TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK

Matematika A2a

Nagy Attila

NAGY ATTILA

Egyetemi jegyzet

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Algebra és Geometria Tanszék

2025

Nagy Attila

Ez a jegyzet a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
mérnökhallgatói számára meghirdetett
Matematika A2a című tantárgy
általam tartott előadásainak többváltozós függvényekkel
kapcsolatos anyagát tartalmazza.

Nagy Károly

Nagy Attila

Tartalomjegyzék

1. TÖBBVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK I. 5

1.1. Függvényhatárérték és folytonosság 7

2. TÖBBVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK II. 13

2.1. Az n-változós valós függvények parciális differenciálhatósága . 14

2.2. Az n-változós valós függvények differenciálhatósága 19

2.3. Az iránymenti differenciálhányados 23

3. TÖBBVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK III. 27

3.1. A Lagrange-féle középértéktétel 28

3.2. A teljes differenciál 30

3.3. Szélsőértékek 31

3.4. Feltételes szélsőérték-számítás 37

4. TÖBBVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK IV. 39

4.1. A kettős és a hármas integrál fogalma 39

4.2. A kettős és a hármas integrál tulajdonságai 42

5. TÖBBVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK V. 45

5.1. A kettős integrál kiszámítása 45

5.1.1. Kettős integrál téglalap alakú tartományon 45

5.1.2. Kettős integrál x-re nézve normál tartományon 46

5.1.3. Kettős integrál y-ra nézve normál tartományon 47

5.2. A hármas integrál kiszámítása 49

5.2.1. Hármas integrál téglatest alakú tartományon 49

5.2.2. Hármas integrál normál tartományon 50

Nagy Attila

6. TÖBBVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK VI **55**
6.1. A kettős integrál transzformációja 55
6.1.1. Transzformálás síkbeli polárkoordináta-rendszerre . . . 56
6.2. A hármas integrál transzformációja 59
6.2.1. Transzformálás hengerkoordináta-rendszerre 59
6.2.2. Transzformálás térbeli polárkoordináta-rendszerre . . . 61

Nagy Attila

1. fejezet

TÖBBVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK I.

Nagy Attila

Definíció 1.0.1 *Egy $M \neq \emptyset$ halmaz esetén az M^2 halmaznak a valós számok halmazába való egyértelmű d leképezését az M halmazon értelmezett távolságfüggvénynek nevezzük, ha M tetszőleges A, B, C elemeire teljesülnek az alábbiak:*

(1) $d(A, B) \geq 0$;

(2) $d(A, B) = 0$ *akkor és csak akkor, ha* $A = B$;

(3) $d(A, B) = d(B, A)$;

(4) $d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C)$.

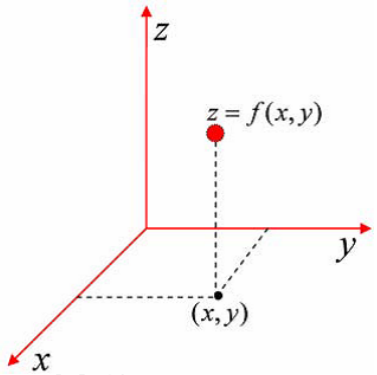
Ha egy $M \neq \emptyset$ halmazon értelmezve van egy d távolságfüggvény, akkor azt mondjuk hogy M egy metrikus tér (a d távolságfüggvényre nézve).

Megjegyezzük, hogy a valós szám-n-esek $\mathbb{R}^n$ halmaza metrikus tér a következő d távolságfüggvényre nézve: tetszőleges $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ és $B = [b_1, b_2, \ldots, b_n]$ szám-n-esek esetén

$$d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2}.$$

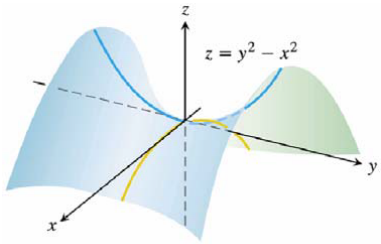
Definíció 1.0.2 *n-változós valós függvényen olyan függvényt értünk, melynek értelmezési tartománya valós szám-n-esekből, értékkészlete pedig valós számokból áll. Ha $n = 1$, akkor egyváltozós valós függvényről, ha $n > 1$, akkor többváltozós valós függvényről beszélünk.*

Egy kétváltozós valós $f(x, y)$ függvény esetén ábrázolhatjuk egy derékszögű koordináta-rendszerben azon $(x, y, f(x, y))$ pontok összességét, amelyeknél az (x, y) pont benne van az f függvény értelmezési tartományában (lásd az alábbi ábrát).



1.1. ábra. Grafikon szerkesztése

Az $(x, y, f(x, y))$ pontok által alkotott felületet az f függvény grafikonjának nevezzük. A következő ábra az $f(x, y) = y^2 - x^2$ függvény grafikonjának egy részét mutatja.



1.2. ábra. Az f(x,y)=$y^2 - x^2$ grafikonja

Definíció 1.0.3 *Az m-változós valós $f(u_1, \dots, u_m)$ külső függvényből és az n-változós valós $u_i(x_1, \dots, x_n)$ $(i = 1, \dots m)$ belső függvényekből összetett fügvényen azt az n-változós valós, $f \circ (u_1, \dots, u_m)$ módon jelölt függvényt értjük, melynek értelmezési tartománya azokból (és csak azokból) a*

$$P_0 = (x_{10} \dots, x_{n0})$$

pontokból áll, amelyekben az $u_1, \dots, u_m$ függvények mindegyike értelmezve van és az

$$U_0 = (u_1(P_0), \dots, u_m(P_0))$$

pont benne van az f függvény értelmezési tartományában, valamint ez a függvény az értelmezési tartományának tetszőleges $P_0 = (x_{10} \dots, x_{n0})$ pontjához az

$$f(U_0) = f(u_1(P_0), \dots, u_m(P_0))$$

értéket rendeli.

Nagy Attila

1.1. Függvényhatárérték és folytonosság

Definíció 1.1.1 *Az $\mathbb{R}^n$ metrikus tér P_0 pontjáról akkor mondjuk, hogy az n-változós valós f függvény D_f értelmezési tartományának torlódási pontja, ha megadható D_f-nek olyan, P_0-hoz konvergáló P_n pontsorozata, amely sorozatnak egyetlen P_n pontja sem egyezik meg a P_0 ponttal, azaz $P_n \neq P_0$ teljesül minden n indexre.*

Példaként említjük, hogy egy számegyenesen (az $\mathbb{R}$ metrikus téren) az (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$ intervallumok mindegyikének torlódási pontjai az $[a, b]$ intervallum pontjai.

Definíció 1.1.2 *(A függvényhatárérték Heine-féle definíciója) Akkor mondjuk, hogy egy n-változós valós f függvény D_f értelmezési tartományának P_0 torlódási pontjában van határértéke, és ez a határérték L, ha minden, a P_0-hoz konvergáló $P_n \in D_f$ pontsorozat esetén az $f(P_n)$ függvényértékek sorozata L-hez konvergál; képletben:*

$$(\forall P_n \in D_f): \quad \lim_{n\to\infty} P_n = P_0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(P_n) = L.$$

Ha egy n-változós valós f függvény P_0-pontbeli határértéke L, akkor ezt a következőképpen jelöljük:

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = L.$$

Kétváltozós valós f függvény esetén (ha x és y jelölik a független változókat és $P_0 = (x_0, y_0)$) a következő jelölést is használjuk:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = L.$$

Háromváltozós valós függvény esetén ez így alakul (ha x, y és z jelölik a független változókat és $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$):

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0 \\ z \to z_0}} f(x, y, z) = L.$$

Nagy Attila

Példa 1.1.3 Mutassuk meg, hogy az

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

függvénynek a $P_0 = (0, 0)$ pontban nincs határértéke!
Megoldás: A vizsgált f függvény csak a $P_0(0, 0)$ pontban nincs értelmezve. Így P_0 az f függvény értelmezési tartományának torlódási pontja. Ha azt akarjuk megmutatni, hogy f-nek nincs határértéke P_0-ban, akkor találnunk kell olyan xy-síkbeli, P_0-hoz konvergáló P_n pontsorozatot, melynek elemei különböznek P_0-tól, és az $f(P_n)$ sorozat nem konvergens, vagy találnunk kell két olyan xy-síkbeli, P_0-hoz konvergáló pontsorozatot, melynek elemei különböznek P_0-tól, és az egyes pontsorozatokhoz tartozó függvényértékekből álló sorozatok konvergensek, de határértékeik különböznek egymástól.

Legyen P_n olyan P_0-hoz konvergáló pontsorozat, melynek elemei az x-tengelyen helyezkednek el, azaz $P_n = (x_n, 0)$, ahol $x_n \to 0$ miközben n a ∞-hez tart. Ekkor

$$\lim_{n \to \infty} f(P_n) = 0.$$

Ez még nem jelenti azt, hogy az f függvénynek 0 lenne a határértéke P_0-ban. Az y-tengelyen lévő, P_0-hoz konvergáló tetszőleges P_n pontsorozatra is

$\lim_{n\to\infty} f(P_n) = 0$ adódik. További vizsgálatra van szükség. Tekintsünk most egy P_0-hoz konvergáló olyan P_n pontsorozatot, amelynek elemei az $y = mx$ $(m \neq 0)$ egyenesen helyezkednek el. Ekkor $P_n(x_n, mx_n)$ alakú, és ezért

$$\lim_{n\to\infty} f(P_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{mx_n^3}{x_n^4 + m^2x_n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{mx_n}{x_n^2 + m^2} = 0.$$

Az eddigi eredmények alapján már arra gondolhatnánk, hogy a vizsgált függvénynek még is csak van határértéke P_0-ban, és ez a határérték 0. Legyen viszont P_n olyan P_0-hoz konvergáló pontsorozat, ahol a P_n pontok az $y = x^2$ egyenletű parabolán helyezkednek el. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} f(P_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^4}{x_n^4 + x_n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

amely már bizonyítja (az előző eredményeket is használva), hogy a vizsgált f függvénynek a $P_0 = (0, 0)$ pontban nincs határértéke.

Megjegyzés 1.1.4 Egy többváltozós valós f függvény esetén vizsgálhatjuk azt is, hogy létezik-e a végtelemben vett határérték. Például vizsgálhatjuk a kétváltozós valós $f(x, y)$ függvény esetén, hogy létezik-e a

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} f(x, y)$$

határérték. Ekkor azt vizsgáljuk, hogy van-e olyan L valós szám, hogy bármely olyan $P_n = (x_n, y_n)$ pontsorozat esetén, amelyeknél $x_n \to \infty$ és $y_n \to \infty$ teljesül, az $f(x_n, y_n)$ függvényértékek sorozata L-hez tart.

Példa 1.1.5 Mutassuk meg, hogy létezik a

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{x + y}{x^2 - xy + y^2}$$

határérték!
Megoldás: Legyen $P_n(x_n, y_n)$ olyan tetszőleges pontsorozat, ahol $x_n \to \infty$ és $y_n \to \infty$, miközben n tart a végtelenhez. Ekkor feltehettő, hogy $x_n > 0$ és $y_n > 0$. Azt kell megmutatni, hogy létezik a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n + y_n}{x_n^2 - x_ny_n + y_n^2}$$

határérték. Osszuk el a számlálót és a nevezőt is az $x_n y_n$ szorzattal. Akkor

$$\frac{x_n + y_n}{x_n^2 - x_n y_n + y_n^2} = \frac{\frac{1}{y_n} + \frac{1}{x_n}}{\frac{x_n}{y_n} - 1 + \frac{y_n}{x_n}}.$$

Elegendő tehát a jobb oldalon álló sorozat határértékét vizsgálni. A számtani közép és mértani közép közötti kapcsolatot is használva,

$$\frac{x_n}{y_n} + \frac{y_n}{x_n} \geq 2\sqrt{\frac{x_n}{y_n}\frac{y_n}{x_n}} = 2.$$

Így

$$\frac{x_n}{y_n} - 1 + \frac{y_n}{x_n} \geq 1,$$

és ezért

$$\frac{1}{\frac{x_n}{y_n} - 1 + \frac{y_n}{x_n}} \leq 1.$$

Ebből már az is következik, hogy

$$\frac{\frac{1}{y_n} + \frac{1}{x_n}}{\frac{x_n}{y_n} - 1 + \frac{y_n}{x_n}} \leq \frac{1}{y_n} + \frac{1}{x_n}.$$

Mivel

$$0 \leq \frac{\frac{1}{y_n} + \frac{1}{x_n}}{\frac{x_n}{y_n} - 1 + \frac{y_n}{x_n}} \leq \frac{1}{y_n} + \frac{1}{x_n}$$

és

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{y_n} + \frac{1}{x_n}\right) = 0,$$

ezért

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{y_n} + \frac{1}{x_n}}{\frac{x_n}{y_n} - 1 + \frac{y_n}{x_n}} = 0$$

Tehát

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{x + y}{x^2 - xy + y^2} = 0.$$

Az egyváltozós valós függvények esetéhez hasonlóan, a többváltozós valós függvényekre is megfogalmazható a függvényhatárérték egy másik definíciója.

Definíció 1.1.6 *(A függvényhatárérték Cauchy-féle definíciója) Akkor mondjuk, hogy egy n-változós valós f függvény D_f értelmezési tartományának P_0 torlódási pontjában van határértéke, és ez a határérték L, ha bármely pozitív ϵ valós számhoz megadható olyan pozitív δ valós szám, hogy az f értelmezési tartományának minden P pontjára a $d(P, P_0) < \delta$ feltételből $|f(P) - L| < \epsilon$ következik.*

Tétel 1.1.7 *A függvényhatárérték Heine-féle és Cauchy-féle definíciói egymással ekvivalensek.*

Ezek után megfogalmazzuk az n-változós valós függvények folytonosságának definícióját.

Nagy Attila

Definíció 1.1.8 *Akkor mondjuk, hogy egy n-változós valós f függvény folytonos az $\mathbb{R}^n$ tér valamely P_0 pontjában, ha teljesülnek az alábbiak:*

(1) Az f függvény P_0-ban értelmezve van;

(2) Az f függvénynek P_0-ban van határértéke;

(3) Az f függvény P_0-pontbeli határértéke megegyezik a P_0-pontbeli helyettesítési értékkel, azaz $\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$.

Példa 1.1.9 *Mutassuk meg, hogy az*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & ha\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ha\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvény folytonos a $P_0 = (0,0)$ pontban.
Megoldás: A vizsgált függvény a $P_0 = (0,0)$ pontban értelmezve van, ott a helyettesítési értéke 0. Ahhoz, hogy megmutassuk azt, hogy f folytonos P_0-ban, már csak azt kell megmutatnunk, hogy f-nek a P_0-ban van határértéke, és ez a határérték 0. Mivel

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2} = \infty,$$

ezért

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1}{\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}} = 0$$

(itt az x^2y^2 szorzattal osztottuk a számlálót és a nevezőt is). Tehát a vizsgált függvény folytonos a $P_0 = (0,0)$ pontban.

Tétel 1.1.10 *Ha az n-változós valós $u_1, \dots, u_m$ függvények folytonosak egy P_0 pontban és az m-változós valós f függvény folytonos az*

$$U_0 = (u_1(P_0), \dots, u_m(P_0))$$

pontban, akkor az $f \circ (u_1, \dots, u_m)$ összetett függvény is folytonos a P_0 pontban.

Nagy Attila

2. fejezet

TÖBBVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK II.

Az egyváltozós valós függvények vizsgálatában fontos szerep jutott a differenciálhatóság fogalmának, melynek két, egymással ekvivalens definíciója ismeretes.

Egyik szerint, akkor mondjuk, hogy az egyváltozós valós $f(x)$ függvény differenciálható értelmezési tartományának valamely x_0 pontjában, ha létezik a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

határérték, amely határértéket az f függvény x_0 pontbeli differenciálhányadosának nevezzük és $f'(x_0)$ módon jelöljük.

A másik szerint, akkor mondjuk, hogy az egyváltozós valós $f(x)$ függvény differenciálható értelmezési tartományának valamely x_0 pontjában, ha megadható egy olyan d valós szám és x_0-nak egy olyan E teljes környezete, hogy minden E-beli x pont esetén teljesül az

$$f(x) - f(x_0) = d(x - x_0) + \epsilon(x)(x - x_0)$$

egyenlőség, ahol $\epsilon(x)$ olyan egyváltozós valós függvény, amely teljesíti a

$$\lim_{x \to x_0} \epsilon(x) = 0$$

feltételt.

A következő fejezetekben azzal foglalkozunk, hogy az egyváltozós valós függvények differenciálhatóságának fogalmát hogyan tudjuk kiterjeszteni n-változós valós függvényekre.

2.1. Az n-változós valós függvények parciális differenciálhatósága

Definíció 2.1.1 *Akkor mondjuk, hogy egy n-változós valós*

$$f(x_1, \dots x_i, \dots x_n)$$

függvény értelmezési tartományának

$$P_0 = (x_{10}, \dots, x_{i0}, \dots, x_{n0})$$

pontjában parciálisan differenciálható az i-dik változója, azaz az x_i változó szerint, ha az f függvényből az $x_j = x_{j0}$ $(j \neq i)$ behelyettesítéssel keletkezett, csak az x_i változótól függő, egyváltozós valós függvény differenciálható az x_{i0} pontban. Ennek a függvénynek az x_{i0} pontbeli differenciálhányadosát azaz a

$$\lim_{x_i \to x_{i0}} \frac{f(x_{10}, \dots, x_{i-1,0}, x_i, x_{i+1,0} \dots, x_{n0}) - f(x_{10}, \dots, x_{i-1,0}, x_{i0}, x_{i+1,0}, \dots, x_{n0})}{x_i - x_{i0}}$$

határértéket az n-változós valós f függvény P_0 pontbeli, x_i szerinti parciális differenciálhányadosának nevezzük és $f'_{x_i}(P_0)$ módon jelöljük.

Egyváltozós valós $f(x)$ függvény esetén a függvény (egyetlen) változója szerinti, valamely $x_0 \in D_f$ pontbeli parciális differenciálhányadosa megegyezik az x_0 pontbeli közönséges értelemben vett differenciálhányadosával. Ekkor az $f'_x(x_0)$ kifejezés helyett a szokásos $f'(x_0)$ jelölést használjuk.

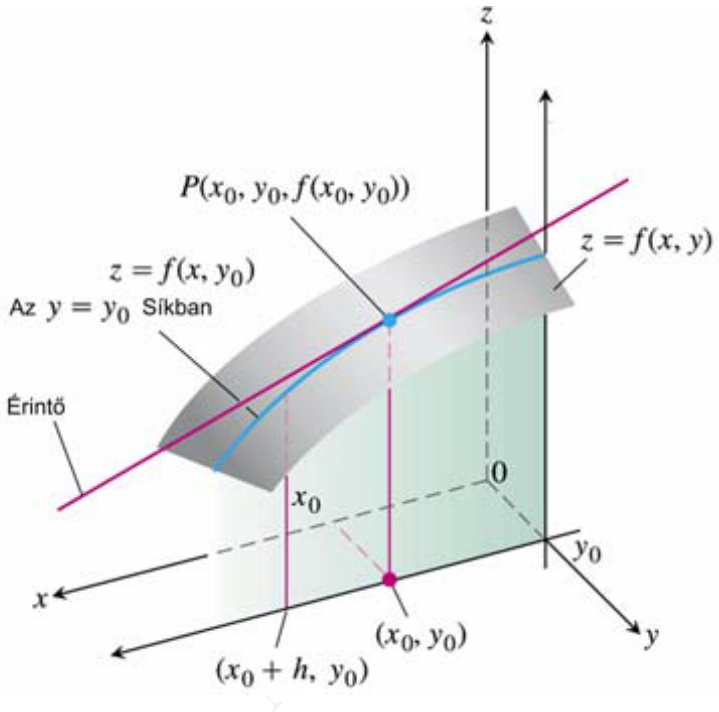
A következőkben megfogalmazzuk a parciális deifferenciálhatóságnak a kétváltozós, illetve háromváltozós valós függvényekre vonatkozó változatát.

Definíció 2.1.2 *Akkor mondjuk, hogy egy kétváltozós valós $f(x, y)$ függvény az x változója szerint parciálisan differenciálható értelmezési tartományának valamely $P_0 = (x_0, y_0)$ pontjában, ha létezik a*

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

határérték. Ezt a határértéket az f függvény P_0 pontbeli, x változó szerinti parciális differenciálhányadosának nevezzük.

Az $f(x,y)$ függvény (x_0,y_0) pontbeli x változó szerinti parciális differenciálhányadosának geometriai jelentése: a $z=f(x,y)$ egyenletű felület és az $y=y_0$ egyenletű sík metszésvonalaként keletkezett térgörbe $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ pontbeli érintőjének iránytangense (lásd a fenti ábrát).



2.1. ábra. Az x szerinti parciális differenciálhányados geometriai jelentése

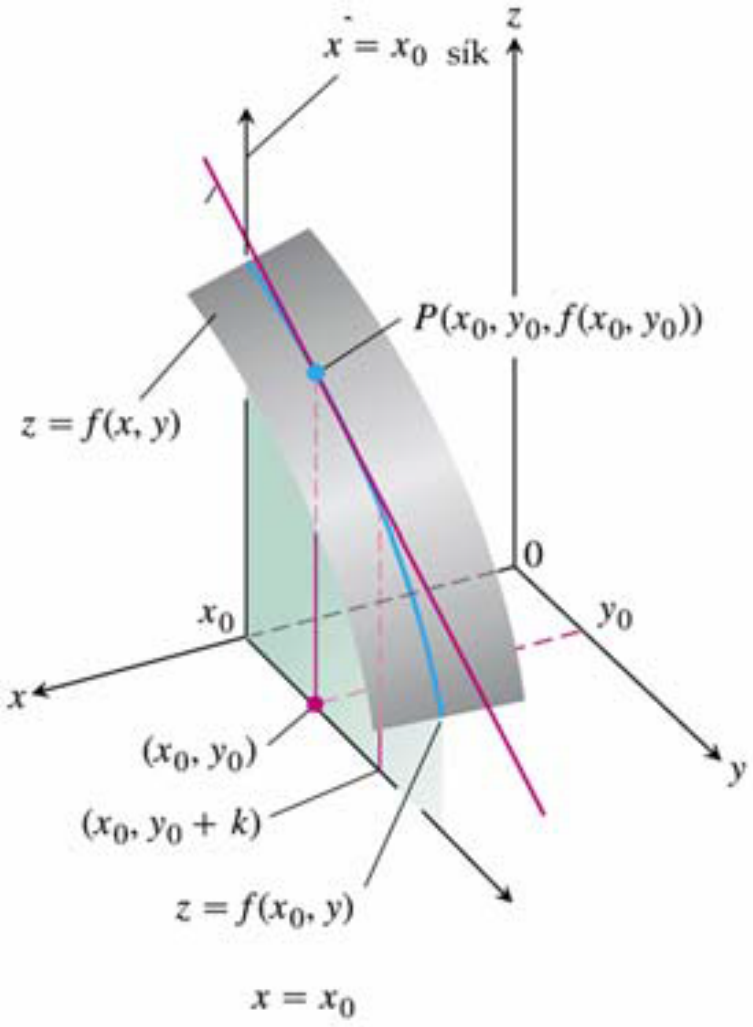
Definíció 2.1.3 *Akkor mondjuk, hogy egy kétváltozós valós $f(x,y)$ függvény az y változója szerint parciálisan differenciálható értelmezési tartományának valamely $P_0=(x_0,y_0)$ pontjában, ha létezik a*

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$$

határérték. Ezt a határértéket az f függvény P_0 pontbeli, y változó szerinti parciális differenciálhányadosának nevezzük.

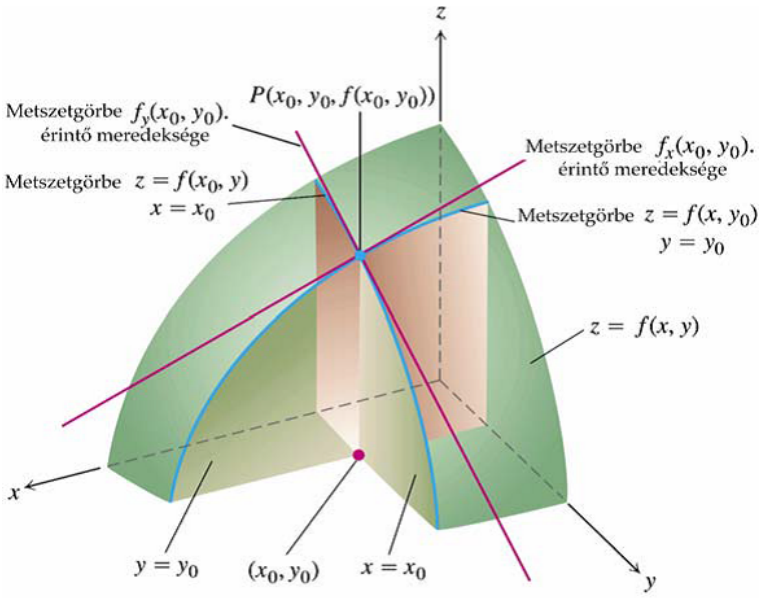
Az $f(x,y)$ függvény (x_0,y_0) pontbeli y változó szerinti parciális differenciálhányadosának geometriai jelentése: a $z=f(x,y)$ egyenletű felület és az

$x = x_0$ egyenletű sík metszésvonalaként keletkezett térgörbe $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pontbeli érintőjének iránytangense (lásd az alábbi ábrát).



2.2. ábra. Az y szerinti parciális differenciálhányados geometriai jelentése

A következő ábra együtt szemlélteti a kétváltozós való $f(x, y)$ függvény $P_0(x_0, y_0)$ pontbeli x-szerinti és y-szerinti pariális differenciálhányadosainak geometriai jelentését.



2.3. ábra. Az x-, és y-szerinti parciális differenciálhányadosok geometriai jelentése

Hasonlóan értelmezhető a háromváltozós valós $f(x, y, z)$ függvények változói szerinti parciális differenciálhányadosok a függvény értelmezési tartományának tetszőleges $P_0 = (x_0, x_0, z_0)$ pontjában:

$$f'_x(x_0, y_0, z_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{x - x_0},$$

$$f'_y(x_0, y_0, z_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{y - y_0},$$

$$f'_z(x_0, y_0, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(x_0, y_0, z) - f(x_0, y_0, z_0)}{z - z_0}.$$

Definíció 2.1.4 *Egy n-változós valós $f(x_1, \ldots, x_n)$ függvény x_i változó szerinti parciális deriváltfüggvényén azt az n-változós valós f'_{x_i} függvényt értjük, amely azokban a $P_0 \in D_f$ pontokban van értelmezve, amely pontokban létezik az f függvény x_i szerinti parciális differenciálhányadosa, és minden ilyen P_0 ponthoz függvényértékként az $f'_{x_i}(P_0)$ parciális differenciálhányadost rendeli.*

Megjegyzés 2.1.5 *Mivel a parciális deriváltfüggvény speciális egyváltozós függvény közönséges értelemben vett deriváltfüggvénye, ezért a parciális deriválás szabályai megegyeznek az egyváltozós valós függvényeknél tanult deriválási szabályokkal. Adott n-változós valós f és g függvények tetszőleges x_i változója esetén*

$$(f \pm g)'_{x_i} = f'_{x_i} \pm g'_{x_i},$$
$$(fg)'_{x_i} = fg'_{x_i} + f'_{x_i}g,$$
$$(\frac{f}{g})'_{x_i} = \frac{f'_{x_i}g - fg'_{x_i}}{g^2}.$$

Példa 2.1.6 *Határozzuk meg az $f(x,y) = \sin(x-y^2) + arctg\frac{y}{x}$ függvény parciális deriváltjait!*

Megoldás:

$$f'_x(x,y) = \cos(x-y^2) + \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right).$$

$$f'_y(x,y) = -2y\cos(x-y^2) + \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Példa 2.1.7 *Határozzuk meg az $f(x,y,z) = x^{(y^z)} + (x^y)^z - xyz$ háromváltozós valós függvény parciális deriváltjait!*

Megoldás: *Vegyük észre, hogy $(x^y)^z = x^{yz}$! Tehát*

$$f(x,y,z) = x^{(y^z)} + x^{yz} - xyz.$$

Így

$$f_x(x,y,z) = y^z x^{y^z-1} + yzx^{yz-1} - yz.$$
$$f_y(x,y,z) = x^{(y^z)}(lnx)zy^{z-1} + x^{yz}(lnx)z - xz.$$
$$f_z(x,y,z) = x^{(y^z)}(lnx)y^z(lny) + x^{yz}(lnx)y - xy.$$

Definíció 2.1.8 *Egy n-változós valós $f(x_1,\ldots,x_n)$ függvény r-edik ($r \geq 1$) parciális deriváltjain (más néven, r-edrendű parciális deriváltjain) a függvény $r-1$-edrendű parciális deriváltjainak parciális deriváltjait értjük, kiegészítve azzal a megjegyzéssel, hogy a függvény bármelyik változója szerinti 0-dik parciális deriváltján magát a függvényt értjük.*

A következő tétel az r-edrendű parciális deriváltak kapcsolatára vonatkozik.

Tétel 2.1.9 *Legyen P_0 az n-változós valós f függvény értelmezési tartományának olyan pontja, amelynek valamely teljes környezetében az f függvény összes r-edrendű parciális deriváltja folytonos. Akkor az f függvény bármely két olyan r-edrendű parciális deriváltja, amely csak a deriválások sorrendjében tér el egymástól, a P_0 pontban ugyanazt az értéket veszi fel.*

Ennek a tételnek egy speciális esetét is megfogalmazzuk, amely tételre a Young-tétel néven is szoktak hivatkozni.

Tétel 2.1.10 *Ha a kétváltozós valós $f(x, y)$ függvény másodrendű parciális deriváltjai az (x_0, y_0) pont valamely teljes környezetében folytonosak, akkor*

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

Nagy Attila

2.2. Az n-változós valós függvények differenciálhatósága

Definíció 2.2.1 *Akkor mondjuk, hogy egy n-változós valós f függvény differenciálható értelmezési tartományának valamely P_0 pontjában, ha megadható olyan $\underline{d} \in \mathbb{R}^n$ vektor és P_0-nak egy olyan E teljes környezete, hogy minden E-beli P pont esetén teljesül az*

$$f(P) - f(P_0) = \underline{d}\overrightarrow{P_0P} + \underline{\epsilon}(P)\overrightarrow{P_0P}$$

egyenlőség, ahol $\underline{\epsilon}(P)$ a P-től függő olyan $\mathbb{R}^n$-beli vektor, amely eleget tesz a

$$\lim_{P \to P_0} \underline{\epsilon}(P) = \underline{0}$$

feltételnek.

Tétel 2.2.2 *Ha az n-változós valós f függvény differenciálható értelmezés tartományának valamely P_0 pontjában, akkor egy és csak egy olyan $\mathbb{R}^n$-beli $\underline{d}$ vektor létezik, amelyre teljesülnek a differenciálhatóság definíciójában szereplő feltételek.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az n-változós valós f függvény differenciálható értelmezési tartományának valamely P_0 pontjában, továbbá tegyük fel azt is, hogy van két olyan $\mathbb{R}^n$-beli $\underline{d}_1$ és $\underline{d}_2$ vektor, amelyekre teljesülnek a differenciálhatóság definíciójában szereplő feltételek. Nevezetesen, megadhatók P_0-nak olyan E_1 és E_2 teljes környezetei, hogy

$$(\forall P \in E_1) : f(P) - f(P_0) = \underline{d}_1 \overrightarrow{P_0P} + \underline{\epsilon}_1(P)\overrightarrow{P_0P}$$

és

$$(\forall P \in E_2) : f(P) - f(P_0) = \underline{d}_2 \overrightarrow{P_0P} + \underline{\epsilon}_2(P)\overrightarrow{P_0P}$$

teljesül, ahol $\underline{\epsilon}_1$ és $\underline{\epsilon}_2$ a P-től függő olyan $\mathbb{R}^n$-beli vektorok, melyekre a

$$\lim_{P \to P_0} \underline{\epsilon}_1(P) = \underline{0}$$

és

$$\lim_{P \to P_0} \underline{\epsilon}_2(P) = \underline{0}$$

teljesülnek. Legyen $E = E_1 \cap E_2$. Akkor

$$(\forall P \in E) : f(P) - f(P_0) = \underline{d}_1 \overrightarrow{P_0P} + \underline{\epsilon}_1(P)\overrightarrow{P_0P}$$

és

$$(\forall P \in E) : f(P) - f(P_0) = \underline{d}_2 \overrightarrow{P_0P} + \underline{\epsilon}_2(P)\overrightarrow{P_0P}.$$

Az alsó egyenlőségnek a felsőből való kivonása, majd az így kapott egyenlőség rendezése után a következő adódik:

$$(\forall P \in E) : (\underline{d}_2 - \underline{d}_1)\overrightarrow{P_0P} = (\underline{\epsilon}_1 - \underline{\epsilon}_2)\overrightarrow{P_0P}.$$

Legyen $\underline{e} \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges egységvektor. Akkor tetszőleges P_0-tól különböző olyan $P \in E$ pontra, amelyek az $\underline{e}$ egységvektor pozitív valós számszorosai, igaz a következő egyenlőség:

$$(\underline{d}_2 - \underline{d}_1)|\overrightarrow{P_0P}|\underline{e} = (\underline{\epsilon}_1 - \underline{\epsilon}_2)|\overrightarrow{P_0P}|\underline{e}.$$

Nagy Attila

Elosztva mindkét oldalt a nullától különböző $|\overrightarrow{P_0P}|$ számmal, a következő adódik:

$$(\underline{d}_2 - \underline{d}_1)\underline{e} = (\underline{\epsilon}_1 - \underline{\epsilon}_2)\underline{e}.$$

Vegyük mindkét oldal határértékét, miközben P tart a P_0-hoz. A következőt kapjuk:

$$(\underline{d}_2 - \underline{d}_1)\underline{e} = \underline{0}\underline{e} = 0.$$

Így azt kaptuk, hogy a $(\underline{d}_2 - \underline{d}_1) \in \mathbb{R}^n$ vektor az $\mathbb{R}^n$ tér tetszőleges egységvektorára merőleges. Korábbi tanulmányainkból következik, hogy ez csak akkor lehetséges, ha a $\underline{d}_2 - \underline{d}_1$ vektor a nullvektor, azaz, ha

$$\underline{d}_2 = \underline{d}_1.$$

□

Definíció 2.2.3 *Egy n-változós valós $f(x_1, \ldots, x_n)$ függvény $P_0 \in D_f$ pontbeli gradiensvektorán az n-dimenziós*

$$\underline{grad} f(P_0) = [f'_{x_1}(P_0), \ldots, f'_{x_n}(P_0)] \in \mathbb{R}^n$$

vektort értjük, feltéve, hogy léteznek az f függvénynek a P_0 pontbeli parciális differenciálhányadosai minden egyes változója szerint.

Nagy Attila

Tétel 2.2.4 *Ha az n-változós valós f függvény differenciálható értelmezés tartományának valamely P_0 pontjában, akkor a differenciálhatóság definíciójában szereplő feltételnek eleget tevő (egyetlen) vektor megegyezik az f függvény P_0-pontbeli gradiensvektorával, azaz $\underline{d} = \underline{grad} f(P_0)$.*

Az előző tétel alapján megfogalmazhatjuk az n-változós valós függvények differenciálhatóságának egy, a korábbival ekvivalens változatát.

Definíció 2.2.5 *Egy n-változós valós f függvényről akkor mondjuk, hogy differenciálható értelmezési tartományának valamely P_0 pontjában, ha létezik a P_0 pontbeli gradiensvektora, és megadható P_0-nak olyan E teljes környezete, hogy minden E-beli P pont esetén teljesül az*

$$f(P) - f(P_0) = \overrightarrow{P_0P}\,\underline{grad} f(P_0) + \underline{\epsilon}(P)\overrightarrow{P_0P}$$

egyenlőség, ahol $\underline{\epsilon}(P)$ a P-től függő olyan $\mathbb{R}^n$-beli vektor, amely eleget tesz a

$$\lim_{P \to P_0} \underline{\epsilon}(P) = \underline{0}$$

feltételnek.

Korábban bizonyított eredmény alapján, ha egy egyváltozós való $f(x)$ függvény differenciálható egy x_0 pontban, akkor folytonos is x_0-ban. Érvényes ennek az eredménynek az n-változós valós függvényekre vonatkozó alakja, azaz igaz a következő tétel.

Tétel 2.2.6 *Ha az n-változós valós f függvény differenciálható értelmezés tartományának valamely P_0 pontjában, akkor folytonos is P_0-ban.*

Ha egy n-változós valós f függvény folytonos egy P_0 pontban, akkor ott nem feltétlenül differenciálható. Viszont f parciális deriváltfüggvényeinek P_0-beli folytonossága maga után vonja a függvény P_0 pontbeli differenciálhatóságát, azaz igaz a következő tétel.

Tétel 2.2.7 *Ha az n-változós valós f függvény minden egyes változója szerinti parciális deriváltfüggvénye folytonos a P_0 pontban, akkor az f függvény differenciálható P_0-ban (és ezért folytonos is P_0-ban).*

Korábbi tanulmányaikból ismert, hogy az egyváltozós valós függvényekből képezett összetett függvény deriváltját a külső és a belső függvény deriváltjának szorzataként is megkaphatjuk. A következőkben egy olyan szabályt (az un. láncszabályt) ismertetünk, melynek alapján a többváltozós valós függvények parciális deriváltjait a külső függvény és a belső függvények parciális deriváltjaiból kaphatjuk meg.

Tétel 2.2.8 *Ha az n-változós valós $u_j(x_1, \ldots, x_n)$ $(j = 1, \ldots, m)$ belső függvények parciálisan differenciálhatóak egy P_0 pontban az x_i $(i = 1, \ldots, n)$ változó szerint és az m-változós $f(u_1, \ldots, u_m)$ külső függvény differenciálható az*

$$U_0 = (u_1(P_0), \ldots, u_m(P_0))$$

pontban, akkor az $f \circ (u_1, \dots, u_m)$ összetett függvény is parciálisan differenciálható a P_0 pontban az x_i változó szerint, és

$$f'_{x_i}(P_0) = \sum_{j=1}^{m} f'_{u_j}(U_0) u'_{j\,x_i}(P_0).$$

Speciálisan, ha $n = m = 2$ és $x_1 = x,\ x_2 = y, u_1 = u, u_2 = v$, akkor az

$$f(u(x,y), v(x,y))$$

összetett függvény x és y belső változói szerinti parciális deriváltfüggvényei:

$$f'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x \quad \text{és} \quad f'_y = f'_u u'_y + f_v v'_y.$$

2.3. Az iránymenti differenciálhányados

A kétváltozós, illetve a háromváltozós valós függvények parciális differenciálhányadosai a függvényeknek a koordinátatengelyek irányában történő változását jellemzik. Ebben a fejezetben olyan fogalmat definiálunk, melynek segítségével ezen függvényeknek más irányban történő változását is jellemezhetjük.

Definíció 2.3.1 *Legyen $\underline{e}$ az n-dimenziós $\mathbb{R}^n$ vektortér valamely egységvektora. Az n-változós valós f függvény $P_0 \in D_f$ pontbeli, $\underline{e}$ iránymenti differenciálhányadosán az*

$$f'_{\underline{e}}(P_0) = \lim_{P \to P_0} \frac{f(P) - f(P_0)}{\underline{e}\overrightarrow{P_0P}}$$

határértéket értjük, miközben P úgy tart P_0-hoz, hogy a $\overrightarrow{P_0P}$ vektor az $\underline{e}$ vektorral egyező állású.

Megjegyzés 2.3.2 *Egy kétváltozós valós $f(x,y)$ függvény $P_0(x_0, y_0)$ pontbeli $\underline{e}$ egységvektor irányába eső $f'_{\underline{e}}(P_0)$ iránymenti differenciálhányadosa megegyezik annak a $\mathcal{G}$ görbének az $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pontjához tartozó érintőnek iránytangnsével, amely $\mathcal{G}$ görbe az (x_0, y_0) ponton átmenő, a z-tengellyel és az $\underline{e}$ vektorral párhuzamos síknak az $f(x,y)$ függvény grafikonjával való metszete.*

Tétel 2.3.3 *Ha az n-változós valós f függvény differenciálható egy $P_0 \in D_f$ pontban, akkor ebben a pontban bármely $\underline{e}$ egységvektor szerinti iránymenti differenciálhányadosa létezik, és*

$$f'_{\underline{e}}(P_0) = \underline{e}\ \underline{grad} f(P_0).$$

Bizonyítás. Legyen f olyan n-változós valós függvény, amely differenciálható a P_0 pontban. Akkor van P_0-nak olyan E teljes környezete és megadható olyan $\underline{d} \in \mathbb{R}^n$ vektor, hogy E minden P pontjára teljesül az

$$f(P) - f(P_0) = \overrightarrow{P_0P}\underline{grad} f(P_0) + \underline{\epsilon}(P)\overrightarrow{P_0P}$$

egyenlőség, ahol $\underline{\epsilon}(P)$ a P-től függő olyan $\mathbb{R}^n$-beli vektor, amely eleget tesz a

$$\lim_{P \to P_0} \underline{\epsilon}(P) = \underline{0}$$

feltételnek. Legyen $\underline{e}$ tetszőleges $\mathbb{R}^n$-beli egységvektor. Akkor minden olyan $P \in E$ pontra, amelyre $\overrightarrow{P_0P}$ egyállású $\underline{e}$-vel és $P \neq P_0$, az is teljsül, hogy $\overrightarrow{P_0P} = \underline{e}(\underline{e}, \overrightarrow{P_0P})$, és így a fenti egyenlőség a következő alakú:

$$f(P) - f(P_0) = \underline{e}(\underline{e}, \overrightarrow{P_0P})\underline{grad} f(P_0) + \underline{\epsilon}(P)\underline{e}(\underline{e}, \overrightarrow{P_0P}).$$

Elosztva az egyenlőséget a nem nulla $\underline{e}, \overrightarrow{P_0P}$ skaláris szorzattal,

$$\frac{f(P) - f(P_0)}{\underline{e}\overrightarrow{P_0P}} = \underline{e}\underline{grad} f(P_0) + \underline{\epsilon}(P)\underline{e}$$

adódik, és így

$$f'_{\underline{e}}(P_0) = \lim_{P \to P_0} \frac{f(P) - f(P_0)}{\underline{e}\overrightarrow{P_0P}} = \underline{e}\underline{grad} f(P_0),$$

mivel

$$\lim_{P \to P_0} \underline{\epsilon}(P) = \underline{0}.$$

□

Nagy Attila

Megjegyzés 2.3.4 Az előző tétel alapján egy n-változós $f(x_1, \ldots, x_n)$ függvénynek az $\mathbb{R}^n$ vektortér standard bázisához tartozó $\underline{e}_i$ egységvektora szerinti iránymenti differenciálhányadosára

$$\underline{e}_i \; \underline{grad} f(P_0) = f'_{x_i}(P_0)$$

adódik, azaz a P_0 pontbeli, $\underline{e}_i$ szerinti iránymenti differenciálhányados megegyezik a P_0 pontbeli, x_i változó szerinti parciális differenciálhányadossal.

Megjegyzés 2.3.5 Legfeljebb háromváltozós f függvény esetén az $\underline{e}$ és $\underline{grad} f(P_0)$ vektorok skaláris szorzata kifejezhető az általuk bezárt α szög segítségével, így

$$f'_{\underline{e}}(P_0) = |\underline{e}||\underline{grad} f(P_0)| \cos\alpha = |\underline{grad} f(P_0)| \cos\alpha.$$

Ez utóbbi szorzat akkor maximális értékű, ha $\cos\alpha$ maximális, vagyis ha $\alpha = 0$. Eszerint, a P_0 pontbeli iránymenti differenciálhányadosok közül az a maximális, amelyik a P_0 pontbeli gradiens irányához tartozik.

Példa 2.3.6 *Számítsuk ki az $f(x, y, z) = 2^x yz$ háromváltozós valós függvény iránymenti differenciálhányadosát a $P_0(1, -1, 1)$ pontban az $\underline{a} = [0, 2, -1]$ vektor irányában!*

Megoldás: Mivel

$$\underline{grad} f(x, y, z) = [2^x yz ln2, 2^x z, 2^x y],$$

ezért $\underline{grad} f(1, -1, 1) = [-2ln2, 2, -2]$. Az $\underline{a}$ vektorral egyező irányú egységvektor $\underline{e} = [0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}]$. Így

$$f_{\underline{e}}(1, -1, 1) = [-2ln2, 2, -2] \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \frac{6}{\sqrt{5}}.$$

Nagy Attila

Nagy Attila

3. fejezet

TÖBBVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK III.

Ha $A = (a_1, \ldots, a_n)$ és $B = (b_1, \ldots, b_n)$ az $\mathbb{R}^n$ tér tetszőleges pontjai, akkor az (A, B) pontpárt összekötő szakaszon az

$$\Theta = ((a_1 + \theta(b_1 - a_1), \ldots, a_n + \theta(b_n - a_n)), \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

pontok összességét értjük. Ennek a szakasznak az A-tól és B-től különböző pontjait a szakasz belső pontjainak nevezzük. Tehát a fenti (A, B) pontpár által meghatározott szakasz belső pontjai mindazon

$$\Theta = (a_1 + \theta(b_1 - a_1), \ldots, a_n + \theta(b_n - a_n))$$

pontok, amelyeknél θ a $(0, 1)$ nyílt intervallumban helyezkedik el.

Legyen f olyan n-változós valós függvény, melynek összes $(r+1)$-edrendű parciális deriváltja folytonos a

$$P_0 = (x_{10}, \ldots, x_{n0}) \in \mathbb{R}^n$$

pont valamely E teljes környezetében. Legyen

$$P = (x_{10} + h_1, \ldots x_{n0} + h_n) \in E$$

tetszőleges (de rögzített) pont. Az f függvénynek a P_0P szakasz tetszőleges

$$T = (x_{10} + th_1, \ldots, x_{n0} + th_n)$$

pontjában felvett értéke

$$f(T) = f(x_{10} + th_1, \ldots, x_{n0} + th_n),$$

amely csak a $[0, 1]$ intervallumbeli t változó függvénye. Jelöljük ezt a függvényt $F(t)$-vel. A többváltozós összetett függvények parciális deriváltjaira vonatkozó tétel szerint, az $F(t)$ függvényre a $[0, 1]$ intervallumon alkalmazhatjuk a Taylor formulát, amely szerint van a $(0, 1)$ intervallumnak olyan θ pontja, amelyre

$$F(1) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!} + \frac{F''(0)}{2!} + \cdots + \frac{F^{(r)}(0)}{r!} + \frac{F^{(r+1)}(\theta)}{(r+1)!} \tag{3.1}$$

teljesül.

3.1. A Lagrange-féle középértéktétel

Az egyváltozós valós függvényekre vonatkozó Lagrange-féle középértéktétel szerint, ha egy egyváltozós valós f függvény differenciálható egy x_0 pont valamely teljes környezetében (és ekkor folytonos is ebben a teljes környezetben), akkor ennek a teljes környezetnek tetszőleges $x_0 + h$ pontjában felvett függvényértékre

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0 + \theta h)$$

teljesül, ahol θ a $(0, 1)$ nyílt intervallum alkalmasan választott pontja.

A következőkben ennek az eredménynek a többváltozós valós függvényekre vonatkozó általánosításával foglalkozunk.

A fenti (3.1) formulának $r = 0$ esetre vonatkozó alakja:

$$F(1) = F(0) + F'(\theta). \tag{3.2}$$

Az összetett függvények parciális deriválására vonatkozó láncszabály szerint

$$F'(\theta) = h_1 f'_{x_1}(\theta) + \cdots + h_n f'_{x_n}(\theta) = \overrightarrow{P_0P}\underline{grad} f(\Theta),$$

ahol

$$\Theta = (x_{10} + \theta h_1, \ldots, x_{n0} + \theta h_n).$$

Így a fenti (3.2) formula a következő alakban írható:

$$f(P) = f(P_0) + \overrightarrow{P_0P}\underline{grad} f(\Theta),$$

amelyben Θ a P_0P szakasznak egy belső pontja.

Ezzel lényegében bizonyítottuk a következő tételt, amelyre az n-változós valós függvények Lagrange-féle középértéktétele néven fogunk hivatkozni.

Tétel 3.1.1 *Ha az n-változós valós f függvény elsőrendű parciális deriváltjai folytonosak a P_0 pont valamely teljes környezetében, akkor az ehhez a teljes környezethez tartozó bármely P pontban felvett f szerinti függvényérték kifejezhető a következőképpen:*

$$f(P) = f(P_0) + \overrightarrow{P_0P}\underline{grad}f(\Theta),$$

ahol Θ a P_0P szakasz alkalmasan választott belső pontja.

A Lagrange-féle középértéktételnek a kétváltozós valós függvényekre vonatkozó alakja a következőképpen is megfogalmazható.

Tétel 3.1.2 *Ha a kétváltozós valós $f(x,y)$ függvény elsőrendű parciális deriváltjai folytonosak az (x_0,y_0) pont valamely teljes környezetében, akkor az ehhez a teljes környezethez tartozó bármely (x_0+h, y_0+k) pontban felvett f-szerinti függvényérték kifejezhető a következőképpen:*

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + hf'_x(x_0+\theta h, y_0+\theta k) + kf'_y(x_0+\theta h, y_0+\theta k),$$

ahol θ a $(0,1)$ intervallum alkalmasan választott pontja.

A (3.1) formulának $r=1$ esetre és kétváltozós f függvényre való alkalmazásával a következő eredmény adódik.

Tétel 3.1.3 *Ha a kétváltozós valós $f(x,y)$ függvény másodrendű parciális deriváltjai folytonosak az (x_0,y_0) pont valamely teljes környezetében, akkor az ehhez a teljes környezethez tartozó bármely (x_0+h, y_0+k) pontban felvett f-szerinti függvényérték kifejezhető a következőképpen:*

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + hf'_x(x_0,y_0) + kf'_y(x_0,y_0) +$$

$$+\frac{1}{2}(h^2f''_{xx}(x_0+\theta h, y_0+\theta k) + 2hkf''_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k) + k^2f''_{yy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)),$$

ahol θ a $(0,1)$ intervallum alkalmasan választott pontja.

3.2. A teljes differenciál

Definíció 3.2.1 *Legyen $A = (a_1, \dots, a_n)$ az n-változós $f(x_1, \dots, x_n)$ valós függvény értelmezési tartományának olyan pontja, ahol f összes elsőrendű parciális differenciálhányadosa létezik. Az f függvény A pontbeli teljes differenciálján azt a $df(A)$ módon jelölt n-változós valós függvényt értjük, amely tetszőleges $(h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ elem n-eshez a*

$$\sum_{i=1}^{n} h_i f'_{x_i}(A)$$

értéket rendeli. A $df(A)$ teljes differenciálnak a $(h_1, \dots, h_n)$ elem n-eshez rendelt értékét

$$df(A; h_1, \dots, h_n)$$

módon is jelöljük, azaz

$$df(A; h_1, \dots, h_n) = \sum_{i=1}^{n} h_i f'_{x_i}(A) = \underline{h}\underline{grad} f(P_0),$$

ahol $\underline{h}([h_1, \dots, h_n]$

Nagy Attila

Ha a (3.1) formulát $r = 1$ esetre alkalmazzuk egy kétváltozós valós $f(x, y)$ függvényre, akkor a $P_0 = (x_0, y_0)$ pont valamely E teljes környezetében lévő tetszőleges $P = (x, y)$ pontra

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + (x - x_0) f'_x(x_0, y_0) + (y - y_0) f'_y(x_0, y_0) = f(x_0, y_0) + df(P_0; (x - x_0), (y - y_0)).$$

Jelölje z a képletben szereplő $f(x_0, y_0) + df(P_0; (x - x_0), (y - y_0))$ függvényt, azaz legyen

$$z = f(x_0, y_0) + (x - x_0) f'_x(x_0, y_0) + (y - y_0) f'_y(x_0, y_0).$$

Átrendezés után

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - f(x_0, y_0)) = 0$$

adódik, amely az

$$(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$$

ponton átmenő,

$$\underline{n} = [f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1]$$

normálvektorú sík egyenlete. Az f függvénynek a

$$z = f(x_0, y_0) + (x - x_0)f'_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f'_y(x_0, y_0)$$

függvénnyel való közelítése tehát lineáris közelítés. Az előzőek alapján a $df(P_0; (x - x_0), (y - y_0))$ teljes differenciál grafikonja olyan sík, amely párhuzamos a fenti síkkal (a z függvény grafikonjával) és átmegy az $(x_0, y_0, 0)$ ponton.

Tétel 3.2.2 *Ha a n-változós valós f függvény teljes differenciálja valamely összefüggő nyílt D halmazon azonosan nulla, akkor az f függvény konstans a D halmazon.*

Nagy Attila

3.3. Szélsőértékek

Definíció 3.3.1 *Akkor mondjuk, hogy egy n-változós valós f függvénynek valamely $P_0 \in D_f$ pontban szigorú értelemben vett lokális minimuma [illetve, lokális maximuma] van, ha megadható P_0-nak olyan E környezete, hogy minden $P \in E \cap D_f$ pontban $f(P) > f(P_0)$ [illetve, $f(P) < f(P_0)$] teljesül.*

Definíció 3.3.2 *Akkor mondjuk, hogy egy n-változós valós f függvénynek valamely $P_0 \in D_f$ pontban szélsőértéke van, ha f-nek a P_0-ban szigorú értelemben vett lokális minimuma vagy szigorú értelemben vett lokális maximuma van.*

Tétel 3.3.3 *Ha egy n-változós valós f függvénynek valamely P_0 pntban szélsőértéke van, akkor a P_0-ban létező minden parciális differenciálhányadosa zérus.*

Tétel 3.3.4 *Legyen f olyan kétváltozós valós függvény, melynek másodrendű parciális deriváltjai folytonosan a P_0 pont valamely teljes környezetében, továbbá*

$$f'_x(P_0) = f'_y(P_0) = 0.$$

Ha

$$\mathbb{D}et_f(P_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(P_0) & f''_{xy}(P_0) \\ f''_{yx}(P_0) & f''_{yy}(P_0) \end{vmatrix} > 0,$$

akkor az f függvénynek szélsőértéke van a P_0 pontban. Ez a szélsőérték szigorú

- *minimum, ha $f''_{xx}(P_0)$ pozitív,*
- *maximum, ha $f''_{xx}(P_0)$ negatív,*

vagy, ami ezzel ekvivalens,

- *minimum, ha $f''_{yy}(P_0)$ pozitív,*
- *maximum, ha $f''_{yy}(P_0)$ negatív,*

Ha

$$\mathbb{D}et_f(P_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(P_0) & f''_{xy}(P_0) \\ f''_{yx}(P_0) & f''_{yy}(P_0) \end{vmatrix} < 0,$$

akkor az f függvénynek nincs szélsőértéke a P_0 pontban.

Nagy Attila

Megjegyzés 3.3.5 Ha az előző tételben szereplő

$$\mathbb{D}et_f(P_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(P_0) & f''_{xy}(P_0) \\ f''_{yx}(P_0) & f''_{yy}(P_0) \end{vmatrix}$$

determináns értéke nulla, akkor egyéb vizsgálatra van szükség ahhoz, hogy eldönthessük, van-e az f függvénynek szélsőértéke, vagy nincs.

Példa 3.3.6 Állapítsuk meg, hogy van-e szélsőértéke az

$$f(x, y) = xe^{x+y}$$

függvénynek!

Megoldás. Az f függvény mindkét változója szerinti elsőrendű parciális deriváltja minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ helyen létezik:

$$f'_x(x, y) = (1 + x)e^{x+y}, \quad f'_y(x, y) = xe^{x+y}.$$

Szélsőérték így csak olyan (x, y) pontokban létezik, melyekre teljesül az

$$(1 + x)e^{x+y} = 0,$$

$$xe^{x+y} = 0$$

egyenletrendszer. Az első egyenlet

$$e^{x+y} + xe^{x+y} = 0$$

alakban is írható. Mivel a bal oldal második tagja (a második egyenlet miatt) 0-val egyenlő, így

$$e^{x+y} = 0,$$

ami ellentmondás. Így az egyenletrendszernek nincs megoldása. Ezért az f függvénynek nincs szélsőértéke.

Példa 3.3.7 Állapítsuk meg, hogy van-e szélsőértéke az

$$f(x, y) = 1 + x + 4y - 3x^3 - 3y^3$$

függvénynek, és ha igen, milyenek!
Megoldás. Az f függvény elsőrendű parciális deriváltjai:

$$f'_x(x, y) = 1 - 9x^2,$$

$$f'_y(x, y) = 4 - 9y^2.$$

Ezek minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pontban léteznek. Szélsőérték így csak olyan (x, y) pontokban lehet, amelynek koordinátái eleget tesznek az

$$1 - 9x^2 = 0,$$

$$4 - 9y^2 = 0$$

egyenletrendszernek. Ennek négy megoldása van:

$$x_1 = \frac{1}{3}\ y_1 = \frac{2}{3}; \quad x_2 = \frac{1}{3},\ y_2 = -\frac{2}{3};$$

Nagy Attila

$$x_3 = -\frac{1}{3},\ y_3 = \frac{2}{3}; \quad x_4 = -\frac{1}{3},\ y_4 = -\frac{2}{3}.$$

Így az f függvénynek a következő pontokban lehet szélsőértéke:

$$P_1\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),\ P_2\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right),\ P_3\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),\ P_4\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right).$$

Mivel

$$f''_{xx}(x,y) = -18x,\ f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = 0,\ f''_{yy}(x,y) = -18y,$$

ezért

$$\mathbb{D}et_f(x,y) = 324xy.$$

Ennek alapján $\mathbb{D}et_f(x,y)$ akkor és csak akkor pozitív, ha x és y azonos előjelű. Ebből következően, a $P1$ és P_4 pontokban az f függvénynek van szélsőértéke, a P_2 és P_3 pontokban viszont nincs. Mivel

$$f''_{xx}(P_1) < 0 \quad \text{és} \quad f''_{xx}(P_4) > 0,$$

ezért a P_1 pontban szigorú maximuma, a P_4 pontban pedig szigorú minimuma van az f függvénynek.

Példa 3.3.8 Állapítsuk meg, hogy van-e szélsőértéke az

$$f(x,y) = x^4 + x^2y^2 + y^4$$

függvénynek, és ha igen, milyenek!
Megoldás: Az f függvény elsőrendű parciális deriváltjai:

$$f'_x(x,y) = 4x^3 + 2xy^2, \quad f'_y(x,y) = 2x^2y + 4y^3.$$

Ezek minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontban léteznek. Szélsőérték így csak olyan (x,y) pontokban lehet, amelynek koordinátái eleget tesznek az

$$4x^3 + 2xy^2 = 0,$$

$$2x^2y + 4y^3 = 0$$

egyenletrendszernek. Ennek az egyenletrendszernek egyenlet megoldása van: $(0,0)$. Így a vizsgált függvénynek csak a $(0,0)$ pontban lehet szélsőértéke. Mivel

$$f''_{xx} = 12x^2 + 2y^2,\ f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = 4xy,\ f''_{yy}(x,y) = 2x^2 + 12y^2,$$

ezért

$$\mathbb{D}et_f(0,0) = 0.$$

Ebből a számításból tehát nem derül ki, van-e szélsőértéke az f függvénynek. Mivel $f(0,0) = 0$ és minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ helyen

$$f(x,y) = x^4 + x^2y^2 + y^4 \geq 0,$$

ezért az f függvénynek szigorú értelemben vett minimuma van a $(0,0)$ pontban.

Példa 3.3.9 Állapítsuk meg, hogy van-e szélsőértéke az

$$f(x,y) = x^3 + y^3$$

függvénynek, és ha igen, milyenek!
Megoldás. Az f függvény elsőrendű parciális deriváltjai:

$$f'_x(x,y) = 3x^2, \quad f'_y(x,y) = 3y^2.$$

Ezek minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontban léteznek. Szélsőérték tehát csak olyan (x,y) pontokban lehet, amelynek koordinátái eleget tesznek az

$$3x^2 = 0,$$

$$3y^2 = 0$$

egyenletrendszernek. Ennek az egyenletrendszernek egyenlet megoldása van: $(0,0)$, Így a vizsgált függvénynek csak a $(0,0)$ pontban lehet szélsőértéke. Mivel

$$f''_{xx} = 6x, \ f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = 0, \ f''_{yy}(x,y) = 6y,$$

ezért

$$\mathbb{D}et_f(x,y) = 36xy.$$

Így

$$\mathbb{D}et_f(0,0) = 0.$$

Ugyanúgy, mint az előző példában, az itteni számításokból sem derül ki, van-e szélsőértéke az f függvénynek. Más úton viszont könnyen belátható, hogy nincs. Az világos, hogy

$$f(0,0) = 0.$$

Viszont tetszőleges pozitív h esetén

$$f(h,0) > 0 \quad \text{és} \quad f(-h,0) < 0.$$

Az f függvény tehát a $(0,0)$ pont tetszőleges kis környezetében felvesz pozitív és negatív értékeket is. Így f-nek nincs szélsőértéke a $(0,0)$ pontban (és ezért nincs szélsőértéke $\mathbb{R}^2$ egyetlen pontjában sem sem).

Tétel 3.3.10 *Legyen $f(x_1,\dots,x_n)$ olyan n-változós valós függvény, melynek másodrendű parciális deriváltjai folytonosan a P_0 pont valamely teljes környezetében, továbbá*

$$f'_{x_1}(P_0) = \dots = f'_{x_n}(P_0) = 0.$$

Ha az n-elemű

$$f''_{x_1x_1}(P_0), \begin{vmatrix} f''_{x_1x_1}(P_0) & f''_{x_1x_2}(P_0) \\ f''_{x_2x_1}(P_0) & f''_{x_2x_2}(P_0) \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} f''_{x_1x_1}(P_0) & \dots & f''_{x_1x_n}(P_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{x_nx_1}(P_0) & \dots & f''_{x_nx_n}(P_0) \end{vmatrix}$$

sorozat minden eleme pozitív, akkor az f függvénynek szigorú minimuma van az P_0 pontban; ha pedig ez a sorozat váltakozó előjelű, mégpedig úgy, hogy $f''_{x_1x_1}(P_0) < 0$, akkor az f függvénynek szigorú maximuma van a P_0 pontban.

Példa 3.3.11 Állapítsuk meg, hogy van-e szélsőértéke az

$$f(x,y) = 1 + x + y + z - 2x^2 - 4y^2 - 6z^2$$

függvénynek, és ha igen, milyenek!
Megoldás. Az f fügvvény elsőrendű parciális deriváltjai:

$$f'_x(x,y,z) = -2x + 1, \quad f'y(x,y,z) = -8y + 1, \quad f'_z(x,y,z) = -12z + 1.$$

Ezek minden $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ pontban léteznek. Szélsőérték így csak olyan (x,y,z) pontokban lehet, amelyek koordinátái eleget tesznek az

$$-2x + 1 = 0,$$

$$-8y + 1 = 0,$$

$$-12z + 1 = 0$$

egyenletrendszernek. Ennek az egyenletrendszernek egyenlet megoldása van: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12})$. Így a vizsgált függvénynek csak a $P_0(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12})$ pontban lehet szélsőértéke. Mivel

$$f''_{xx}(x, y, z) = -2,\ f''_{yy}(x, y, z) = -8,\ f''_{zz}(x, y, z) = -12,$$

a másodrendű veges parciális deriváltak mindegyike pedig azonosan nulla, ezért az

$$f''_{xx}(P_0), \begin{vmatrix} f''_{xx}(P_0) & f''_{xy}(P_0) \\ f''_{yx}(P_0) & f''_{yy}(P_0) \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} f''_{xx}(P_0) & f''_{xy}(P_0) & f''_{xz}(P_0) \\ f''_{yx}(P_0) & f''_{yy}(P_0) & f''_{yz}(P_0) \\ f''_{zx}(P_0) & f''_{zy}(P_0) & f''_{zz}(P_0) \end{vmatrix}$$

sorozat

$$-2, 16, -192.$$

Így a vizsgált f függvénynek a P_0 pontban szigorú értelemben vett maximuma van.

Tagy Attila

3.4. Feltételes szélsőérték-számítás

Kétváltozós valós $f(x, y)$ függvények szélsőértékhelyeinek meghatározására nem alkalmazhatjuk az előzőekben megismert módszereket például olyan esetekben, amikor a függvény értelmezési tartománya olyan halmaz, amelyet az xy-síkon egy görbe vagy annak egy része ábrázol. Legyen például $f(x, y)$ az a kétváltozós valós függvény, melynek értelmezési tartománya az xy-sík

$$u(x, y) = x + 2y - 2 = 0$$

egyenletű egyenesén levő pontok halmaza, és ennek az egyenesnek tetszőleges (x, y) pontjához az

$$f(x, y) = x^2 + 4y^2$$

értéket rendeli. Állapítsuk meg, hogy hol és milyen szélsőértékei vannak ennek a függvénynek!

Tétel 3.4.1 *Ha az $u(x,y)=0$ egyenletű halmazon értelmezett kétváltozós valós $f(x,y)$ függvény az (x_0,y_0) pontban mindkét változója szerint parciálisan differenciálható, és ott f-nek szélsőértéke van, akkor megadható olyan λ_0 valós szám, hogy a*

$$h(x,y,\lambda)=f(x,y)=\lambda u(x,y)$$

képlettel definiált háromváltozós valós h függvény mindegyik elsőrendű parciális deriváltja létezik és zérus értékű az (x_0,y_0,λ_0) pontban

A példánkhoz tartozó h függvény a következő alakú:

$$h(x,y,\lambda)=x^2+4y^2+\lambda(x+2y-2).$$

Az egyes változók szerinti elsőrendű parciális deriváltak:

$$h'_x(x,y,\lambda)=2x+\lambda,\ h'_y(x,y,\lambda)=8y+2\lambda,\ h'_\lambda(x,y,\lambda)=x+2y-2.$$

Ezek mindegyike akkor és csak akkor egyenlő nullával, ha

$$x=1,\ y=\frac{1}{2},\ \lambda=-2.$$

A vizsgált f függvénynek tehát csak az $(1,\frac{1}{2})$ pontban lehet szélsőértéke. Az $f(x,y)$ függvénynek akkor és csak akkor van szélsőértéke az $(1,\frac{1}{2})$ pontban, ha az egyváltozós

$$f(y)=f(x,y)|_{x=2-2y}=8y^2-8y+4$$

függvénynek szélsőértéke van az $\frac{1}{2}$ pontban. Egyszerű számítással adódik, hogy az $f(y)$ függvénynek szigorú minimum van az $\frac{1}{2}$ helyen. Így az $f(x,y)$ függvénynek szigorú minimuma van az $(1,\frac{1}{2})$ pontban.

4. fejezet

TÖBBVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK IV.

Definíció 4.0.1 *Egy d távolságfüggvénnyel ellátott M metrikus tér egy V halmazát (például egy sík vagy a tér egy V halmazát) korlátosnak nevezzük, ha megadható olyan M-beli P_0 pont és megadható egy olyan δ pozitív valós szám, hogy a V minden P pontja esetén $d(P, P_0) \leq \delta$ teljesül. Egy korlátos halmaz átmérőjén a halmaz pontpárjaihoz tartozó távolságok halmazának legkisebb felső korlátját (szuprémumát) értjük.*

Definíció 4.0.2 *Egy síkbeli halmazt mérhetőnek nevezünk, ha van területe. Egy térbeli halmazt mérhetőnek nevezünk, ha van térfogata. Egy síkbeli, illetve térbeli V halmaz területét, illetve térfogatát ΔV-vel fogjuk jelölni.*

Definíció 4.0.3 *Egy síkbeli (vagy térbeli) halmazt tartománynak nevezünk, ha korlátos, mérhető és egy zárt görbe (térbeli esetben zárt felület) határolja.*

4.1. A kettős és a hármas integrál fogalma

Legyen V egy síkbeli vagy térbeli tartomány. A V tartomány egy beosztásán V olyan $V_1, \ldots, V_n$ résztartományainak összességét értjük, melyek páronként

közös belső pont nélküliek, és uniójuk egyenlő V-vel.

Definíció 4.1.1 *Legyen V egy síkbeli vagy térbeli tartomány és $V_1, \ldots, V_n$ a V egy beosztása. Akkor mondjuk, hogy ez a beosztás δ finomságú (δ egy pozitív valós szám), ha a V_i résztartományok mindegyikének átmérője legfeljebb δ.*

Definíció 4.1.2 *Egy V tartomány valamely beosztáshoz tartozó finomságok legnagyobb alsó korlátját (infimumát) a beosztáshoz tartozó legkisebb finomságnak nevezzük (ez megegyezik a beosztást alkotó résztartományok közül a legkisebb átmérőjű résztartomány átmérőjével).*

Nagy Attila

Definíció 4.1.3 *Egy V tartomány beosztásainak egy sorozatát minden határon túl finomodónak nevezzük, ha a sorozatot alkotó beosztásokhoz tartozó legkisebb finomságok sorozata nullához konvergál.*

Definíció 4.1.4 *Legyen $V_1, \ldots, V_n$ egy síkbeli vagy térbeli V tartomány egy beosztása. Egy olyan $P_1, \ldots, P_n$ sorozatot, melyre $P_i \in V_i$ teljesül ($i = 1, \ldots, n$), a szóban forgó beosztás egy reprezentánsrendszerének nevezzük.*

Definíció 4.1.5 *Legyen a kétváltozós (illetve háromváltozós) valós f függvény korlátos az értelmezési tartományának valamely V résztartományán. Az f függvényhez, a V tartomány egy $V_1, \ldots, V_n$ beosztásához és ezen beosztás egy $P_1, \ldots, P_n$ reprezentásnsrendszeréhez tartozó integrálközelítő összegen az*

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta V_i$$

összeget értjük.

Megjegyzés 4.1.6 *Kétváltozós valós $f(x,y)$ függvény esetén, a V tartomány egy $V_1,\dots,V_n$ beosztásához és ezen beosztás egy $P_1,\dots,P_n$ reprezentásnsrendszeréhez tartozó $\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta V_i$ integrálközelítő összeg i-dik tagjának abszolút értéke, azaz $|f(P_i)|\Delta V_i$ megegyezik annak a hengerszerű térbeli alakzatnak a térfogatával, melynek alapja a térbeli derékszögű koordinátarendszer xy-síkjában lévő V_i tartomány, magassága pedig $|f(P_i)|$. Így nemnegatív értékű kétváltozós valós f függvény esetén a*

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta V_i$$

összeg közelítőleg egyenlő az f függvény grafikonja (amely egy felület) alatti és az xy-síkbeli V tartomány feletti térrész térfogatával.

Definíció 4.1.7 *A sikbeli (vagy térbeli) V tartományon értelmezett, korlátos kétváltozós (vagy háromváltozós) valós f függvényről akkor mondjuk, hogy integrálható V felett, ha az f függvényhez és a V tartomány bármely minden határon túl finomodó beosztássorozatához tartozó integrálközelítő összegek sorozata konvergens, a beosztások és a renrezentánsrendszerek választásától függetlenül.*

Nagy Attila

Tétel 4.1.8 *Ha az f függvény integrálható egy V tartományon, akkor az f függvényhez és a V tartomány bármely minden határon túl finomodó beosztássorozatához tartozó integrálközelítő összegek sorozata közös határértékhez konvergál.*

Definíció 4.1.9 *Egy V tartományon integrálható f függvény esetén az f függvényhez és a V tartomány bármely minden határon túl finomodó beosztássorozatához tartozó integrálközelítő összegek sorozatainak közös határértékét az f függvény V tartományon vett integráljának (kétváltozós f függvény esetén kettős integráljának, háromváltozós f függvény esetén hármas integráljának) nevezzük és*

$$\int_V f\,dV$$

módon jelöljük.

Megjegyzés 4.1.10 *A kettős integrál további jelölései:*

$$\int\int_V f dV, \int\int_V f(x,y)\ dxdy.$$

A hármas integrál további jelölései:

$$\int\int\int_V f dV, \int\int\int_V f(x,y,z)\ dxdydz.$$

4.2. A kettős és a hármas integrál tulajdonságai

Tétel 4.2.1 *Ha az f függvény integrálható a V tartományon, akkor tetszőleges c valós szám esetén a cf függvény is integrálható V-n, és*

$$\int_V cf dV = c\int_V f dV.$$

Tétel 4.2.2 *Ha az f és g függvények integrálhatóak a V tartományon, akkor $f+g$ összegfüggvényük is integrálható V-n, és*

$$\int_V (f+g)dV = \int_V f dV + \int_V g dV.$$

Tétel 4.2.3 *Ha az f függvény integrálható a V tartományon, akkor f integrálható V minden résztartományán.*

Tétel 4.2.4 *Ha az f függvény integrálható a V tartományon, V_1 és V_2 pedig a V-nek két közös belső pont nélküli résztartománya, akkor*

$$\int_{V_1} f dV_1 + \int_{V_2} f dV_2 = \int_{V_1\cup V_2} f d(V_1 \cup V_2).$$

Tétel 4.2.5 *(Az integrál korlátjairól szóló tétel) Ha a V tartományon integrálható f függvénynek m egy alsó, M egy felső korlátja, akkor*

$$m\Delta V \leq \int_V f dV \leq M\Delta V.$$

Bizonyítás. Az f függvényhez, a V tartomány tetszőleges $V_1, \ldots, V_n$ beosztásához és ezen beosztás tetszőleges $P_1, \ldots, P_n$ reprezentánsrendszeréhez tartozó I_n integrálközelítő összegre

$$m\Delta V = m\sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{n=1}^{n} m\Delta V_i \leq \sum_{n=1}^{n} f(P_i)\Delta V_i = I_n$$

és

$$I_n \leq \sum_{n=1}^{n} M\Delta V_i = M\sum_{n=1}^{n} \Delta V_i = M\Delta V$$

teljesül. Így

$$m\Delta V \leq I_n \leq M\Delta V.$$

Ebből már következik, hogy ha az f függvény integrálható a V tartományon, akkor az f függvényhez és a V tartomány bármely minden határon túl finomodó beosztássorozatához tartozó integrálközelítő összegek I_n sorozatának határértékére, azaz az $\int_V f dV$ integrálra teljesül a tétel állítása, azaz

$$m\Delta V \leq \int_V f dV \leq M\Delta V.$$

□

Tétel 4.2.6 *Ha az f függvény folytonos a V tartományon, akkor f integrálható is V-n.*

Tétel 4.2.7 *(Az integrál-középértéktétel) Ha az f függvény folytonos a V tartományon, akkor van V-nek olyan P_0 pontja, amelyre*

$$\int_V f dV = f(P_0)\Delta V$$

teljesül.

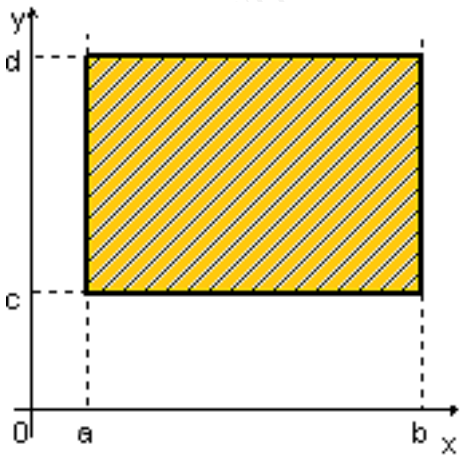
Nagy Attila

5. fejezet

TÖBBVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK V.

5.1. A kettős integrál kiszámítása

5.1.1. Kettős integrál téglalap alakú tartományon



5.1. ábra. V: téglalap

Tétel 5.1.1 *Ha a kétváltozós valós $f(x,y)$ függvény folytonos az 6.3. ábra szerinti $V = \{(x,y) | a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$ téglalapon, akkor f integrálható*

V-n, és

$$\int_V f dV = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\ dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\ dx \right) dy.$$

Megjegyzés 5.1.2 Ha a kétváltozós valós $f(x,y)$ függvény felírható az $[a,b]$ intervallumon folytonos $h(x)$ és a $[c,d]$ intervallumon folytonos $g(y)$ függvények szorzataként, akkor az 6.3. ábra szerinti téglalap alakú V tartományon vett kettős integráljára

$$\int_V f dV = \left(\int_a^b h(x)dx \right) \left(\int_c^d g(y)dy \right)$$

érvényes.

5.1.2. Kettős integrál x-re nézve normál tartományon

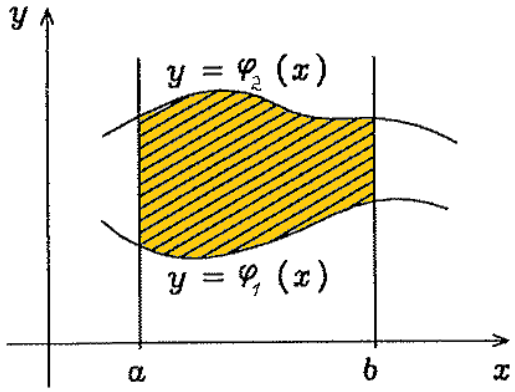
Definíció 5.1.3 *Az xy-sík egy V tartományát x-re nézve normál tartománynak nevezzük (lásd az 5.2. ábrát), ha az x-tengelyre eső vetülete egy $[a,b]$ zárt intervallum, továbbá megadhatók az $[a,b]$ intervallumon folytonos $\varphi_1(x)$ és $\varphi_2(x)$ függvények úgy, hogy minden $[a,b]$-beli x-re $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ teljesül és*

$$V = \{(x,y) | a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}.$$

Tétel 5.1.4 *Ha a kétváltozós valós $f(x,y)$ függvény folytonos az 5.2. ábra szerinti, x-ra nézve normál V tartományon, akkor f integrálható V-n, és*

$$\int_V f dV = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\ dy \right) dx.$$

Példa 5.1.5 Számítsuk ki az $f(x,y) = x + y$ függvény (kettős) integrálját a 5.3. ábra szerinti V tartományon!



5.2. ábra. V: x-re nézve normál tartomány

Megoldás. A tartomány x-re nézve normál tartomány ($a = -1$, $b = 2$, $\varphi_1(x) = x^2$, $\varphi_2(x) = x + 2$). Így az előző tétel alapján:

$$\int_V f dV = \int_{-1}^{2} \int_{x^2}^{x+2} (x+y) dy dx = \int_{-1}^{2} \left(\left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^{x+2} \right) dx =$$

$$= \int_{-1}^{2} \left(-\frac{1}{2}x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 4x + 2 \right) dx =$$

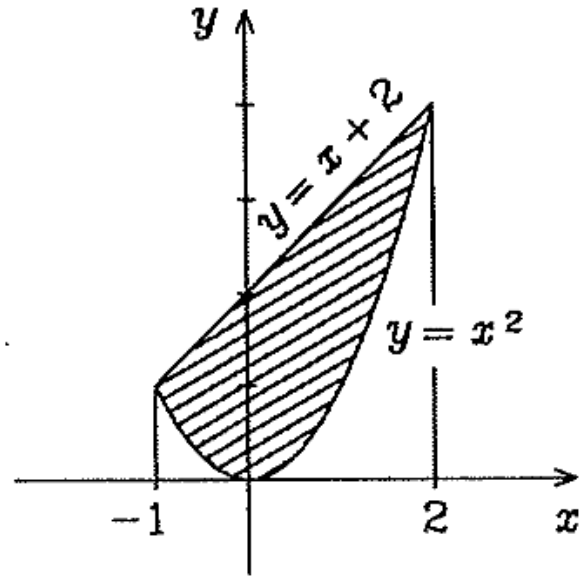
$$\left[-\frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + 2x^2 + 2x \right]_{-1}^{2} = \frac{74}{10}.$$

Nagy Attila

5.1.3. Kettős integrál y-ra nézve normál tartományon

Definíció 5.1.6 *Az xy-sík egy V tartományát y-ra nézve normál tartománynak nevezzük (lásd a 5.4. ábrát), ha az y-tengelyre eső vetülete egy $[c, d]$ zárt intervallum, továbbá megadhatók a $[c, d]$ intervallumon folytonos $\psi_1(y)$ és $\psi_2(y)$ függvények úgy, hogy minden $[c, d]$-beli x-re $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ teljesül és*

$$V = \{(x, y) | c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}.$$



5.3. ábra.

Tétel 5.1.7 *Ha a kétváltozós valós $f(x,y)$ függvény folytonos a 5.4. ábra szerinti, y-re nézve normál V tartományon, akkor f integrálható V-n, és*

$$\int_V f dV = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\, dx \right) dy.$$

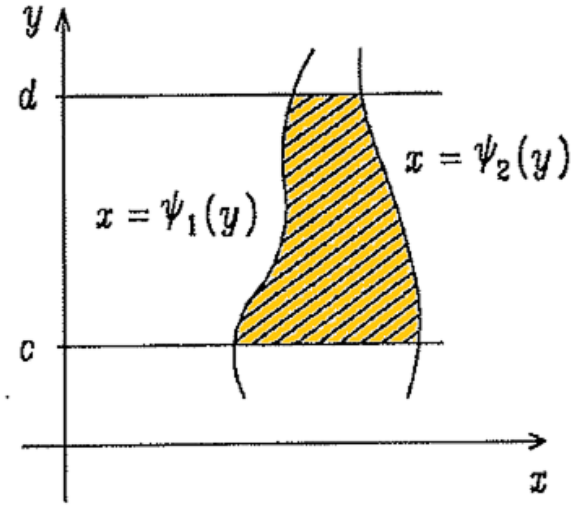
Példa 5.1.8 Számítsuk ki az $f(x,y) = 2x\frac{\sin \pi y}{y}$ függvény (kettős) integrálját az 5.5. ábra szerinti V tartományon!

Az ábra szerinti tartomány x-re nézve normál tartomány, így

$$\int_V f dV = \int_0^{\sqrt{2}} \int_{x^2}^{2} 2x\frac{\sin \pi y}{y} dy dx.$$

Mivel a $\frac{\sin \pi y}{y}$ függvénynek nincs elemi primitív függvénye, ezért a megoldás folytatása nehézségekbe ütközik. A V tartomány viszont y-ra nézve is normál tartomány, így az előző tétel szerint

$$\int_V f dV = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{y}} 2x\frac{\sin \pi y}{y} dx dy = \int_0^2 \left[x^2 \frac{\sin \pi y}{y} \right]_0^{\sqrt{y}} dy =$$



5.4. ábra. V: y-ra nézve normál tartomány

$$= \int_0^2 \sin \pi y \; dy = \left[\frac{-\cos \pi y}{\pi} \right]_0^2 = \frac{1}{\pi} \left(-\cos 2\pi + \cos 0 \right) = 0.$$

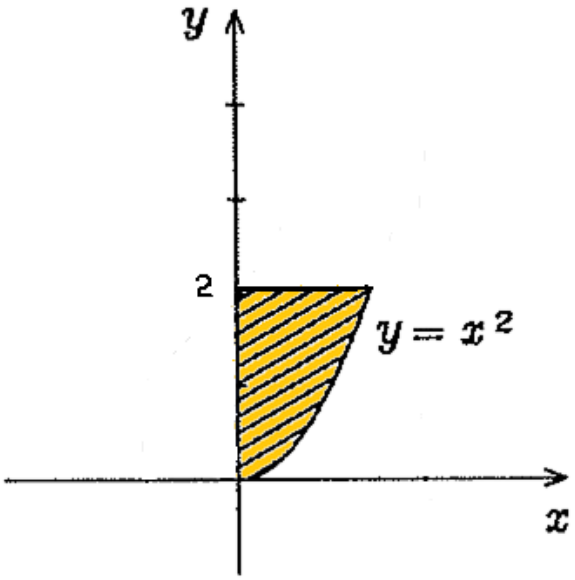
5.2. A hármas integrál kiszámítása

5.2.1. Hármas integrál téglatest alakú tartományon

Tétel 5.2.1 *Ha a háromváltozós valós $f(x, y, z)$ függvény folytonos a 5.6. ábra szerinti $V = \{(x, y, z) | a \leq x \leq b, \; c \leq y \leq d, \; e \leq z \leq g\}$ téglatesten, akkor f integrálható V-n, és*

$$\int_V f dV = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^g f(x, y) \; dz \right) \; dy \right) \; dx.$$

Megjegyzés 5.2.2 Az előző tételben szereplő egyenlőség fennáll akkor is, ha annak jobb oldalán az x, az y és a z szerinti integrálás tetszőleges sorrendben



5.5. ábra.

szerepel. Például:

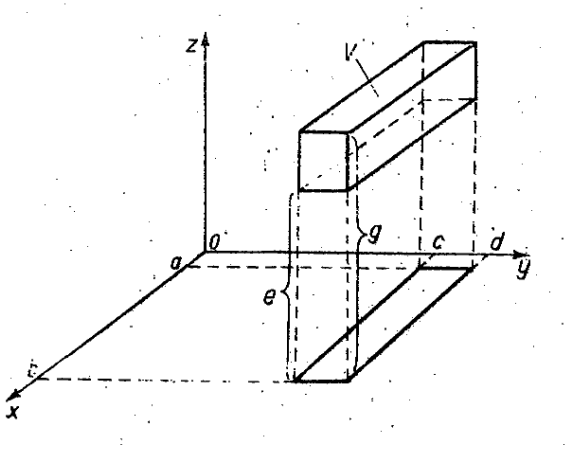
$$\int_V f dV = \int_c^d \left(\int_a^b \left(\int_e^g f(x,y)\ dz \right)\ dx \right)\ dy =$$
$$\int_e^g \left(\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\ dy \right)\ dx \right)\ dz...$$

Megjegyzés 5.2.3 Ha a háromváltozós valós $f(x,y,z)$ függvény felírható az $[a,b]$ intervallumon folytonos $r(x)$, a $[c,d]$ intervallumon folytonos $t(y)$ és az $[e,g]$ intervallumon folytonos $s(z)$ függvények szorzataként, akkor a 5.6. ábra szerinti V zárt téglatesten vett kettős integráljára

$$\int_V f dV = \left(\int_a^b r(x)dx \right) \left(\int_c^d t(y)dy \right) \left(\int_e^g s(z)dz \right)$$

érvényes.

5.2.2. Hármas integrál normál tartományon



5.6. ábra. V: téglatest

Definíció 5.2.4 *A tér egy V tartományát normál tartománynak nevezzük, ha valamelyik koordinátasíkra eső V' merőleges vetülete abban a koordinátasíkban normál tartomány, és megadhatók olyan V'-n folytonos kétváltozós valós függvények, melyek grafikonja V'-n "alulról" és "felülről" határolja V-t.*

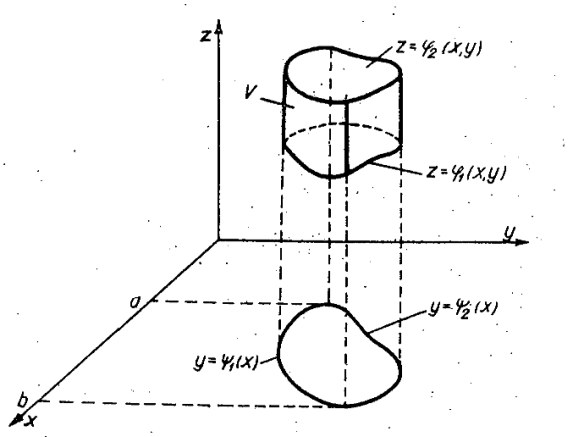
Ilyen esetet szemléltet a 5.7. ábra, ahol a térbeli V tartomány xy-sikra eső V' vetülete x-re nézve normál tartomány, és V-t alulról a $\varphi_1(x,y)$, felülről a $\varphi_2(x,y)$ függvények grafikonja határolja (mivel minden $(x,y) \in V'$ pontra $\varphi_1(x,y) \leq \varphi_2(x,y)$), továbbá

$$V = \{(x,y,z) | a \leq x \leq b,\ \psi_1(x) \leq y \leq \psi_2(x),\ \varphi_1(x,y) \leq z \leq \varphi_2(x,y)\}.$$

Erre az esetre fogalmazunk meg egy tételt, de a többi esetben is hasonló tételek érvényesek.

Tétel 5.2.5 *Ha a háromváltozós valós $f(x,y,z)$ függvény folytonos a 5.7. ábra szerinti normál V tartományon, akkor f integrálható V-n, és*

$$\int_V f dV = \int_a^b \left(\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} \left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\ dz \right)\ dy \right) dx.$$



5.7. ábra. Térbeli normál tartomány

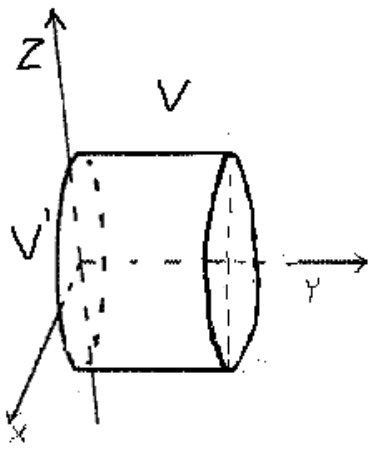
Példa 5.2.6 *Számítsa ki az* $f(x,y,z)=xyz$ *függvény integrálját az* $x^2+z^2=1$, *az* $y=0$ *és az* $y=1$ *egyenletű felületek által határolt zárt* V *tartományon!*
Megoldás. *A* V *tartomány olyan henger, melynek tengelye az* y*-tengely, alsó határoló lapja az* $y=0$ *síkban (azaz az* xz*-síkban), felső határoló lapja az* $y=1$ *egyenletű síkban levő,* 1 *sugarú kör (lásd a 5.8. ábrát).*

A V *tartomány normál tartomány, mert az* xz*-síkra eső* V' *merőleges vetülete egy origó középpontú kör (amely* x*-re és* z*-re nézve is normál tartomány) és* V*-t* V' *felett (azaz, az ábra szerint, balról is és jobbról is) egy-egy síkrész határolja (ezek* V' *felett folytonos függvények grafikonjai). Így*

$$\int_V xyz\ dV=\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\left(\int_0^1 xyz\ dy\right)\ dz\right)\ dx=$$

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\left[xz\frac{y^2}{2}\right]_0^1\ dz\right)\ dx=$$

$$\int_{-1}^{1}\left[x\frac{z^2}{4}\right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_{-1}^{1}0\ dx=0.$$



5.8. ábra.

Nagy Attila

6. fejezet

TÖBBVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK VI

Mint azt a korábbi tanulmányaikból tudják, az egyváltozós valós függvények integrálásánál sok esetben megkönnyítette a feladat megoldását a helyettesítéssel való integrálás módszerének alkalmazása. Ennek az a lényege, hogy egy I intervallumon integrálandó $f(x)$ függvény x változóját kifejezzük egy új t változó olyan J intervallumon differenciálható $x(t)$ függvényeként, amely kölcsönösen egyértelmű kapcsolatot létesít a J és az I intervallum pontjai között. Megmutatható, hogy ekkor az $f(x)$ függvény I intervallum feletti integrálja megegyezik az $f(x(t))x'(t)$ függvény J intervallum feletti integráljával. Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy a kettős és a hármas integrál kiszámítását is megkönnyítheti, ha az integrálandó függvény változóit új változókkal fejezzük ki. Ezt az eljárást a kettős és a hármas integrál transzformációjának nevezzük.

6.1. A kettős integrál transzformációja

Legyen $f(x, y)$ az xy-sík V tartományán integrálható kétváltozós valós függvény. Fejezzük ki az x és y változókat valamely u és v változókkal:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v). \tag{6.1}$$

Jelölje W az uv-sík azon tartományát, amelynek az (6.1) transzformáció szerinti képe V, azaz

$$W = \{(u, v) | (x(u, v), y(u, v)) \in V\}.$$

Tegyük fel, hogy az (6.1) transzformáció olyan, hogy W különböző belső pontjaihoz V különböző pontjait rendeli. Tegyük fel azt is, hogy az $x(u,v)$ és $y(u,v)$ függvények mindkét változó szerinti parciális deriváltjai folytonosak a W tartományon. A következő tétel megmutatja, hogy a felsorolt feltételek teljesülése esetén milyen képlettel lehet kifejezni az $\int_V f(x,y)dV$ kettős integrált.

Tétel 6.1.1 *Legyen V az xy-síkbeli derékszögű koordinátarendszerben megadott tartomány, $f(x,y)$ a V-n integrálható függvény, $x = x(u,v)$ és $y = y(u,v)$ pedig a V tartomány és az (u,v) számpárok bizonyos W tartománya között olyan leképezés, amely a W különböző belső pontjaihoz a V különböző pontjait rendeli. Ha az $x = x(u,v)$ és $y = y(u,v)$ függvények parciális deriváltjai folytonosak a W tartományon, akkor az f függvény V tartományon vett kettős integrálja kifejezhető a következőképpen:*

$$\int\int_V f(x,y)dxdy = \int\int_W f(x(u,v),y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \, dudv,$$

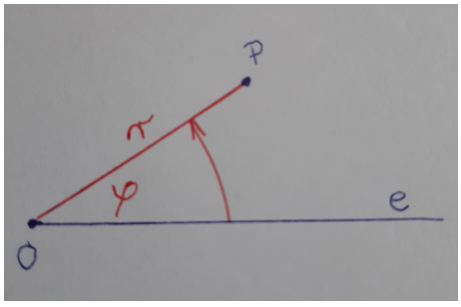
ahol

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

az $x = x(u,v),\ y = y(u,v)$ transzformáció un. Jacobi-determinánsa.

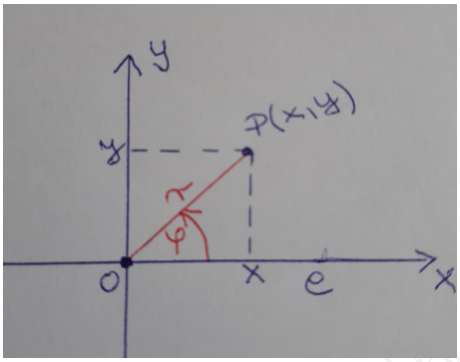
Nagy Attila

6.1.1. Transzformálás síkbeli polárkoordináta-rendszerre



6.1. ábra. Polárkoordináta-rendszer

Egy síkbeli polárkoordináta-rendszer alapeleme a sík egy e félegyenese; ezt a félegyenest polártengelynek, az e félegyenes O kezdőpontját pólusnak nevezzük. Az S sík tetszőleges, de O-tól különböző P pontjának helyzetét két koordináta adja meg: az $r = \left|\overrightarrow{OP}\right|$ un pólustávolság és a $\varphi = (e, \overrightarrow{OP})_{\angle}$ irányított szög.



6.2. ábra. Polárkoordináták és derékszögű koordináták kapcsolata

Legyen S az xy-koodinátasík, és legyen e ebben az a félegyenes, amely az x-tengely nemnegativ fele. Ekkor tetszőleges S-beli, az xy-koordináta-rendszer O origójától különböző P pont (x, y) derékszögű koordinátái és (r, φ) polárkoordinátái között az alábbi összefüggés írható fel:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi. \tag{6.2}$$

Mivel

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r,$$

ezért a Jacobi-determináns abszolút értéke r.

Példa 6.1.2 Számítsuk ki az $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ függvény kettős integrálját az xy-sík origó középpontú, 2 sugarú V körlapján!
Megoldás. Alkalmazzuk a síkbeli polárkoordinátákra való áttérésnek megfelelő transzformációt, azaz vezessük be új változóként a sikbeli polárkoordinátákat:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Itt a V tartománynak megfelő W tartomány az $r\varphi$-síkban lévő

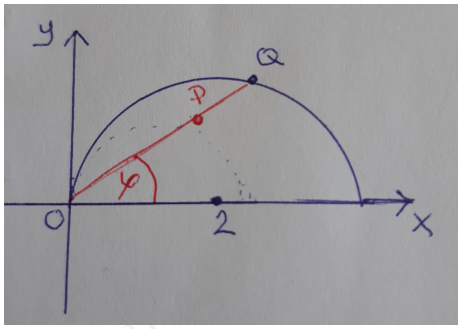
$$W = \{(r, \varphi) | 0 \le r \le 2,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$$

téglalap alakú tartomány, a transzfrormáció Jacobi-determinánsának abszolút értéke pedig r. Így

$$\int\int_V \sqrt{x^2+y^2}dxdy = \int\int_W r\sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}\; drd\varphi =$$

$$= \int_0^2\int_0^{2\pi} r^2\; d\varphi dr = \int_0^2 \left[r^2\varphi\right]_0^{2\pi} = \int_0^2 (2\pi r^2)dr = \left[\frac{2}{3}\pi r^3\right]_0^2 = \frac{16}{3}\pi.$$

Példa 6.1.3 Számítsuk ki az $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ függvény kettős integrálját az xy-sík $(2,0)$ középpontú, 2 sugarú kör x-tengely feletti V félkörén!



6.3. ábra.

Megoldás: Ismét a síkbeli polárkoordinátákra való áttérésnek megfelelő transzformációt alkalmazhatjuk.:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Itt a V tartománynak megfelő W tartomány az $r\varphi$-síkban lévő

$$W = \{(r,\varphi)|0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le r \le 4\cos\varphi\}.$$

Így

$$\int_V \sqrt{x^2+y^2}dV = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{4\cos\varphi} r^2 dr\right) d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{4\cos\varphi} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{64}{3}\cos^3\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{64}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi(1-\sin^2\varphi)d\varphi = \frac{64}{3}\left[\sin\varphi - \frac{1}{3}\sin^3\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{64}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{128}{9}.$$

6.2. A hármas integrál transzformációja

Tétel 6.2.1 *Legyen V a térbeli xyz derékszögű koordinátarendszerben megadott tartomány, $f(x,y,z)$ a V-n integrálható függvény, $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$ és $z = z(u,v,w)$ pedig a V tartomány és az (u,v,w) számhármasok bizonyos W tartománya között olyan leképezés, amely a W különböző belső pontjaihoz a V különböző pontjait rendeli. Ha az $x = x(u,v,w)$, az $y = y(u,v,w)$ és a $z = z(u,v,w)$ függvények parciális deriváltjai folytonosak a W tartományon, akkor az f függvény V tartományon vett kettős integrálja kifejezhető a következőképpen:*

$$\int\int\int_V f(x,y,z)\ dxdydz =$$

$$= \int\int\int_W f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)) \left|\frac{\partial(x,yz)}{\partial(u,v,w)}\right|\ dudvdw,$$

ahol

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Nagy Attila

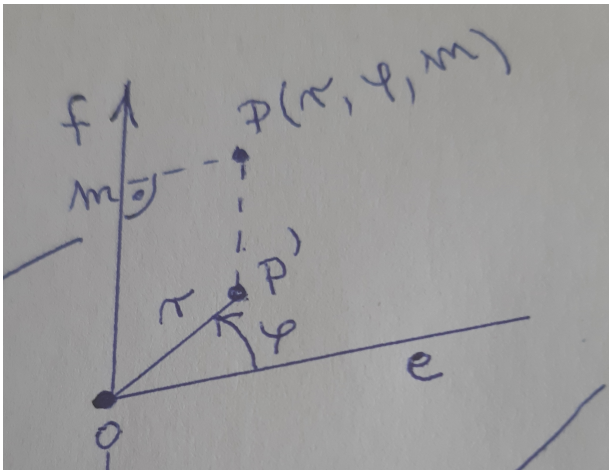
A tételben szereplő

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

determinánst az $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$, $z = z(u,v,w)$ transzformáció Jacobi-determinánsának nevezzük.

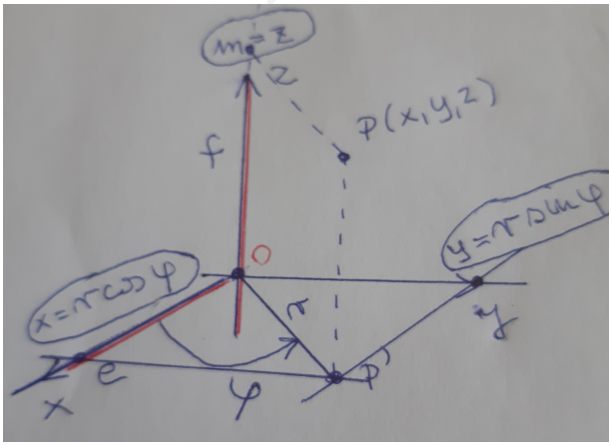
6.2.1. Transzformálás hengerkoordináta-rendszerre

Egy térbeli polárkoordináta-rendszer alapelemei: egy S sikbeli (az un. alapsikbeli) polárkoordináta-rendszer (e polártengellyel és O pólussal) és az e polártengely kezdőpontján áthaladó, az S sikra merőleges olyan f számegyenes, melyen a 0-nak megfelelő pont az O pont. A tér tetszőleges, de O-tól különböző P pontjának helyzetét három koordináta adja meg: a P pontnak az f számegyenesre eső m merőleges vetülete, a P pont S sikra eső P'



6.4. ábra.

merőleges vetületének r és φ sikbeli polárkoordinátái (a φ polárszög megállapításánál a pozitívnak tekintett irányítás az, amely az f irányából szemben ránézve az S sikra, az óramutató járásával ellentétes).



6.5. ábra.

Vegyük fel a hengerkoordináta-rendszer alapelemeit egy térbeli derékszögű koordináta-rendszerben úgy, hogy a hengerkoordináta-rendszer pólusa essék egybe a derékszögű koordináta-rendszer origójával, polártengelye pedig az x-tengely nemnegatív felével. Az f számegyenes pedig legyen a z-tengely. Ekkor a tér tetszőleges, az O ponttól különböző pont P pont (x, y, z) derék-

szögű koordinátái és (r, φ, m) hengerkoordinátái között az alábbi összefüggés írható fel:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \ z = m,$$

ahol

$$0 \le r, \ 0 \le \varphi \le 2\pi, \ m \in (-\infty, \infty).$$

Nem részletezzük, de igen egyszerűen megmutatható, hogy ezen transzformáció Jacobi determinánsának abszolút értéke r.

Példa 6.2.2 Számítsuk ki az $f(x, y) = x^2 + y^2 + z^2$ függvény kettős integrálját azon a henger alakú V tartományon, melynek tengelye a z-tengely, alaplapja az xy-sikban, fedőlapja a $z = 1$ egyenletű sikban lévő, 2 sugarú körlap!
Megoldás. Alkalmazzuk a hengerkoordinátákra való áttérésnek megfelelő transzformációt, azaz vezessük be új változóként a hengerkordinátákat:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = m$$

Itt a V tartománynak megfelő W tartomány az $r\varphi m$-síkban lévő

$$W = \{(r, \varphi, m) | 0 \le r \le 2, \ 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le m \le 1\}$$

téglatest, a transzfrormáció Jacobi-determinánsának abszolút értéke pedig r. Így

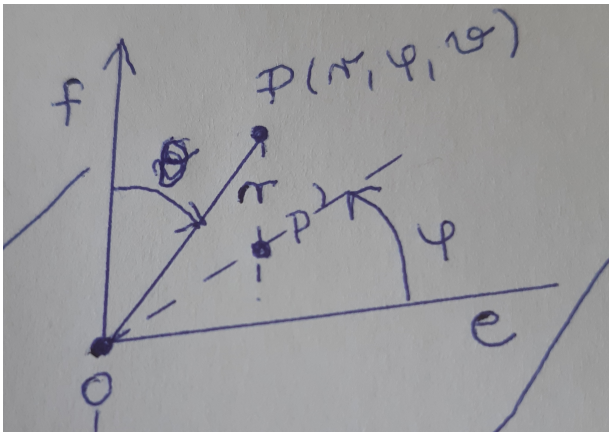
$$\int\int\int_V (x^2+y^2+z^2)\, dxdydz = \int\int\int_W r(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi + m^2)\, dr d\varphi dm =$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^3 + rm^2)\, dm d\varphi dr = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left[r^3 m + \frac{rm^3}{3}\right]_0^1 f\varphi dr =$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} (r^3 + \frac{r}{3})\, d\varphi dr = \int_0^2 2\pi(r^3 + \frac{r}{3})\, dr = \frac{5\pi}{6}.$$

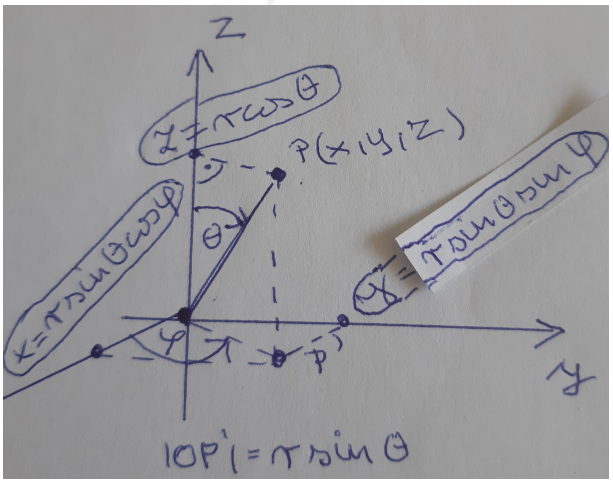
6.2.2. Transzformálás térbeli polárkoordináta-rendszerre

A térbeli polárkoordináta-rendszer alapelemei: egy S sík, abban egy O pólusú, e polártengelyű síkbeli polárkoordináta-rendszer, továbbá az S sikra megőleges, O kezdőpontú olyan f félegyenes, melynek pontjaiból az S síkbeli



6.6. ábra.

pozitív forgásirány az óramutató járásával ellentétesnek látszik. A tér tetszőleges, de O-tól különböző pontjának helyzetét három koordináta adja meg: az $\overrightarrow{OP}$ vektornak az f félegyenessel bezárt θ szöge, az $r = d(O, P)$ távolság és a P pont S-re eső P' merőleges vetületének φ polárszöge.



6.7. ábra.

Vegyük fel a térbeli polárkoordináta-rendsze alapelemeit egy térbeli derékszögű koordináta-rendszerben úgy, hogy a hengerkoordináta-rendszer pólusa essék egybe a derékszögű koordináta-rendszer origójával, polártengelye pedig az x-tengely nemnegatív felével. Az f félegyenes pedig legyen a z-tengely

nemnegatív fele. Ekkor a tér tetszőleges, az O ponttól különböző pont P pont (x, y, z) derékszögű koordinátái és (r, φ, θ) hengerkoordinátái között az alábbi összefüggés írható fel:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta,$$

ahol

$$0 \le r, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \theta \le \pi.$$

Tétel 6.2.3 *A térbeli polárkoordinátákra való áttérés Jacobi-determinánsának abszolút értéke* $r^2\sin\theta$.

Bizonyítás. Mivel $x = r\sin\theta\cos\varphi$, ezért

$$x'_r = \sin\theta\cos\varphi, \quad x'_\varphi = -r\sin\theta\cos\varphi, \quad x'_\theta = r\cos\theta\cos\varphi.$$

Mivel $y = r\sin\theta\sin\varphi$, ezért

$$y'_r = \sin\theta\sin\varphi, \quad y'_\varphi = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y'_\theta = r\cos\theta\sin\varphi.$$

Mivel $z = r\cos\theta$, ezért

$$z'_r = \cos\theta, \quad z'_\varphi = 0, \quad z'_\theta = -r\sin\theta.$$

Így a J Jacobi-determinánsra a következő adódik:

$$J = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi & x'_\theta \\ y'_r & y'_\varphi & y'_\theta \\ z'_r & z'_\varphi & z'_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{vmatrix}.$$

Ha ezt a determinánst a harmadik sora szerint kifejtjük, akkor a következőt kapjuk:

$$J = \cos\theta \begin{vmatrix} -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \end{vmatrix} - r\sin\theta \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix}.$$

Mivel

$$\begin{vmatrix} -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \end{vmatrix} = -r^2\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi - r^2\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi =$$

Nagy Attila

$$= -r^2 \sin\theta \cos\theta (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = -r^2 \sin\theta \cos\theta$$

és

$$\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} = r\sin^2\theta\cos^2\varphi + r\sin^2\theta\sin^2\varphi =$$

$$= r\sin^2\theta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r\sin^2\theta,$$

ezért

$$J = -r^2\sin\theta\cos^2\theta - r^2\sin^3\theta = -r^2\sin\theta(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = -r^2\sin\theta,$$

melynek abszolút értéke $r^2\sin\theta$, mivel $\sin\theta \geq 0$ a $0 \leq \theta \leq \pi$ feltétel miatt. □

Példa 6.2.4 A hármas integrál alkalmazásával adjuk meg a R sugarú gömb térfogatát.

Megoldás. Tegyük fel, hogy a vizsgált gömb úgy helyezkedik el, hogy középpontja egy rögzített derékszögű koordináta-rendszer origójában van. A gömb térfogatát megkaphatjuk, ha az azonosan 1 függvényt integráljuk ezen az origó középpontú R sugarú V gömbön:

$$\int_V 1 dV.$$

Alkalmazzuk a térbeli polárkoordinátákra való áttérést, azaz tekintsük az

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta$$

függvénytranszformációt. Jelen esetben

$$0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

A Jacobi-determináns abszolút értéke $r^2\sin\theta$. Így

$$\int_V 1 dV = \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} r^2 \sin\theta d\theta \right) d\varphi \right) dr =$$

$$\left(\int_0^R r^2 dr \right) \left(\int_0^{2\pi} 1 d\varphi \right) \left(\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \right) =$$

$$\left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R [\varphi]_0^{2\pi} [-\cos\theta]_0^{\pi} = \frac{R^3}{3} \cdot 2\pi \cdot 2 = \frac{4R^3\pi}{3}.$$