$$\mathcal{L}\{f; p\} = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt$$

értéket veszi fel, feltéve, hogy a képletben szereplő impropius integrál létezik.

Jelölése: $\mathcal{L}\{f\}$ vagy (mint a definícióban) $\mathcal{L}\{f; p\}$.

Megjegyzés 9.1.2 H az f függvény értelmezési tartománya bővebb a $(0, \infty)$ intervallumnál, Laplace-transzformáltját akkor is az előző definícióban szereplő képlettel értelmezzük. Abban az esetben, ha az f nincs értelmezve a $(0, \infty)$ intervallum egyes pontjaiban, akkor Laplace-transzformáltjának képzésekor feltételezzük, hogy a függvény ezeken a helyeken 0 értéket vesz fel.

Definíció 9.1.3 *A $(0,\infty)$ intervallumon vagy annak valamely valódi részhalmazán értelmezett komplex értékű f függvényről azt mondjuk, hogy Laplace-transzformálható, ha eleget tesz a következő két feltételnek:*

(1) f a $(0,\infty)$ intervallum minden véges részintervallumán integrálható, feltéve, hogy azokon a helyeken, ahol f eredetileg nem volt értelmezve, 0 legyen a függvényérték.

(2) Megadhatók olyan K és c nemnegatív valós számok, hogy a $(0,\infty)$ intervallum minden t elemére $|f(t)| \leq Ke^{ct}$. teljesül.

Tétel 9.1.4 *Ha az f függvény Laplace-transzformálható, akkor Laplace-transzformáltja létezik és abszolút konvergens a komplex számsík $\{p|Rep > c\}$ félsíkján (itt c a Laplace-transzformálhatóság definíciójának (2) feltételében szereplő nemnegatív valós szám), továbbá $\lim_{Rep\to\infty} \mathcal{L}\{f;p\} = 0$.*

Legyen például

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t < 1 \\ ln\ t, & \text{ha } t \geq 1 \end{cases}.$$

Minden $t \in (0,\infty)$ értékre $|f(t)| = f(t) \leq t \leq e^t$, így a $K = c = 1$ választással az $|f(t)| \leq Ke^{ct}$ egyenlőtlenség minden pozitív t-re fennáll. Tehát az f függvény Laplace-transzformálható.

Tétel 9.1.5 *Az $f(t) = k$ konstans függvény Laplace-transzformálható, és $\mathcal{L}\{k;p\} = \frac{k}{p}$, ha $Rep > 0$.*

Bizonyítás. A Laplace-transzformálhatóság definíciójában szereplő (1) feltétel nyílvánvalóan teljesül. Mivel a (2) feltétel is teljesül a $K =| k |$ és $c = 0$ nemnegatív valós számokkal, azaz $| f(t) |=| k |\leq| k | e^{0t}$, ezért $f(t) = k$ Laplace-transzformálható a $Rep > 0$ félsíkon. Tegyük fel, hogy p olyan komlex szám, amelyre $Rep > 0$ teljesül. Akkor

$$\mathcal{L}\{k;p\} = \int_0^\infty ke^{-pt}dt = k\left[\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^\infty = \frac{k}{p}\left(1 - \lim_{t\to\infty} e^{-pt}\right) = \frac{k}{p},$$

mert a $\lim_{t\to\infty} e^{-pt}$ határérték $Rep > 0$ miatt 0-val egyenlő. □

Nem részletezzük, csak a végeredményt írjuk fel, hogy tetszőleges n nem-negatív egész esetén

$$\mathcal{L}\{t^n; p\} = \frac{n!}{p^{n+1}} \quad (Rep > 0).$$

A valós v kitevős t^v függvénynek a $v \leq -1$ esetén nincs Laplace-transzformáltja. Ha $v > -1$, akkor t^v Laplace transzformáltja az Euler-féle Γ-függvénnyel fejezhető ki a következő formában

$$\mathcal{L}\{t^v; p\} = \frac{\Gamma(v+1)}{p^{v+1}} \quad (v > -1; Rep > 0).$$

Emlékeztetől felírjuk a Γ függvény definícióját:

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du.$$

Mivel $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, ezért az előző képletnek a $v = -\frac{1}{2}$ esetre való alkalmazásaként

$$\mathcal{L}\{\frac{1}{\sqrt{t}}; p\} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{p^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{p}}; \quad (Rep > 0)$$

adódik.
A számítás elvégzése nélkül közöljük, hogy

$$\mathcal{L}\{lnt; p\} = -\frac{1}{p}(C + lnp) \quad (Rep > 0),$$

ahol C az un. Euler-Mascheroni-féle szám, azaz

$$C := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - lnn\right).$$

Tétel 9.1.6 *Ha az f függvénynek van Laplace-transzformáltja, akkor bármely k komplex konstansszorosának is van, mégpedig*

$$\mathcal{L}\{kf\} = k\mathcal{L}\{f\}.$$

Tétel 9.1.7 *Ha az f és g függvényeknek van Laplace-transzformáltja, akkor összegüknek is van, mégpedig*

$$\mathcal{L}\{f+g\} = \mathcal{L}\{f\} + \mathcal{L}\{g\}.$$

Tétel 9.1.8 *Tetszőleges a komplex szám esetén $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{p-a}$, ha $Rep > Rea$.*

Bizonyítás.

$$\mathcal{L}\{e^{at}; p\} = \int_0^\infty e^{-pt}e^{at}dt = \int_0^\infty e^{-(p-a)t}dt.$$

Az utolsó integrál az 1 konstans függvény Laplace-transzformáltja a $p-a$ helyen, amely $Re(p-a) > 0$, azaz $Rep > Rea$ esetén a 9.1.5 Tétel miatt egyenlő $\frac{1}{p-a}$-val. Tehát

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{p-a}.$$

□

Tétel 9.1.9 *Tetszőleges a komplex szám esetén*

$$\mathcal{L}\{shat\} = \frac{a}{p^2-a^2} \quad \text{és} \quad \mathcal{L}\{chat\} = \frac{p}{p^2-a^2},$$

ha $Rep > Rea$ és $Rep > Re(-a)$.

Bizonyítás.

$$\mathcal{L}\{sh\ at; p\} = \mathcal{L}\{\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}; p\} = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\{e^{at}; p\} - \mathcal{L}\{e^{-at}; p\}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-a} - \frac{1}{p+a}\right) = \frac{a}{p^2-a^2},$$

feltéve, hogy $Rep > Rea$ és $Rep > Re(-a)$.

Hasonló számolással adódik, hogy

$$\mathcal{L}\{ch\ at; p\} = \frac{p}{p^2-a^2},$$

ha $Rep > Rea$ és $Rep > Re(-a)$). Részletezve,

$$\mathcal{L}\{ch\ at;p\} = \mathcal{L}\{\frac{e^{at}+e^{-at}}{2};p\} = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\{e^{at};p\} + \mathcal{L}\{e^{-at};p\}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p+a}\right) = \frac{p}{p^2-a^2},$$

feltéve, hogy $Rep > Rea$ és $Rep > Re(-a)$.

Tétel 9.1.10 *Tetszőleges a komplex szám esetén*

$$\mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{p^2+a^2} \quad \text{és} \quad \mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{p}{p^2+a^2},$$

ha $Rep > Rea$ és $Rep > Re(-a)$.

Bizonyítás. Legyen p olyan komplex szám, amelyre $Rep > Rea$ és $Rep > Re(-a)$ teljesül. Mivel $\sin at = -ishiat$, ezért a 9.1.9 Tétel felhasználásával kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}\{\sin at;p\} = -i\mathcal{L}\{shiat;p\} = -i\frac{ia}{p^2-(ia)^2} = \frac{a}{p^2+a^2}.$$

Mivel $\cos at = chiat$, ezért a 9.1.9 Tétel felhasználásával adódik az

$$\mathcal{L}\{\cos at;p\} = \mathcal{L}\{chiat;p\} = \frac{p}{p^2-(ia)^2} = \frac{p}{p^2+a^2}$$

egyenlőség. □

9.2. A konvolúciótétel és következményei

Definíció 9.2.1 *A $(0,\infty)$ intervallumon értelmezett, valós értékű f és g függvények konvolúciójának nevezzük és $f \star g$-vel jelöljük azt a függvényt, amely minden egyes nemnegatív valós t számhoz az*

$$f \star g := \int_0^t f(s)g(t-s)ds$$

értéket rendeli, feltéve, hogy ez az integrál létezik.

Tétel 9.2.2 *(Konvolúciótétel) Legyenek f és g Laplace-transzformálható függvények, mégpedig*

$$|f(t)| \leq K_1 e^{c_1 t} \quad \text{és} \quad |g(t)| \leq K_2 e^{c_2 t},$$

ha $t \in (0, \infty)$, ahol K_1, K_2, c_1, c_2 nemnegatív valós konstansok. Akkor a két függvény konvolúciójának Laplace-transzformáltja a komplex számsík

$$F = \{p | Rep > \sup\{c_1, c_2\}\}$$

félsíkján létezik, és egyenlő a két függvény Laplace-transzformáltjának szorzatával:

$$\mathcal{L}\{f \star g\} = \mathcal{L}\{f\}\mathcal{L}\{g\}.$$

Tétel 9.2.3 *(Függvény integráljának Laplace-transzformáltja) Ha az f függvény Laplace-transzformálható, akkor bármely $[0, t]$ intervallumon vett integrálja is Laplace-transzformálható, mégpedig*

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(s)ds; p\right\} = \frac{1}{p}\mathcal{L}\{f; p\}.$$

Ismeretes, hogy $\sin^2 t$ deriváltja $\sin 2t$, így

$$\int_0^t \sin 2s ds = \sin^2 t.$$

Ebből a $\sin^2 t$ függvény Laplace-transzformáltja (az előző tételt is használva) a következőképpen adódik:

$$\mathcal{L}\{\sin^2 t; p\} = \mathcal{L}\int_0^t \sin 2s ds; p = \frac{1}{p}\mathcal{L}\{\sin 2t; p\} = \frac{1}{p}\frac{2}{p^2+4}.$$

Tétel 9.2.4 *(Függvény deriváltjának Laplace-transzformáltja) Ha az egyváltozós valós f függvénynek a $(0, \infty)$ intervallumon korlátos és folytonos deriváltja van, akkor*

$$\mathcal{L}\{f'; p\} = p\mathcal{L}\{f; p\} - \lim_{t \to +0} f(t).$$

Teljes indukcióval bizonyítható a magasabb rendű deriváltakra is vonatkozó következő képlet:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)};p\} = p^n \mathcal{L}\{f;p\} - \sum_{i=0}^{n-1} p^{n-1-i} f_i,$$

ahol

$$f_i = \lim_{t \to +0} f^{(i)}(t).$$

9.3. A Laplace-transzformált differenciálása és integrálása

Tétel 9.3.1 *(A Laplace-transzformált deriváltja) Ha az f függvénynek van Laplace-transzformáltja, és ez a Laplace transzformált a p változónak reguláris függvénye, akkor*

$$\frac{d^n \mathcal{L}\{f;p\}}{dp^n} = (-1)^n \mathcal{L}\{t^n f(t)\}.$$

Tétel 9.3.2 *(A Laplace-transzformált integrálja) Legyen f a $(0,\infty)$ intervallumon értelmezett komplex értékű függvény, amelyre a következő feltételek teljesülnel:*

(1) Van olyan pozitv c valós szám, hogy a komplex számsík $\{p|\ Rep > c\}$ félsíkján az $\mathcal{L}\{f\}$ Laplace-transzformált létezik és reguláris;

(2) Az $\frac{1}{t}f(t)$ függvény Laplace-transzformálható;

(3) Az $\mathcal{L}\{\frac{1}{t}f(t)\}$ függvény a saját értelmezési tartományában mindenütt reguláris.

Továbbá, definíció szerint legyen

$$\int_p^\infty \mathcal{L}\{f;q\}dq := \lim_{Rez \to \infty} \int_p^z \mathcal{L}\{f;q\}dq,$$

ahol z a $\{p|\ Rep > c\}$ félsíkban fekvő, p-ből kiinduló görbén fut végig. Ekkor

$$\int_p^\infty \mathcal{L}\{f;q\}dq = \mathcal{L}\{\frac{1}{t}f(t);p\},$$

feltéve, hogy a bal oldalon álló improprius integrál létezik.

9.4. Hasonlósági és eltolási tételek

Tétel 9.4.1 *(Hasonlósági tétel) Ha az f függvénynek létezik a Laplace-transzformáltja, akkor tetszőleges k pozitív valós konstans esetén*

$$\mathcal{L}\{f(kt);p\} = \frac{1}{k}\mathcal{L}\left\{f(t);\frac{p}{k}\right\}.$$

Tétel 9.4.2 *(Az eredeti függvényre vonatkozó eltolási tétel) Ha az f függvénynek létezik a Laplace-transzformáltja, akkor tetszőleges k pozitív valós konstans esetén a*

$$g(t) := \begin{cases} f(t-k), & ha\ t > k, \\ 0, & ha\ 0 < t \le k \end{cases}$$

képlettel definiált függvénynek is van Laplace transzformáltja, mégpedig

$$\mathcal{L}\{g;p\} = e^{-kp}\mathcal{L}\{f;p\}.$$

Tétel 9.4.3 *(A Laplace-tarnszformáltra vonatkozó eltolási tétel) Tetszőleges valós k-ra*

$$\mathcal{L}\{e^{-kt}f(t);p\} = \mathcal{L}\{f(t);p+k\},$$

feltéve, hogy a képletben szereplő Laplace-transzformáltak léteznek.

9.5. Az inverz Laplace-transzformáció

Definíció 9.5.1 *A komplex F függvény inverz Laplace transzformáltjának nevezzük és $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$-fel jelöljük az olyan Laplace-transzformálható f függvényt, amelyre $\mathcal{L}\{f\} = F$ teljesül. Az $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$ függvény t helyen felvett értékét $\mathcal{L}^{-1}\{F; t\}$-vel jelöljük.*

Tétel 9.5.2 *Ha f Laplace-transzformálható függvény, mégpedig*

$$|f(t)| \leq Ke^{ct} \text{ (}K, c \text{ nemnegatív valós konstansok)}$$

a $(0, \infty)$ intervallum minden t elemére, $F(p)$ pedig az $f(t)$ Laplace-transzformáltja, akkor a $(0, \infty)$ intervallum minden olyan t pontjában, ahol f folytonos, a függvény értéke az

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{v \to \infty} \int_{u-vi}^{u+vi} e^{pt} F(p) dp$$

képlettel számítható ki, amelyben az u szám a c-nél nagyobb valós számok közül tetszőlegesen választható.

Az előző alfejezetekben szereplő képletek alapján adódnak a következő képletek:

(1) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{p^{n+1}}; t\} = \frac{t^n}{n!}$ $(n \in \mathbb{N})$,

(2) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(p-a)^{n+1}}; t\} = \frac{t^n e^{at}}{n!}$ $(n \in \mathbb{N})$,

(3) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{a}{p^2+a^2}; t\} = \sin at$,

(4) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{p}{p^2+a^2}; t\} = \cos at$,

(5) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{a}{p^2-a^2}; t\} = sh\ at$,

(6) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{p}{p^2-a^2}; t\} = ch\ at$.

Példa 9.5.3 *Határozzuk meg az*

$$F(p) = \frac{1}{p^3 + 7p^2 + 16p + 10}$$

függvény inverz Laplace-transzformáltját!

Megoldás. *Bontsuk elemi törtek összegére az $F(p)$ függvényt! Ehhez először bontsuk fel a nevezőben szereplő harmadfokú polinomot elsőfokú, illetve negatív diszkriminánsú másodfokú polinomok szorzatára. A racionális gyökteszt szerint a nevezőben levő polinom minden racionális gyöke egész szám, és ezek a konstans tag osztói lehetnek: $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$. A Horner-módszer segítségével könnyen ellenőrízhető, hogy $p = -1$ gyöke a nevezőben szereplő polinomnak, és $p^3+7p^2+16p+10 = (p+1)(p^2+6p+10)$. Mivel a $p^2+6p+10$ polinom diszkriminánsa -4, ezért a kívánt felbontást elvégeztük. Ismert tétel alapján, megadhatók olyan A, B és C konstansok, amelyekre*

$$\frac{1}{(p+1)(p^2+6p+10)} = \frac{A}{p+1} + \frac{Bp+C}{p^2+6p+10}.$$

Egyszerű számolással igazolható, hogy $A = \frac{1}{5}$, $B = -\frac{1}{5}$, $C = -1$. Így

$$\mathcal{L}^{-1}\{F;t\} = \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{p+1}\} - \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{p^2+6p+10}\}.$$

A fenti (2) képlet alapján

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{p+1}\} = e^{-t}.$$

Az $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{p^2+6p+10}\}$ tag meghatározásához alakítsuk teljes négyzetté a nevezőt

$$p^2 + 6p + 10 = (p+3)^2 + 1.$$

Mivel

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{p}{p^2+6p+10}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{p}{(p+3)^2+1}\} = e^{-3t}\cos t$$

és

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{p^2+6p+10}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(p+3)^2+1}\} = e^{-3t}\sin t,$$

ezért

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{p^3+7p^2+16p+10}\} = \frac{1}{5}e^{-t} - \frac{1}{5}e^{-3t}\cos t - e^{-3t}\sin t.$$

9.6. Lineáris differenciálegyenletek megoldása Laplace-transzformációval

Egy példán keresztül mutatjuk be, hogyan alkalmazható a Laplace-transzformáció konstans együtthatós lineáris differenciálegyenletek megoldására.

Példa 9.6.1 Laplace-transzformáció segítségével határozzuk meg az

$$y'' + 4y' + 4y = 2e^{-2x}$$

állandó együtthatós másodrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet

$$y(0) = 0 \quad \text{és} \quad y'(0) = 0$$

Taylor-típusú kezdeti feltételeknek eleget tevő megoldását!

Megoldás. Jelölje $Y(p)$ a $y(x)$ függvény Laplace-transzformáltját. Vegyük a differenciálegyenlet mindkét oldalának Laplace-transzformáltját:

$$\mathcal{L}\{y'' + 4y' + 4y; p\} = \mathcal{L}\{2e^{-2x}; p\}$$

$$\mathcal{L}\{y''; p\} + 4\mathcal{L}\{y'; p\} + 4\mathcal{L}\{y; p\} = 2\mathcal{L}\{e^{-2x}; p\},$$

$$p^2Y(p) + 4pY(p) + 4Y(p) = \frac{2}{p+2},$$

$$Y(p) = \frac{2}{(p+2)(p^2+4p+4)} = \frac{2}{(p+2)^3},$$

amelyből az inverz Laplace-transzformáció fejezetben szereplő (2) képlet, valamint a Laplace-transzformáltra vonatkozó eltolási tétel alapján

$$y(x) = x^2e^{-2x}.$$

10. fejezet

Valószínűségszámítás I

10.1. Kombinatorika

Definíció 10.1.1 *Az egymástól páronként különböző $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemek egy lehetséges sorrendjét az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemek egy ismétlés nélküli permutációjának nevezzük. Ha az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemek között egyenlők is vannak, akkor ismétléses permutációról beszálünk.*

Az $1, 2, 3$ elemek összes (ismétlés nélküli) permutációi az $1, 2, 3$, az $1, 3, 2$, a $2, 1, 3$, a $2, 3, 1$, a $3, 1, 2$, a $3, 2, 1$ sorozatok.

Az $1, 1, 2$ elemek összes (ismétléses) permutációi az $1, 1, 2$, az $1, 2, 1$, a $2, 1, 1$ sorozatok.

Tétel 10.1.2 *Adott, páronként különböző n elem összes ismétlés nélküli permutációinak száma $n!$.*

Tétel 10.1.3 *Ha az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemek között r különböző féle van, és ezek száma rendre $k_1, k_2, \ldots, k_r$, akkor az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemek összes ismétléses permutációinak száma $\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}$.*

Definíció 10.1.4 *Az egymástól páronként különböző $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemekből képezett olyan k-elemű sorozatokat, amelyekben az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemek mindegyike legfeljebb egyszer fordul elő, az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemek egy k-adosztályú ismétlés nélküli variációjának nevezzük.*

Tétel 10.1.5 *Adott, páronként különböző n elemből képezhető összes k-adosztályú ismétlés nélküli variációk száma $\frac{n!}{(n-k)!}$.*

Definíció 10.1.6 *Az egymástól páronként különböző $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemekből képezett olyan k-elemű sorozatokat, amelyekben az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemek mindegyike többször is előfordulhat, az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemek egy k-adosztályú ismétléses variációjának nevezzük.*

Tétel 10.1.7 *Adott, páronként különböző n elemből képezhető összes k-adosztályú ismétléses variációk száma n^k.*

Definíció 10.1.8 *Az egymástól páronként különböző $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemekből képezett k-elemű halmazokat az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemek egy k-adosztályú ismétlés nélküli kombinációjának nevezzük.*

Tétel 10.1.9 *Adott, páronként különböző n elemből képezhető összes k-adosztályú ismétlés nélküli kombinációk száma $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.*

Definíció 10.1.10 *Az egymástól páronként különböző $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemekből képezett k-elemű rendszereket (azaz k számú elem olyan öszességét, amelyek között egyenlők is lehetnek) az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemek egy k-adosztályú ismétléses kombinációjának nevezzük.*

Tétel 10.1.11 *Adott, páronként különböző n elemből képezhető összes k-adosztályú ismétléses kombinációk száma* $\binom{n+k-1}{k}$.

10.2. Eseménytér, valószínűségi algebra

Definíció 10.2.1 *Egy jelenség előidézését vagy megfigyelését kísérletnek nevezzük.*

Ilyen például egy szabályos számozott kocka feldobása, vagy egy közlekedési lámpánál adott időpillanatban várakozók számának megfigyelése.

Definíció 10.2.2 *Egy kísérlet lehetséges kimeneteleit elemi eseményeknek nevezzük.*

Például a szabályos számozott kockával való dobásnál az elemi események száma 6, attól függően, hogy a felül levő lapon az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok melyike fordul elő.

Definíció 10.2.3 *Egy kísérlettel kapcsolatos elemi események halmazát eseménytérnek nevezzük. Az eseményteret Ω-val jelöljük.*

Szabályos számozott kockával való dobásnál az eseménytér: $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_6\}$, ahol ω_i jelöli a kísérlet azon kimenetelét, hogy a dobás eredménye i.

Definíció 10.2.4 *Egy kísérlettel kapcsolatos eseménytér részhalmazait a kísérlettel kapcsolatos eseményeknek nevezzük. Egy eseményről akkor mondjuk, hogy bekövetkezik, ha az eseményt alkotó elemi események valamelyike bekövetkezik.*

Például, a kockadobásnál az $\{\omega_2, \omega_5\}$ esemény akkor következik be, ha a dobás eredménye 2 vagy 5. Az üres halmaznak megfelelő eseményt lehetetlen eseménynek, az Ω-nak megfelelő eseményt biztos eseménynek nevezzük.

Definíció 10.2.5 *Egy Ω eseménytér elemeiből álló A és B események öszegén az $A \cup B$ eseményt értjük, és $A + B$-vel jelöljük. Definíció szerint az $A + B$ esemény akkor és csak akkor következik be, ha az A és B események közül legalább az egyik bekövetkezik.*

Definíció 10.2.6 *Egy Ω eseménytér elemeiből álló A és B események szorzatán az $A \cap B$ eseményt értjük, és AB-vel jelöljük. Definíció szerint az AB esemény akkor és csak akkor következik be, ha A is és B is bekövetkezik. Ha $AB = \emptyset$, akkor azt mondjuk, hogy A és B egymást kizáró események.*

Definíció 10.2.7 *Egy Ω eseménytér elemeiből álló A és B események különbségén az $A \setminus B$ halmazkülönbséget értjük, és $A - B$-vel jelöljük. Definíció szerint az $A - B$ esemény akkor és csak akkor következik be, ha A bekövetkezik, de B nem.*

Definíció 10.2.8 *Egy Ω eseménytér eseményeiből álló A halmaz esetén az $\overline{A} = \Omega \setminus A$ eseményt az A esemény ellentett eseményének nevezzük. Definíció szerint az $\overline{A}$ esemény akkor és csak akkor következik be, ha az A esemény nem következik be.*

Definíció 10.2.9 *Egy nem üres S halmazt Boole-algebrának nevezünk, ha bármely (a, b) elempárjához hozzá van rendelve egy $a + b$ módon jelölt összeg és egy ab módon jelölt szorzat úgy, hogy az alábbiak teljesülnek az S tetszőleges a, b, c elemeire:*

(1) $a+(b+c) = (a+b)+c$ *és* $a(bc) = (ab)c$, *azaz mindkét művelet asszociatív;*

(2) $a + b = b + a$ *és* $ab = ba$, *azaz mindkét művelet kommutatív;*

(3) $a(a + c) = a$ *és* $a + ac = a$, *azaz érvényes az elnyelési tulajdonság;*

(4) $a(b + c) = ab + ac$ *és* $a + bc = (a + b)(a + c)$, *azaz mindkét művelet disztributív a másikra nézve;*

(5) *Van olyan* $0 \in S$ *elem (nullelem), hogy minden* $a \in S$ *elemre* $0+a=a$*;*

(6) *Van olyan* $1 \in S$ *elem (egységelem), hogy minden* $a \in S$ *elemere* $1a=a$*;*

(7) *Minden* $a \in S$ *elemhez van olyan* $\overline{a} \in S$ *elem, amelyre* $a+\overline{a}=1$ *és* $a\overline{a}=0$ *teljesül. Az* $\overline{a}$ *elemet az* a *elem komplementumának nevezzük.*

Jó példa Boole-algebrára egy H halmaz összes részhalmazainak halmaza (azaz a $P(H)$ módon is jelölt hatványhalmaza), ahol az összeadás a halmazok uniója, a szorzás pedig a halmazok metszete. A nullelem az üres halmaz, az egységelem a H halmaz, egy részhalmaz komplementuma pedig a H alaphalmazra vonatkozó komplementere. Mivel az események az Ω eseménytérnek a részhalmazai, azaz a $P(\Omega)$ hatványhalmaz elemei, ezért egy kísérlettel kapcsolatos összes lehetséges események halmaza az események előzőekben definiált összeadására és szorzására nézve Boole-algebrát alkotnak. Egy adott kísérlet esetén azonban előfordul, hogy nem tekintjük az összes lehetséges eseményt, hanem azok közül csak bizonyosakat. Viszont feltesszük, hogy a figyelembe vett események összessége feleljen meg bizonyos feltételnek ahhoz, hogy matematikailag tudjuk azokat vizsgálni. A következőkben ezeket a feltételeket tartalmazó definíciót ismertetjük.

Definíció 10.2.10 *Legyen* Ω *egy kísérlettel kapcsolatos eseménytér, azaz a kísérlet lehetséges kimeneteleinek (azaz az elemi eseményeknek) a halmaza. Az* Ω *részhalmazainak valamely öszességét eseményalgebrának nevezzük és* $E(\Omega)$ *módon jelöljük, ha teljesülnek rá az alábbi feltételek.*

(1) *A biztos esemény eleme* $E(\Omega)$*-nak (azaz* $\Omega \in E(\Omega)$*);*

(2) *Az* $E(\Omega)$*-hoz tartozó tetszőleges* A *esemény esetén annak* $\overline{A}$ *ellentett eseménye is* $E(\Omega)$*-hoz tartozik.*

(3) *Az* $E(\Omega)$ *tetszőleges* A_i $(i=1,\dots,n,\dots)$ *eseményei esetén azok* $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$ *összege is eleme* $E(\Omega)$*-nak;*

Az eseményalgebra és a Boole-algebra fogalmak kapcsolatára vonatkozik az alábbi tétel.

Tétel 10.2.11 *Minden eseményalgebra az események összeadására és szorzására nézve Boole-algebrát alkot.*

A valószínűségszámítás események vizsgálatával foglalkozik, melynek alapja amellett, hogy műveleteket értelmez események között, a tekintetbe vett eseményalgebra eseményeihez hozzárendel egy valós számot úgy, hogy bizonyos feltételek teljesüljenek. Ezeket a feltételeket tartalmazza a következő definíció.

Definíció 10.2.12 *Legyen $E(\Omega)$ egy kísérlettel kapcsolatos Ω eseménytéren értelmezett olyan eseményalgebra, amelyhez tartozó minden egyes A eseményhez hozzá van rendelve egy $P(A)$-val jelölt valós szám, az A esemény valószínűsége úgy, hogy az alábbiak teljesülnek*

(1) Az $E(\Omega)$-hoz tartozó A események mindegyikére $0 \leq P(A) \leq 1$ teljesül;

(2) $P(\Omega) = 1$, azaz a biztos esemény valószínűsége 1;

(3) Ha $A_1, A_2, \ldots$ egymást páronként kizáró $E(\Omega)$-beli események véges vagy végtelen sorozata, akkor $P(A_1 + A_2 + \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$.

Ebben az esetben azt mondjuk, hogy az $E(\Omega)$ eseményalgebra valószínűségi algebrát (másképpen, valószínűségi mezőt) alkot a fenti P függvényre nézve.

Tétel 10.2.13 *Egy $E(\Omega)$ valószínűségi algabra tetszőleges A és B eseményeire igazak az alábbiak:*

- *$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;*
- *$P(\emptyset) = 0$, azaz a lehetetlen esemény valószínűsége 0;*
- *$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.*

10.3. Klasszikus valószínűségi algebra

Definíció 10.3.1 *Egy $E(\Omega)$ valószínűségi algebrát klasszikus valószínűségi algebrának nevezzük, ha $E(\Omega)$ az Ω összes lehetséges részhalmazából, azaz az Ω eseménytér hatványhalmazából áll, az Ω eseményteret alkotó elemei események száma véges, és egyenlő valószínűségű (tehát egy elemi esemény valószínűsége $\frac{1}{|\Omega|}$).*

Jó példa klasszikus valószínűségi algebrára egy szabályos kockával való dobásnál előforduló összes lehetséges esemény valószínűségi algebrája, ahol a hat lehetséges kimenetel mindegyikének $\frac{1}{6}$ a valószínűsége.

Tétel 10.3.2 *Klasszikus valószínűségi algebra bármely eseményének valószínűsége megegyezik az eseményt alkotó elemi események számának (másképpen, a kedvező esetek számának) és az összes lehetséges elemi események számának (másképpen az összes esetek számának) hányadosával.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az Ω eseménytérhez tartozó elemi események száma n: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$. Legyen A egy olyan esemény, amelyet alkotó elemi események száma k: $A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k}\}$. Mivel az elemei események egymást páronként kizáró események, ezért

$$P(A) = P(\omega_{i_1} + \cdots \omega_{i_k}) = P(\omega_{i_1}) + \cdots P(\omega_{i_k}) = \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} = \frac{k}{n}.$$

Tehát az A esemény valószínűsége megegyezik az eseményt alkotó elemi események számának, k-nak és az összes lehetséges elemi események számának , n-nek a $\frac{k}{n}$ hányadosával. □

10.4. Geometriai valószínűségi algebra

Tétel 10.4.1 *Legyen $E(\Omega)$ az Ω ponthalmaz részhalmazainak olyan eseményalgebrája, amelyhez tartozó bármely H részhalmaznak van $\mu(H)$ mértéke (területe, illetve térfogata). Ha ezen az eseményalgebrán egy valós értékű P függvényt úgy értelmezünk, hogy tetszőleges $E(\Omega)$-beli H eseményre*

$$P(H) = \frac{\mu(H)}{\mu(\Omega)},$$

akkor $E(\Omega)$ erre a P függvényre nézve valószínűségi algebrát alkot.

Definíció 10.4.2 *Az előző tételben szereplő P függvényt geometriai valószínűségnek nevezzük, az $E(\Omega)$ valószínűségi algebráról pedig azt mondjuk, hogy geometriai valószínűségi algebra (vagy: geometriai valószínűségi mező).*

Példa 10.4.3 Egy egységsugarú körlapra véletlenszerűen lövést adunk le. Mi annak a valószínűsége, hogy a találatnak a kör középpontjától való távolsága kisebb mint $\frac{1}{2}$.

Megoldás. Jelölje H az egységsugarú körlap azon pontjainak halmazát, amelyek benne vannak a körlap középpontja körüli $\frac{1}{2}$ sugarú kör belsejében. Ennek a H halmaznak a területe $\frac{\pi}{4}$. A példában szereplő esemény akkor következik be, ha a találat H valamelyik pontjában éri a körlapot, így a keresett valószínűség $P(H) = \frac{\frac{\pi}{4}}{\pi} = \frac{1}{4}$. Megjegyezzük, hogy az egységsugarú körlapon belül bárhol is helyezkedik el egy $\frac{1}{2}$ sugarú körlap, $\frac{1}{4}$ lesz annak valószínűsége, hogy az egységsugarú körlapra véletlenszerűen leadott lövés a kijelölt $\frac{1}{2}$ sugarú körlapot találja el.

10.5. Feltételes valószínűség, események függetlensége

Definíció 10.5.1 *Egy valószínűségi algebrának legyen A tetszőleges, B pedig pozitív valószínűségű eseménye. A*

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

hányadost az A esemény B eseményre vonatkozó feltételes valószínűségének nevezzük.

A definícióból következik egyszerű átalakítással, hogy

$$P(AB) = P(A|B)P(B).$$

Ne felejtsük el, hogy feltételként szabtuk, hogy B pozitív valószínűségű esemény. Bizonyos feltételek mellett, hasonló képlet érvényes többtényezős szorzat valószínűségére. Erről szól a következő tétel.

Tétel 10.5.2 *Ha $A_1, A_2, \ldots, A_n$ egy valószínűségi algebra olyan eseményei, hogy az*

$$A_1,\ A_1A_2,\ A_1A_2A_3,\ \ldots,\ A_1A_2\cdots A_{n-1}$$

események pozitív valószínűségűek, akkor

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

Tekintsünk egy példát az előző tételben szerplő képlet alkalmazására.

Példa 10.5.3 Egy dobozban 3 piros, 5 fehér és 6 kék golyó van. Kihúzunk 3 golyót a dobozból egymás után, visszatevés nélkül. Mi annak a valószínűsége, hogy az első kihúzott golyó piros, a második fehér és a harmadik is piros.
Megoldás. Jelölje A_1 azt az eseményt, hogy az első húzás eredménye piros, jelölje A_2 azt az eseményt, hogy a második húzás eredménye fehér, jelölje A_3 azt az eseményt, hogy a harmadik húzás eredménye ismét piros. A feladat szövege szerint a $P(A_1A_2A_3)$ valószínűséget kell meghatározni. Az előző tételben szereplő képlet alapján

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2).$$

A feladatban megadott adatok szerint $P(A_1) = \frac{3}{14}$. A $P(A_2|A_1)$ valószínűség meghatározásánál figyelembe kell venni, hogy egy golyót már kivettünk a dobozból. Így összesen 13 golyó van a dobozban, és ezek között 5 fehér van. Így $P(A_2|A_1) = \frac{5}{13}$. A $P(A_3|A_1A_2)$ valószínűség meghatározásához figyelembe kell venni, hogy a dobozból már két golyó hiányzik, azaz már csak 12 golyó van a dobozban, és ezek között már csak 2 a piros golyók száma. Tehát $P(A_3|A_1A_2) = \frac{2}{12}$. Tehát a keresett valószínűség: $P(A_1A_2A_3) = \frac{3}{14}\frac{5}{13}\frac{2}{12} = \frac{30}{2184}$.

Definíció 10.5.4 *Egy eseménytér bizonyos eseményeinek összeségéről azt mondjuk, hogy teljes eseményrendszer, ha páronként kizárják egymást és összegük az eseménytér.*

A szabályos kockával történő dobás esetén jelölje A azt az eseményt, hogy a dobás eredménye páros, B pedig azt, hogy a dobás eredménye páratlan. Ekkor A és B teljes eseményrendszert alkotnak.

A teljes eseményrendszer fogalma a következő két tétel egyik feltételeként jelenik meg.

Tétel 10.5.5 *(A teljes valószínűség tétele) Ha egy valószínűségi algebrában a*

$$B_1, B_2, \dots, B_n$$

események teljes eseményrendszert alkotnak és mindegyiknek pozitív a valószínűsége, akkor a valószínűségi algebrához tartozó tetszőleges A esemény valószínűségére a

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$$

egyenlőség érvényes.

Bizonyítás. Mivel a $B_1, B_2, \dots, B_n$ események teljes eseményrendszert alkotnak, ezért

$$B_1 + B_2 + \cdots + B_n = \Omega,$$

ahol Ω a biztos eseményt jelöli. Mivel két esemény szorzata pontosan akkor következik be, ha mindkettő bekövetkezik, ezért az Ω biztos eseménynek tetszőleges A eseménnyel vett szorzata pontosan akkor következik be, ha az A esemény bekövetkezik. Tehát tetszőleges A eseményre:

$$A = A\Omega = A(B_1 + B_2 + \cdots + B_n) = AB_1 + AB_2 + \cdots + AB_n.$$

Mivel tetszőleges $i \neq j$ indexre a B_i és B_j események egymást kizáró események, azaz szorzatuk a lehetetlen esemény, ezért az $AB_iAB_j = AB_iB_j$ esemény is lehetetlen, és ezért a fenti összegben szereplő események egymást páronként kzáró események. Így összegük valószínűsége megegyezik a tagok valószínűségének összegével, azaz

$$P(A) = P(AB_1) + P(AB_2) + \cdots + P(AB_n).$$

Mivel $P(AB_i) = P(A|B_i)P(B_i)$, ezért kapjuk, hogy

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n),$$

azaz

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i).$$

Tekintsünk egy példát a teljes valószínűség tételének alkalmazására.

Példa 10.5.6 Egy üzemben három gépen állítanak elő alkatrészeket. Az első gépen gyártott alkatrészeknél a selejtarány 20%, a második gépen gyártott alkatrészeknél a selejtarány 30%, a harmadik gépen gyártott alkatrészeknél a selejtarány 10%. Az első gépen legyártott 100, a második gépen legyártott 200, a harmadik gépen legyártott 100 alkatrészt egy közös ládában helyezték el. Mi annak a valószínűsége, hogy a 400 alkatrészből egy véletlenszerűen kiválasztott alkatrész nem selejtes?

Megoldás. Jelölje B_i $(i = 1, 2, 3)$ azt az eseményt, hogy a kiválasztott alkatrészt az i-dik gépen gyártották le. Ezek az események egy teljes eseményrendszert alkotnak, és $P(B_1) = \frac{1}{4}$, $P(B_2) = \frac{1}{2}$, $P(B_3) = \frac{1}{4}$. Jelölje A azt az eseményt, hogy a kiválasztott alkatrész nem selejtes. A teljes valószínűség tétele szerint

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3).$$

A $P(A|B_1)$ azt a valószínűséget jelöli, hogy az első gépen gyártott egyik véletlenszerűen kiválasztott alkatrész nem selejtes. Mivel az első gépen $\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$ valószínűséggel választunk selejtest, ezért

$$P(A|B_1) = \frac{4}{5},$$

azaz $\frac{4}{5}$ annak a valószínűsége, hogy az első gépen gyártott alkatrészek közül véletlenszerűen választott alkatrész nem selejtes. Hasonló okok miatt adódik, hogy

$$P(A|B_2) = \frac{7}{10}, \quad P(A|B_3) = \frac{4}{5}.$$

Így

$$P(A) = \frac{4}{5}\frac{1}{4} + \frac{7}{10}\frac{1}{2} + \frac{4}{5}\frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Tétel 10.5.7 *(Bayes-tétel) Ha egy valószínűségi algebrában a*

$$B_1, B_2, \ldots, B_n$$

események teljes eseményrendszert alkotnak és mindegyiknek pozitív a valószínűsége, akkor a valószínűségi algebrához tartozó tetszőleges, de pozitív valószínűségű A esemény esetén

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}$$

érvényes minden $k = 1, 2, \dots, n$ indexre.

A Bayes-tétel alkalmazására is adunk egy példát.

Példa 10.5.8 Mint az előző példában, egy üzemben három gépen állítanak elő alkatrészeket. Az első gépen gyártott alkatrészeknél a selejtarány 20%, a második gépen gyártott alkatrészeknél a selejtarány 30%, a harmadik gépen gyártott alkatrészeknél a selejtarány 10%. Az első gépen legyártott 100, a második gépen legyártott 200, a harmadik gépen legyártott 100 alkatrészt egy közös ládában helyezték el. Mi annak a valószínűsége, hogy a 400 alkatrészből egy véletlenszerűen kiválasztott alkatrészt az első gépen gyártották, ha már megállapítottuk róla, hogy nem selejtes?
Megoldás. Az előző feladat jelöléseit használjuk. Keressük tehát a $P(B_1|A)$ valószínűséget. A Bayes-tétel szerint

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3)}.$$

Az előző feladat részeredményeit is használva,

$$P(A|B_1)P(B_1) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5},$$

és

$$P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3) = P(A) = \frac{3}{4}.$$

Így a keresett valószínűség

$$P(B_1|A) = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{15}.$$

Tétel 10.5.9 *Egy valószínűségi algebra pozitív valószínűségű A és B eseményeire az alábbi három feltétel egymással ekvivalens.*

- $P(A|B) = P(A)$;
- $P(B|A) = P(B)$;
- $P(AB) = P(A)P(B)$.

Definíció 10.5.10 *Egy valószínűségi algebra A és B eseményit egymástól függetlennek nevezzük, ha $P(AB) = P(A)P(B)$.*

Definíció 10.5.11 *Egy valószínűségi algebra tetszőleges számú eseményéről azt mondjuk, hogy páronként függetlenek, ha közülük bármelyik kettő egymástól független.*

Definíció 10.5.12 *Egy valószínűségi algebra tetszőleges számú eseményéről azt mondjuk, hogy teljesen függetlenek, ha bárhogy is választunk ki közülük véges sokat, azok szorzatának valószínűsége egyenlő a tényezők valószínűségének szorzatával.*

11. fejezet

Valószínűségszámítás II

11.1. Valószínűségi változók

Definíció 11.1.1 *A valós értékű ξ függvényt valószínűségi változónak nevezzük, ha értelmezési tartománya egy kísérletel kapcsolatos eseménytér, és minden x valós számra értelmezve van a $P(\xi < x)$ valószínűség.*

Két személy szabályos kockával való dobás során megállapodik, hogy az A játékos fizet a B játékosnak, ha a dobás eredménye páros, ellenkező esetben a B játékos fizet az A játékosnak. A fizetett összeg megegyezik a dobott szám 100-szorosával, kivéve amikor a dobott szám 6; ekkor az A játékos 300 Ft-t fizet a B játékosnak. Ez a megállapodás az A játékos szempontjából a következő ξ nyereményeket eredményezi:

$$\xi = \begin{cases} 100, & \text{ha a dobás eredménye 1,} \\ -200, & \text{ha a dobás eredménye 2,} \\ 300, & \text{ha a dobás eredménye 3,} \\ -400, & \text{ha a dobás eredménye 4,} \\ 500, & \text{ha a dobás eredménye 5,} \\ -300, & \text{ha a dobás eredménye 6.} \end{cases}$$

ξ egy valós értékű függvény, amely a kockadobással kapcsolatos eseménytéren van értelmezve. Világos, hogy adott x valós szám esetén

$$P(\xi < x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \leq -400, \\ \frac{1}{6}, & \text{ha} \quad -400 < x \leq -300, \\ \frac{2}{6}, & \text{ha} \quad -300 < x \leq -200, \\ \frac{3}{6}, & \text{ha} \quad -200 < x \leq 100, \\ \frac{4}{6}, & \text{ha} \quad 100 < x \leq 300, \\ \frac{5}{6}, & \text{ha} \quad 300 < x \leq 500, \\ 1, & \text{ha} \quad 500 < x, \end{cases}$$

és így a $P(\xi < x)$ valószínűség minden x valós szám esetén létezik. Tehát az A játékos nyereményét kifejező ξ függvény valószínűségi változó (az előző definíció alapján).

Definíció 11.1.2 *Az $F_\xi(x) = P(\xi < x)$ egyenlőséggel definiált egyváltozós valós függvényt a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényének nevezzük.*

Az A játékos nyereményét kifejező ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye tehát:

$$F_\xi(x) = P(\xi < x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \leq -400, \\ \frac{1}{6}, & \text{ha} \quad -400 < x \leq -300, \\ \frac{2}{6}, & \text{ha} \quad -300 < x \leq -200, \\ \frac{3}{6}, & \text{ha} \quad -200 < x \leq 100, \\ \frac{4}{6}, & \text{ha} \quad 100 < x \leq 300, \\ \frac{5}{6}, & \text{ha} \quad 300 < x \leq 500, \\ 1, & \text{ha} \quad 500 < x. \end{cases}$$

Tétel 11.1.3 *Tetszőleges ξ valószínűségi változó $F_\xi(x)$ eloszlásfüggvényére érvényesek az alábbiak:*

(a) $\lim_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0$ *és* $\lim_{x\to\infty} F_\xi(x) = 1$.

(b) *$F_\xi(x)$ monoton nő (és ezért minden pontban létezik a jobb oldali határértéke) és minden pontban balról folytonos.*

(c) *Tetszőleges $a < b$ valós szám esetén $P(a \le x < b) = F_\xi(b) - F_\xi a)$, és tetszőleges x_0 valós szám esetén $P(\xi = x_0) = \lim_{x \to x_0+0} F_\xi(x) - F_\xi(x_0)$.*

Definíció 11.1.4 *Egy ξ valószínűségi változót diszkrét valószínűségi változónak (vagy diszkrét eloszlásúnak) nevezünk, ha értékkészlete egy véges $[x_1, \dots, x_n]$ sorozat, vagy egy olyan végtelen $[x_1, x_2, \dots]$ sorozat, amelynek egyetlen pontja sem torlódási pontja ennek a sorozatnak.*

Egy ξ diszkrét valószínűségi változó összes lehetséges x_k értékéhez tartozó $P(\xi = x_k)$ valószínűségeket a ξ valószínűségi változó valószínűségeloszlásának nevezzük. Nyílvánvaló, hogy $\sum_k P(\xi = x_k) = 1$.

Definíció 11.1.5 *Egy ξ valószínűségi változót folytonos valószínűségi változónak (vagy folytonos eloszlásúnak) nevezünk, ha megadható egy olyan egyváltozós valós f_ξ függvény, amely mindenütt nemnegatív, bármely véges intervallumon legfeljebb véges sok pont kivételével folytonos, és amellyel a ξ eloszlásfüggvénye kifejezhető $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt$ formában. Ezt az f_ξ függvényt a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvényének nevezzük.*

Tétel 11.1.6 *Folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye minden pontban folytonos. Ha F_ξ, illetve f_ξ egy folytonos ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, illetve sűrűségfüggvénye, akkor az alábbiak teljesülnek.*

- $\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)dx = 1$.
- *Ha x_0-ban F_ξ differenciálható, akkor $F'_\xi(x_0) = f_\xi(x_0)$.*

11.2. Várható érték és szórás

Definíció 11.2.1 *Legyenek a ξ diszkrét valószínűségi változó lehetséges értékei az $[x_k]$ véges vagy végtelen sorozat elemei. Jelölje p_k a $P(\xi = x_k)$ valószínűséget. Az*

$$M(\xi) = \sum_k x_k p_x$$

összeget a ξ valószínűségi változó várható értékének nevezzük, feltéve, hogy a $\sum_k |x_k|p_k$ összeg létezik. Ha ez az összeg nem létezik, akkor a ξ valószínűségi változó várható értékét nem értelmezzük.

Definíció 11.2.2 *Legyen ξ folytonos valószínűségi változó f_ξ sűrűségfüggvénnyel. Az*

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)dx$$

integrált a ξ valószínűségi változó várható értékének nevezzük, feltéve, hogy ez az integrál létezik. Ha ez az integrál nem létezik, akkor a ξ valószínűségi változó várható értéket nem értelmezzük.

Tétel 11.2.3 *Ha a ξ valószínűségi változó várható értéke létezik, akkor a tetszőleges valós a és b konstansokkal képezett $a\xi + b$ valószínűségi változó várható értéke is létezik, és*

$$M(a\xi + b) = aM(\xi) + b.$$

Tétel 11.2.4 *(Markov egyenlőtlenség) Ha egy nemnegatív értékű ξ valószínűségi változónak van várható értéke, akkor tetszőleges pozitív r valós számra*

$$P(\xi \geq r) \leq \frac{M(\xi)}{r}$$

teljesül.

Definíció 11.2.5 *A ξ valószínűségi változó szórásának nevezzük a*

$$D(\xi) = \sqrt{M\left([\xi - M(\xi)]^2\right)}$$

értéket, feltéve, hogy a gyökjel alatti várható érték létezik, Ha ez nem létezik, akkor a ξ valószínűségi változó szórását nem értelmezzük.

Tétel 11.2.6 *Ha a ξ valószínűségi változó szórása létezik, akkor*

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi).$$

Tétel 11.2.7 *Ha a ξ valószínűségi változó szórása létezik, akkor a tetszőleges valós a és b konstansokkal képezett $a\xi + b$ valószínűségi változó szórása is létezik, és*

$$D(a\xi + b) = \mid a \mid D(\xi).$$

Bizonyítás. Az $a\xi + b$ szórásnégyzetét fejezzük ki. Mivel a 11.2.3 Tétel szerint $M(a\xi + b) = aM(\xi) + b$, ezért

$$D^2(a\xi+b) = M\left([(a\xi + b) - M(a\xi + b)]^2\right) = M\left([a\xi + b - aM(\xi) - b]^2\right) = M\left(a^2 [\xi - M(\xi)]^2\right) =$$

$$= a^2 M\left([\xi - M(\xi)]^2\right) = a^2 D^2(\xi).$$

Ennek alapján

$$D(a\xi + b) = \mid a \mid D(\xi).$$

□

Tétel 11.2.8 *(Csebisev-egyenlőtlenség) Ha a ξ valószínűségi változónak van szórása, akkor tetszőleges pozitív r valós számra*

$$P(|\xi - M(\xi)| \geq r) \leq \frac{D^2(\xi)}{r^2}.$$

Tétel 11.2.9 *(A nagy számok Bernoulli-féle tétele) Legyen A egy kísérlethez tartozó esemény. Jelölje p az A esemény valószínűségét, q_n pedig az A eseményre vonatkozó n számú kísérlethez tartozó gyakoriságot (azaz azt, hogy a kisérlet n-szeri elvégzése közben az A esemény hányszor következett be). Akkor bármely pozitív ϵ valós számra*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\mid \frac{q_n}{n} - p \mid > \epsilon\right) = 0.$$

12. fejezet

Valószínűségszámítás III

12.1. Diszkrét valószínűségi változók főbb típusai

Definíció 12.1.1 *Legyen n pozitív egész szám, p pedig a $0 < p < 1$ feltételnek eleget tevő valós szám. Egy ξ valószínűségi változót (n, p) paraméterű binomiális eloszlásúnak nevezünk, ha értékkészlete az $\{1, 2, \ldots, n\}$ számhalmaz, valószínűségeloszlása pedig*

$$P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \ k = 0, 1, \ldots, n.$$

Tétel 12.1.2 *Ha ξ egy (n, p) paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó, akkor*

$$M(\xi) = np \text{ és } D^2(\xi) = np(1-p).$$

Definíció 12.1.3 *Egy ξ valószínűségi változót (N, n, M) paraméterű hipergeometriai eloszlásúnak nevezünk, ha értékkészlete az $\{1, 2, \ldots, n\}$ számhalmaz (n pozitív egész szám), valószínűségeloszlása pedig*

$$P(\xi = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \ k = 0, 1, \ldots, n,$$

ahol N és M olyan pozitív egész számok, amelyekre $n \leq M$ és $n \leq N - M$ teljesülnek.

A $p = \frac{M}{N}$ jelöléssel az előző definícióban szereplő valószínűségeloszlás képlete a következőképpen is felírható:

$$P(\xi = k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \; k = 0, 1, \ldots, n.$$

Tétel 12.1.4 *Ha ξ egy (N, n, M) paraméterű hipergeometriai eloszlású valószínűségi változó, akkor a $p = \frac{M}{N}$ jelölést használva,*

$$M(\xi) = np, \; \text{és } D^2(\xi) = np(1-p)\frac{N-n}{N-1}.$$

Definíció 12.1.5 *Egy ξ valószínűségi változót λ ($\lambda > 0$) paraméterű Poisson-eloszlásúnak nevezünk, ha értékkészlete a nemnegatív egész számok halmaza, eloszlása pedig*

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \; k = 0, 1, \ldots$$

Tétel 12.1.6 *Ha ξ egy λ paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változó, akkor*

$$M(\xi) = \lambda, \; \text{és } D^2(\xi) = \lambda.$$

Tétel 12.1.7 *Legyenek n és k olyan rögzített egész számok, melyekre teljesül a $0 \leq k \leq n$ feltétel. Továbbá, legyen p olyan racionális szám, melyre $0 < p < 1$ teljesül. Fussa be N az összes olyan pozitív egész számok halmazát, amelyekkel Np is egész. Akkor*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

Az előző tétel alapján egy (N, n, M) paraméterű hipergeometriai eloszlású valószínűségi változó jól közelíthető egy (n, p) paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változóval, ha n a N-hez, k pedig a Np-hez képest igen kicsi.

Tétel 12.1.8 *Legyen k rögzített nemnegatív egész szám, és legyen $np = \lambda$ állandó. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Az előző tétel azt mutatja, hogy az (n, p) paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó jól közelíthető a $\lambda = np$ paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változóval, ha np igen kicsi az n-hez képest. A Poisson eloszlást jól közelítő valószínűségi változók között a legtipikusabbak: adott idő alatt egy kiszolgáló egységhez érkező ügyfelek száma (ha az ügyfelek egymástól függetlenül érkeznek), vagy pontszerű hibák száma valamely anyagban.

12.2. Folytonos valószínűségi változók főbb típusai

Definíció 12.2.1 *Egy ξ folytonos valószínűségi változót az (a, b) intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változónak nevezünk, ha sűrűségfüggvénye*

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } x \in (a,b); \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Tétel 12.2.2 *Ha ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó az (a, b) intervallumon, akkor*

$$M(\xi) = \frac{a+b}{2}, \quad D(\xi) = \frac{(b-a)}{\sqrt{12}}.$$

Definíció 12.2.3 *Egy ξ folytonos valószínűségi változót (m, σ) paraméterű normális eloszlásúnak nevezünk, ha sűrűségfüggvénye*

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

ahol $\sigma > 0$. Az ilyen eloszlást $N(m, \sigma)$-val jelöljük. Az $N(0, 1)$ eloszlású valószínűségi változót standard normális eloszlásúnak nevezzük; ennek ($\varphi(x)$-szel jelölt) sűrűségfüggvényére

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Tétel 12.2.4 *Ha a ξ valószínűségi változó $N(m,\sigma)$ eloszlású, akkor*

$$M(\xi) = m, \quad D(\xi) = \sigma.$$

Ha F_ξ jelöli egy $N(m,\sigma)$ eloszlású ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét, $\Phi(x)$ pedig a standard normális eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvényét, akkor

$$F_\xi = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right), \quad \text{és} \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

Normális eloszlást jól közelítő valószínűségi változók közül a legtipikusabbak: automaták által adagolt, darabolt, megunkált anyag súlya, hossza, egyéb méretei, ahol a várható érték az lesz, amelyre az automatát beállították, a szórás pedig attól függ, hogy milyen pontos az automata; olyan alkatrészek élettartama is normális eloszlást követ, amelyek rendszeres kopással mennek tönkre. Egy autószerelő műhelyben olajcserére fordított idő normális eloszlással közelíthető.

A Stirling formula ($n! \approx n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi}$) segítségével bizonyítható, hogy elég nagy n esetén

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)}}.$$

Ennek alapján egy (n,p) paraméterű binomiális eloszlású ξ valószínűségi változó esetén a $P(\xi = k)$ valószínűség akkor közelíthető jól egy $m = np$ és $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ paraméterű normális eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvényének helyettesítési értékével, ha n elég nagy és ξ eloszlása a várható értékhez viszonyítva ”meglehetősen szimmetrikus”.

Definíció 12.2.5 *Egy ξ folytonos valószínűségi változót λ paraméterű exponenciális eloszlásúnak nevezünk, ha sűrűségfüggvénye*

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } 0 < x, \end{cases}$$

ahol $\lambda > 0$.

Tétel 12.2.6 *Ha ξ egy λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó, akkor*

$$M(\xi) = \frac{1}{\lambda}, \quad D(\xi) = \frac{1}{\lambda}.$$

Bizonyítás.

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} x\lambda e^{-\lambda x}dx.$$

Alkalmazzuk a parciális integrálás módszerét. Azt kapjuk, hogy

$$\int_0^b x\lambda e^{-\lambda x}dx = \left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^b + \int_0^b e^{-\lambda x} =$$

$$= \left[-e^{-\lambda x}\left(x+\frac{1}{\lambda}\right)\right]_0^b = \frac{1}{\lambda} - e^{-\lambda b}\left(b+\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda} - \frac{b+\frac{1}{\lambda}}{e^{\lambda b}}.$$

A L'Hospital szabály szerint

$$\lim_{b\to\infty}\frac{b+\frac{1}{\lambda}}{e^{\lambda b}} = 0,$$

ezért

$$M(\xi) = \lim_{b\to\infty}\int_0^b x\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda} - \lim_{b\to\infty}\frac{b+\frac{1}{\lambda}}{e^{\lambda b}} = \frac{1}{\lambda}.$$

Hasonlóan igazolható, hogy $M(\xi^2) = \frac{2}{\lambda^2}$. Így

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2},$$

azaz

$$D(\xi) = \frac{1}{\lambda}.$$

□

Exponenciális eloszlást jól közelítő valószínűségi változók közül a legtipikusabbak: hirtelen töréssel tönkremenő alkatrészek élettartama, vagy egy kiszolgáló egységhez egymástól függetlenül érkező ügyfelek érkezése közötti idő.

Definíció 12.2.7 *Egy ξ folytonos valószínűségi változót (c, α) paraméterű Weibull-eloszlásúnak nevezünk, ha eloszlásfüggvénye*

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0 \\ 1 - e^{-cx^\alpha}, & \text{ha } 0 < x, \end{cases}$$

ahol $c > 0$ és $\alpha > 0$.

Tétel 12.2.8 *Ha ξ egy (c, α) paraméterű Weibull-eloszlású valószínűségi változó, akkor*

$$M(\xi) = \left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right),$$

$$D^2(\xi) = \left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{2}{\alpha}} \left(\Gamma\left(\frac{2}{\alpha} + 1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)\right).$$

A Weibull-eloszlást jól közelítő valószínűségi változók egyik típusa olyan alkatrészek élettartama, amelyek hirtelen töréssel mennek tönkre, de kopnak is. Bizonyos munkák elvégzésére fordított idő is jól közelíthető Weibull-eloszlással, ha a munka olyan, hogy közben adódhatnak újabb és újabb nehézségek. Például egy autószerelő műhelyben egy ismeretlen eredetű gyújtáskimaradás bevizsgálására és javítására fordított idő Weibull-eloszlással közelíthető.