10. fejezet

Egyváltozós valós elemi függvények

Racionális függvények

D 10.1 *Valós [komplex] együtthatós n-edfokú* **racionális egész függvény***en, más néven* **polinomfüggvény***en olyan,*

$$f(x) := a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n, \quad a_0 \neq 0,\ n \in \mathbf{N}$$

alakú függvényt értünk, amelyben az $a_0, \ldots, a_n$ együtthatók adott valós [komplex] számok, x értéke pedig tetszőleges valós [komplex] értéket felvehet. Az n számot f **fokszám***ának nevezzük, és f^*-gal jelöljük. A zérusfüggvény foka $-\infty$. Az a_0 együtthatót a polinom* **főegyütthatójá***nak nevezzük.* **Racionális függvény***en két polinomfüggvény hányadosát értjük, amit* **racionális törtfüggvény***nek hívunk, ha a nevező nem konstansfüggvény.*

D 10.2 *Az f polinomfüggvény g polinomfüggvénnyel való* **maradékos osztás***án olyan q és r polinomfüggvények meghatározását értjük, amelyekkel $f = gq + r$, és $r^* < g^*$. (E maradékos osztás egyértelműen elvégezhető, ha g nem a zérusfüggvény.)*

T 10.3 *Az egyváltozós valós (vagy komplex) f polinomfüggvénynek az $(x - c)$ elsőfokú polinomfüggvénnyel való maradékos osztásának maradéka az $f(c)$ értékű konstansfüggvény.*

T 10.4 Polinomfüggvény gyöktényezős alakja: *Minden valós vagy komplex együtthatós nemkonstans egyváltozós n-edfokú f polinomfüggvényhez találhatók olyan $c_1, c_2, \ldots, c_s \in \mathbf{C}$, $(s \leq n)$, és $k_1, k_2, \ldots, k_s \in \mathbf{N}^+$ számok, hogy minden x-re*

$$f(x) = a_0(x - c_1)^{k_1}(x - c_2)^{k_2} \ldots (x - c_s)^{k_s},$$

ahol a_0 az f polinom főegyütthatója, és $k_1 + k_2 + \ldots + k_s = n$. (A c_j $(j = 1, 2, \ldots, s)$ számot az f polinom k_j-szeres **zérushelyének** *nevezzük.) Ha f minden együtthatója valós, és a nemvalós c_j $(j = 1, 2, \ldots, s)$ szám k_j-szeres zérushely, akkor van olyan c_l $(l = 1, 2, \ldots, s; l \neq j)$, hogy $c_l = \overline{c_j}$ és $k_l = k_j$.*

T 10.5 Valós polinomfüggvény valós gyöktényezős alakja: *Ha a valós együtthatós f polinomfüggvény valós zérushelyei $c_1,\ c_2, \ldots,\ c_r$, akkor f felírható*

$$f(x) = (x - c_1)^{k_1}(x - c_2)^{k_2} \ldots (x - c_r)^{k_r} p(x)$$

alakban, ahol $k_1, k_2, \ldots, k_r \in \mathbf{N}^+$, és p olyan valós együtthatós polinom, amelynek nincs valós zérushelye.

T 10.6 Valós együtthatós polinomfüggvény valós szorzatalakja: *Minden valós együtthatós polinomfüggvény felírható elsőfokú és negatív diszkriminánsú másodfokú polinomfüggvények szorzataként.*

P 10.7 Horner módszer. *Egy polinom helyettesítési értéke kiszámítható az alábbi zárójelezést felhasználva is:*

$$f(c) = a_0c^n + a_1c^{n-1} + \cdots + a_{n-1}c + a_n = (\ldots((a_0c + a_1)c + a_2)c + \cdots + a_{n-1})c + a_n.$$

A kiszámított a_0, a_0c+a_1, $(a_0c+a_1)c+a_2$,... részeredmények az $f(x) : (x-c)$ maradékos osztás hányadosának együtthatóit adják. Az eljárást az ú. n. Horner-sémában ábrázoljuk. Ez például az $f(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ polinomfüggvénnyel felírva a következő:

	a_0	a_1	a_2	a_3
c	a_0	$a_0c + a_1$	$(a_0c + a_1)c + a_2$	$((a_0c + a_1)c + a_2)c + a_3$

ahol tehát $f(c) = ((a_0c + a_1)c + a_2)c + a_3$, és

$$\frac{f(x)}{x-c} = a_0x^2 + (a_0c + a_1)x + ((a_0c + a_1)c + a_2) + \frac{f(c)}{x-c}.$$

T 10.8 Rolle gyöktétele. *Egészegyütthatós polinomfüggvénynek csak olyan racionális zérushelye lehet, amelynek nem egyszerüsíthető alakjában a számláló a polinom konstans tagjának, a nevező a legmagasabb fokú tag együtthatójának osztója. Ha egy egészegyütthatós polinomfüggvény főegyütthatója 1, akkor annak minden racionális zérushelye egész szám.*

Feladatok

Végezzük el az alábbi f polinomnak a g polinommal való maradékos osztását, azaz határozzuk meg a q hányadost és az r maradékot!

1.• $f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 4x - 2,\ g(x) = x^2 + 3x + 1,$

2. $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1,\ g(x) = x^4 + x^2 + 1,$

3. $f(x) = x^6 - x^5 + x^2 + 2x + 3,\ g(x) = x^3 - x^2,$

4. $f(x) = x^{10} + 2x^9 - x^3 - 2x^2 + 8x + 3,\ g(x) = x^8 - x + 3,$

5. $f(z) = z^3 + 2iz^2 + 3z + 6i,\ g(z) = z + i,$

6. $f(z) = z^3 + z^2 + z + 1,\ g(z) = z^2 + (1 + i)z + i,$

7. $f(x) = x^{3k} - 1,\ g(x) = x^3 - 1,$

8. $f(x) = x^{3k},\ g(x) = x^2 + x + 1,$

Írjuk fel

a) gyöktényezős alakban (**T 10.4**),
a) valós szorzatalakban (**T 10.6**),
a) valós gyöktényezős alakban (**T 10.5**) és
a) a **D 10.1** szerinti polinom alakban

azt a legkisebb fokszámú f polinomot, amelynek főegyütthatója 1, zérushelyei $c_1, c_2, \ldots, c_r$, mégpedig c_1 k_1-szeres,..., c_r pedig k_r-szeres zérushely.

9.• $c_1 = -1,\ c_2 = \frac{1}{2},\ k_1 = 2,\ k_2 = 1,$

10. $c_1 = 1,\ c_2 = -2,\ c_3 = -1,\ k_1 = 1,\ k_2 = 2,\ k_3 = 1,$

11. $c_1 = a,\ c_2 = b,\ c_3 = c,\ k_1 = k_2 = k_3 = 1,$

12. $c_1 = 1,\ c_2 = i,\ c_3 = -i,\ k_1 = k_2 = k_3 = 1,$

13. $c_1 = 1,\ c_2 = i,\ c_3 = -i,\ k_1 = 1,\ k_2 = k_3 = 2,$

14.$^\bullet$ $c_1 = 1,\ c_2 = 1 + i,\ c_3 = 1 - i,\ k_1 = 1,\ k_2 = k_3 = 2,$

15. $c_1 = -1,\ c_2 = i,\ c_3 = -i,\ c_4 = 1+i,\ c_5 = 1-i,\ k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = 1,$

16.$^\bullet$ $c_1 = i,\ c_2 = -i,\ k_1 = 2,\ k_2 = 1,$

17. $c_1 = i,\ c_2 = -i,\ k_1 = 2,\ k_2 = 3,$

18.$^\triangleright$ $c_1 = i,\ c_2 = 2 + i,\ c_3 = 2 - i,\ k_1 = k_2 = k_3 = 1.$

19.* Mutassuk meg, hogy a

$$P_n(x) = \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$$

ú. n. **Legendre-polinom** zérushelyei különbözőek, valósak és a $(-1, 1)$ intervallumba esnek. [Útmutatás: Vizsgáljuk meg az $(x^2 - 1)^n$ függvénynek és deriváltjainak zérushelyeit.]

A Horner-módszert felhasználva számítsuk ki az alábbi f polinomok helyettesítési értékét a megadott c helyen. (A kalkulátort használó feladatoknál tegyük c értékét a memóriába, és minden szorzáskor onnan hívjuk elő.)

20.$^\bullet$ $f(x) = x^6 - x^4 + 2x^3 + x - 1,\ c = -2,$

21.$^\triangleright$ $f(z) = 3z^6 - 4z^5 + (13 + 8i)z^4 + (1 - 2i)z^3 + 4z,\ c = 2i,$

22. $f(x) = 6x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1,\ c = -4.$

23.^{k} $f(x) = \sqrt{5}x^4 - 3x^3 + \sqrt{17}x^2 + 0,3939x + 2,\ c = 1,39,$

24.^{k} $f(a) = 17,39a^4 - 1,56a^3 + 0,11a^2 + a - 1,\ c = \cos 1.$

Horner-módszerrel végezzük el a megadott f polinom g-vel való maradékos osztását!

25.$^\bullet$ $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1,\ g(x) = x - 1,$

26. $f(x) = x^9 - x^7 + x^5 - x^3 + x,\ g(x) = x + 1,$

27.^{k} $f(x) = 3,11x^5 - 8,29x^3 + 5,44x^2 - 9,99;\ g(x) = x - 1,35$

28.^{k} $f(x) = x^3 \cos 1,1 - x^2 \sin 5,4 + \cos 2,1;\ g(x) = x - \operatorname{tg} 0,5$

29. $f(x) = x^5 + 2x^2 - x + 2,\ g(x) = x - i,$

30. $f(x) = x^5 + (1 + 2i)x^4 + (6 + i)x^2 + 4 + 4i,\ g(x) = x + 2 + i.$

A Horner-módszer segítségével alakítsuk át $f(x)$-et $(x - x_0)$ polinomjává!

31.$^\triangleright$ $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1,\ x_0 = -1,$

32. $f(x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2,\ x_0 = -1,$

33. $f(x) = x^5,\ x_0 = 1.$

34. Milyen a és p értékekre osztható maradék nélkül az $f(x) = x^4 + pa^2x^2 - 5a^3x + a^4$ polinom az $x - a$ polinommal?

A Rolle-féle gyöktétel alkalmazásával számítsuk ki az alábbi racionális együtthatós egyenletek racionális gyökeit, és e gyökök felhasználásával írjuk fel az egyenletek bal oldalán álló polinomot alacsonyabb fokú, racionális együtthatós polinomok szorzataként.

35.$^\bullet$ $x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x - 1 = 0,$

36. $x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x - \frac{3}{2} = 0,$

37. $x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x - 3 = 0,$

38. $x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24 = 0.$

Ábrázoljuk az alábbi polinomfüggvényeket a **T 9.26** segítségével:

39.▷ $f(x) = \frac{1}{12}x^2(x+1)(x-3)^2$, **40.** $f(x) = \frac{1}{9}x(x+2)^2(x-1)^3$,

41. $f(x) = \frac{1}{25}x(x+3)^2(x-2)^2$, **42.** $f(x) = \frac{1}{16}x^2(x-2)^2(x+1)^2(x+2)$.

Ábrázoljuk az alábbi racionális törtfüggvényeket a számláló és a nevező zérushelyeinek meghatározása, a ∞-ben, a $-\infty$-ben és a hézagpontokban vett határértékek kiszámítása segítségével:

43. $r(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$, **44.**▷ $r(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2(x+1)}$,

45.▷ $r(x) = \frac{(x-1)(x+1)^2}{x^2(x+1)}$, **46.** $r(x) = \frac{(x-1)^2(x+2)^2}{x^2(x+1)}$,

Páros és páratlan függvények, periodikus függvények

D 10.9 *Az egyváltozós (valós vagy komplex) f függvényt* **páros** *[***páratlan***] függvénynek nevezzük, ha az értelmezési tartományába eső minden x-szel együtt $-x$ is az f értelmezési tartományába tartozik, és $f(-x) = f(x)$ $[f(-x) = -f(x)]$.*

T 10.10 *Ha az egyváltozós valós f függvény értelmezési tartománya szimmetrikus a 0 pontra nézve, akkor előállítható egy páros f_1 és egy páratlan f_2 függvény összegeként, éspedig $f_1(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ és $f_2(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$.*

D 10.11 *Az egyváltozós nem konstans (valós vagy komplex) f függvényt c szerint* **periodikus***nak és a $c \neq 0$ számot az f függvény* **periódusá***nak nevezzük, ha minden $x \in \operatorname{Dom} f$ esetén $x + c \in \operatorname{Dom} f$, és $f(x+c) = f(x)$.*

T 10.12 *Ha c az egyváltozós f függvény periódusa, k pedig nullától különböző egész szám, akkor kc is periódusa f-nek. Ha f valós változós, akkor priódusai között van egy legkisebb pozitív periódus, melynek egészszámú többszörösei adják f összes periódusát.*

Feladatok

Állapítsuk meg, hogy az alábbi függvények közül melyek párosak és melyek páratlanok (l. **D 10.9**). Azokat, amelyek nem tartoznak egyik osztályba sem, bontsuk fel (**D 10.10** segítségével) egy páros és egy páratlan függvény összegére!

47. $x^{2n},\ n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, **48.** $x^{2n+1},\ n \in \mathbf{Z}$, **49.** $\sin x$,

50. $\cos x$, **51.** $\operatorname{tg} x$, **52.** $x \sin x$,

53. $x \cos x$, **54.** $x^2 - x^4$, **55.** $x + x^3$,

56. $x^2 - x$, **57.** $(x+1)\sin x$, **58.**• $|x-1|$.

Legyenek az f, f_1, f_2 függvények páros függvények, a g, g_1, g_2 függvények páratlanok egy H halmazon. Az alábbi függvények közül melyek párosak, melyek páratlanok?

59.▷ $f_1 + f_2$, **60.** $g_1 + g_2$, **61.** $f + g$,

62. $f_1 f_2$, **63.** $g_1 g_2$, **64.** fg,

65. $\dfrac{f_1}{f_2}$, **66.** $\dfrac{1}{g}$, **67.** $\dfrac{f}{g}$,

68. $f \circ g$, **69.**$^{\triangleright}$ f', **70.** g'.

Határozzuk meg az alábbi függvények közül a periodikusak legkisebb pozitív p periódusát!

71. $\sin 3x$, **72.**$^{\bullet}$ $\cos ax,\ a > 0$, **73.** $\sin ax + \cos ax,\ a > 0$,

74. $\sin^2 x$, **75.** $\sin\sqrt{x}$, **76.** $3\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \operatorname{tg}\frac{x}{3}$.

77. Mutassuk meg, hogy p szerint periodikus függvények összege, különbsége, szorzata, hányadosa vagy szintén periodikus p szerint, vagy konstans.

Trigonometrikus függvények

Feladatok

A sin, cos, tg, ctg függvények grafikonjából kiindulva függvénytranszformációk segítségével ábrázoljuk az alábbi függvényeket!

78.$^{\triangleright}$ $3\sin 2x + 1$, **79.**$^{\triangleright}$ $3\sin(2x - \frac{\pi}{3}) - 2$, **80.** $\cos kx,\ k \neq 0$,

81. $\sin\dfrac{x}{k},\ k \neq 0$, **82.** $-2\operatorname{ctg}(x + \dfrac{\pi}{2})$, **83.**$^{\triangleright}$ $a\sin(bx+c),\ a, b, c \neq 0$.

Vázoljuk fel az alábbi függvények grafikonját!

84. $\dfrac{1}{\sin x}$, **85.** $\sin\dfrac{1}{x}$, **86.** $x\sin\dfrac{1}{x}$,

87. $x^2\sin\dfrac{1}{x}$, **88.** $|\sin x|$, **89.** $\operatorname{sgn}\sin x$,

90. $\operatorname{Ent}(2\sin x)$.

Hozzuk egyszerűbb alakra az alábbi függvényeket, majd ábrázoljuk őket.

91. $\cos x\sin x(1 - 2\sin^2 x)$, **92.**$^{\triangleright}$ $\sin x + \cos x$,

93.$^{\triangleright}$ $\sqrt{3}\sin x + 2\cos x$, **94.**$^{\bullet}$ $a\sin x + b\cos x$,

95. $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$, **96.** $\dfrac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}$.

Binyonyítsuk be, hogy ha $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, akkor

97. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$,

98.$^{\triangleright}$ $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$.

Differenciáljuk az alábbi trigonometrikus függvényeket:

99. $\operatorname{tg}^2\dfrac{1}{3x}$, **100.** $\sin\sqrt{x}$, **101.** $\left(\dfrac{\sin x}{\cos 2x}\right)^3$,

102. $\sin(\cos x^2)$, **103.** $\sqrt{\sin x^2}$, **104.** $\operatorname{ctg}^3\dfrac{x}{3}$.

Arkuszfüggvények

D 10.13 *Az arkuszfüggvények a trigonometrikus függvények megadott intervallumra való leszűkítéseinek inverzei, nevezetesen:*

$$\arcsin x = y \;:\Leftrightarrow\; \sin y = x,\ \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \operatorname{arctg} x = y \;:\Leftrightarrow\; \operatorname{tg} y = x,\ \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\arccos x = y \;:\Leftrightarrow\; \cos y = x,\ [0,\pi], \quad \operatorname{arcctg} x = y \;:\Leftrightarrow\; \operatorname{ctg} y = x,\ (0,\pi).$$

T 10.14 *Az* arcsin *és az* arccos *függvények a* $(-1,1)$ *intervallumon, az* arctg *és az* arcctg *függvények az egész számegyenesen differenciálhatók. Deriváltjuk:*

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \ (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \ (\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}.$$

T 10.15 *Az arkuszfüggvényekre, értelmezési tartományuk minden* x *pontjában, fennállnak az alábbi összefüggések:*

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \qquad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Feladatok

Számítsuk ki az alábbi függvényértékeket:

105.[k] $\arccos(-0,25)$, **106.**[k] $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 200$, **107.**[k] $\operatorname{arcctg} 10$.

Kalkulátor használata nélkül számítsuk ki az alábbi függvényértékeket:

108. $\operatorname{arctg} 1$, **109.** $\operatorname{arcctg} \sqrt{3}$, **110.** $\arcsin(1/2)$,
111. $\arccos(-\sqrt{2}/2)$, **112.** $\arccos\cos 7$, **113.** $\operatorname{arctg}\operatorname{tg} 1,6$,
114. $\arcsin\sin 10$, **115.** $\arcsin\sin 13$, **116.** $\arcsin\sin(-13)$.

Határozzuk meg az alábbi függvények deriváltját és a derivált értelmezési tartományát!

117. $\arccos(1-2x)$, **118.** $\operatorname{arctg}(1-x^2)$, **119.** $\operatorname{ctg}\operatorname{arctg} x$,
120. $\arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$, **121.** $\arcsin\cos x$, **122.** $\arcsin\sqrt{1-x^2}$.

123.[▷] Mutassuk meg, hogy az alábbi függvények közül bármely kettő különbsége konstans. Határozzuk meg e konstansokat!
$\arcsin(2x-1)$, $2\arcsin\sqrt{x}$, $-2\arcsin\sqrt{1-x}$, $2\arccos\sqrt{1-x}$,
$2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{1-x}}$, $-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{x}}$, $4\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$, $-4\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}$.

124.[▷] A BASIC programozási nyelvben az ATN(x) függvény kiszámítja az $\operatorname{arctg} x$ értéket. Igazoljuk a programozási kézikönyvekben az arcsin és az arccos

függvényekre javasolt alábbi formulák helyességét:
$\arcsin x = \mathrm{ATN}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$, $\arccos x = -\mathrm{ATN}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) + 1,5707963$.

A mellékelt ábrák valamelyikét felhasználva igazoljuk az alábbi azonosságok helyességét az $x > 0$ esetben, majd az összefüggést trigonometriai átalakításokkal bizonyítsuk

minden lehetséges x-re!

125.• $\cos\arcsin x = \sin\arccos x = \sqrt{1-x^2}$,

126.▷ $\operatorname{tg}\operatorname{arcctg} x = \operatorname{ctg}\operatorname{arctg} x = \dfrac{1}{x}$,

127.▷ $\operatorname{tg}\arccos x = \operatorname{ctg}\arcsin x = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$,

128.▷ $\operatorname{tg}\arcsin x = \operatorname{ctg}\arccos x = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$,

129. $\sin\operatorname{arctg} x = \cos\operatorname{arcctg} x = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,

130. $\sin\operatorname{arcctg} x = \cos\operatorname{arctg} x = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Igazoljuk az alábbi összefüggések helyességét! Mind a négy feladatban $k \in \mathbf{Z}$.

131.• $\arcsin\sin x = \begin{cases} x + 2k\pi, & \text{ha } 2k\pi - \frac{\pi}{2} \le x \le 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \\ -x + (2k+1)\pi, & \text{ha } (2k+1)\pi - \frac{\pi}{2} \le x \le (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}, \end{cases}$

132. $\arccos\cos x = \begin{cases} x + 2k\pi, & \text{ha } 2k\pi \le x \le (2k+1)\pi, \\ -x + 2k\pi, & \text{ha } (2k-1)\pi \le x \le 2k\pi, \end{cases}$

133. $\operatorname{arctg}\operatorname{tg} x = x + k\pi$, ha $k\pi - \frac{\pi}{2} < x < k\pi + \frac{\pi}{2}$,

134. $\operatorname{arcctg}\operatorname{ctg} x = x + k\pi$, ha $k\pi < x < (k+1)\pi$.

135. Határozzuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát, értékkészletét, és rajzoljuk fel a grafikonjukat!
$\sin\arcsin$, $\cos\arccos$, $\operatorname{tg}\operatorname{arctg}$, $\operatorname{ctg}\operatorname{arcctg}$,
$\arcsin\sin$, $\arccos\cos$, $\operatorname{arctg}\operatorname{tg}$, $\operatorname{arcctg}\operatorname{ctg}$.

Kalkulátor használata nélkül — alkalmas trigonometriai azonosságok alkalmazásával — számítsuk ki az alábbi függvényértékeket:

136.▷ $\cos\left(2\arcsin(-\frac{2}{3})\right)$,

137. $\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)$,

138. $\sin\left(\arccos\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13}\right)$,

139.▷ $\cos\left(\arccos\frac{3}{5} + \arcsin\frac{12}{13}\right)$.

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket!

140. $\arcsin x = \arccos x$,

141. $\arccos x = \operatorname{arctg} x$,

142.▷ $2\arcsin x = \arccos 2x$,

143. $\operatorname{arctg}(x-1) - \operatorname{arctg}(x-2) = \pi/4$,

144. $\arcsin\sqrt{x} + \arcsin\sqrt{1-x} = \arcsin 2x$.

Számítsuk ki az alábbi határértékeket:

145.$^{\triangleright}$ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin ax}{x}$, **146.** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$, **147.**$^{\triangleright}$ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin ax}{\arcsin bx}$,

148. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} ax}{\operatorname{arctg} bx}$, **149.** $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{arctg} ax}{\operatorname{arctg} bx}$, **150.** $\displaystyle\lim_{x\to 1}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{x-1}$.

151.$^{\bullet}$ Bizonyítsuk be, hogy $\frac{-\pi}{2} < \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y < \frac{\pi}{2}$ esetén

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}.$$

Az előző feladat eredményét, valamint az $\operatorname{arctg} x < x$ (ha $x > 0$) egyenlőtlenséget felhasználva bizonyítsuk be az alábbi egyenlőségeket! (A **155.** feladatban szereplő formula segítségével számította ki π értékét 100 tizedesjegy pontossággal 1706-ban John Machin.)

152.$^{\triangleright}$ $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$, **153.** $2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$,

154. $3\operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \operatorname{arctg}\frac{5}{99} = \frac{\pi}{4}$, **155.** $4\operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$.

156.* Igazoljuk az alábbi egyenlőséget:

$$\arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{16}{65} = \frac{\pi}{2}.$$

Bizonyítsuk be az alábbi azonosságokat!

157.$^{\triangleright}$ $2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}\right) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\sqrt{x},\ x \ge 0$,

158.$^{\triangleright}$ $\displaystyle\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2+x+1} = \operatorname{arctg}\frac{1}{x} - \operatorname{arctg}\frac{1}{x+1},\ x > 0.$

159. Adjunk 'geometriai bizonyítást' az $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 =$ π egyenlőségre az alábbi ábra segítségével:

Logaritmusfüggvények

T 10.16 *Az $\log_a x$ függvény a $(0,\infty)$ intervallumon, az $\log_a |x|$ (speciálisan az $\ln|x|$) függvény pedig a 0 kivételével minden valós helyen differenciálható, és*

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a}, \quad (x > 0),$$

$$(\log_a |x|)' = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a}, \quad (x \ne 0), \quad (\ln|x|)' = \frac{1}{x}, \quad (x \ne 0).$$

D 10.17 *Ha az f függvény az értelmezési tartományán pozitív és differenciálható, akkor az $\ln f$ függvény is differenciálható, és $(\ln f)' = f'/f$. Az $\ln f$ függvény deriváltját az f függvény* **logaritmikus derivált***jának nevezzük.* **Logaritmikus deriválás***on pedig az f' függvénynek az*

$$f' = f(\ln f)'$$

képlettel való kiszámítását értjük.

Feladatok

Kalkulátor használata nélkül számítsuk ki az alábbi értékeket:

160. a) $10^{\lg 3{,}5}$, b) $\lg 10^5$, c) $e^{\ln 3}$, d) $\ln e^2$,
e) $e^{-2\ln 3}$, f) $2^{\log_4 9}$, g) $8^{\log_4 9}$,

161. a) $\lg \sqrt[3]{100}$, b) $\log_9 27$, c) $\log_{27} 9$, d) $\log_{32} 512$, e) $\log_{1/6} 36$,
f) $\log_6 \dfrac{1}{36}$, g) $\log_{1/4} \dfrac{1}{1024}$, h) $\ln \frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$, i) $\ln \sqrt[\pi]{e}$.

Határozzuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát és értékkészletét!

162. $f(x) = \log_x a,\ a \neq 1$, **163.** $f(x) = \log_x x$, **164.** $f(x) = \ln x^2$,
165.• $f(x) = \ln \sin x$, **166.** $f(x) = \ln \cos x$, **167.** $f(x) = \ln \operatorname{tg} x$,
168.• $f(x) = \ln \arcsin x$, **169.** $f(x) = \ln \arccos x$, **170.** $f(x) = \arcsin \ln x$.

Bizonyítsuk be a különböző alapú logaritmusokra vonatkozó alábbi azonosságokat! (A feladatokban szereplő konstansokra fennáll, hogy $a, b, c, a_i > 0$, de $a, b, c, a_i \neq 1$, ahol $i = 1, 2, \ldots, n$ és $n \in \mathbf{N}^+$.)

171.• $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, **172.**• $\log_a b \cdot \log_b a = 1$,

173. $\log_{a_1} a_2 \cdot \log_{a_2} a_3 \cdot \ldots \cdot \log_{a_n} a_1 = 1$, **174.** $\log_{a^n} b = \dfrac{1}{n} \log_a b$,

175. $\log_{a^n} b^n = \log_a b$, **176.** $\log_a b = -\log_{1/a} b = -\log_a \dfrac{1}{b}$,

177. $\log_{ab} c = \dfrac{1}{\frac{1}{\log_a c} + \frac{1}{\log_b c}} = \frac{\log_a c}{1+\log_a b}$, **178.** $\log_{\frac{a}{b}} c = \dfrac{1}{\frac{1}{\log_a c} - \frac{1}{\log_b c}} = \frac{\log_a c}{1-\log_a b}$,

179. $\log_{a_1 \ldots a_n} c = \dfrac{1}{\frac{1}{\log_{a_1} c} + \cdots + \frac{1}{\log_{a_n} c}}$.

Ahol jelezve van, ott kalkulátorral, ahol nincs, ott kalkulátor nélkül számítsuk ki az alábbi értékeket! Ahol szükséges, alakítsuk át a kifejezést az előző feladatokban megismert összefüggések segítségével.

180.^{k} $\ln 2$, $\lg 2$, $\ln 10$, $\lg e$, $\ln \pi$,

181.^{k} $\log_2 3$, $\log_3 2$, $\log_\pi e$, $\log_2 10$, $\log_{5,2} 3{,}8$.

182. $\dfrac{\lg 4}{1 - \lg 5}$, $\dfrac{\lg 5}{1 + \lg 0{,}5}$, $\dfrac{1}{1/\log_2 30 + 1/\log_3 30 + 1/\log_5 30}$,

183. $\log_{27} 125 \cdot \log_{625} 9$, $\log_{81} 256 \cdot \log_4 9$, $\log_4 9 \cdot \log_3 5 \cdot \log_{25} 4$,

184.* Számítsuk ki a $\lg 8$, $\lg 5$, $\lg 0,72$, $\lg \sqrt[7]{7,5}$ értékeket úgy, hogy csak a négy alapműveletet, a $\lg 2 \approx 0,30103$ és a $\lg 3 \approx 0,47712$ értékeket használjuk.

185.$^{\bullet}$ Bizonyítsuk be, hogy ha az $\ln x$ függvény grafikonját az x-tengely irányában k-szorosára nyújtjuk, ugyanazt a görbét kapjuk, mint amikor a grafikont az y-tengely irányában eltoljuk egy alkalmasan választott c számmal. Határozzuk meg c értékét k függvényében!

Milyen transzformációkkal kaphatjuk meg az alábbi függvények grafikonját az ln függvény grafikonjából?

186. $\log_2 x$, **187.** $\log_3 \frac{x^{3/2}}{9}$, **188.** $\ln \sqrt[3]{1-x}$.

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket!

189. $\log_{x+2}(3x^2 + 12x + 14) = 2$, **190.** $\ln x^2 + \ln x^8 = 10$,

191. $\log_{32}(2x) - \log_8(4x) + \log_2 x = 3$, **192.** $\log_x 8 - \log_{4x} 64 = \log_{2x} 4$.

Differenciáljuk az alábbi függvényeket!

193. $\ln(5x+1)$, **194.** $\lg \frac{x}{2} + \ln 3$, **195.** $\ln \frac{1}{x}$,

196. $\ln^2(1-2x)$, **197.** $\ln \sin x$, **198.** $\lg \cos x$,

199. $\log_3(x^2-1)$, **200.** $\frac{1}{\log_5 x}$, **201.** $x^n \ln x$.

202.$^{\bullet}$ Számítsuk ki az $\ln x$ függvény n-edik deriváltját!

203. Mutassuk meg, hogy az $y = \ln \sin x$, $(0 < x < \pi)$ függvény kielégíti az $y'' + (y')^2 = -1$ egyenletet!

204. Mutassuk meg, hogy az $y = c_1 \sin \ln x + c_2 \cos \ln x$, $(x > 0)$ függvény tetszőleges $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ együtthatókkal kielégíti az $x^2 y'' + xy' + y = 0$ egyenletet!

205. Mutassuk meg, hogy $0 < a < b$ esetén

$$\frac{1}{b} < \frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{a}.$$

206. Bizonyítsuk be, hogy $x > 1$ esetén $\ln x < 2(\sqrt{x} - 1)$.

207.^{k} Jelölje $\pi(x)$ az x számnál kisebb prímek számát. A **prímszámtétel** szerint

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \ln x}{x} = 1.$$

Becsüljük meg e tétel segítségével a 10^7-nél kisebb prímek számát.

208. A zenei hangköz nagyságát a két hang frekvenciájának hányadosával mérjük. Az oktáv hangtávolság esetén a frekvenciák hányadosa 2. Johann Sebastian Bach kora óta a "jóltemperált" zongorán az oktáv 12 egyenlő nagyságú — kisszekund nevű — hangközre van osztva (wohltemperiertes Klavier). n kisszekundnyi hangköznek milyen frekvenciahányados felel meg? Az x és y $(x > y)$ frekvenciájú hangok közti hangköz hány kisszekundból áll?

Logaritmikus deriválással (**D 10.17**) számítsuk ki az alábbi függvények deriváltját!

209.$^{\triangleright}$ $\frac{(x^2+2)(x+9)^{1/2}}{x-1}$, **210.** $(x+1)(x+2)(x+3)$, **211.** $(2x+1)(x^2+1)x^{4/5}$,

212. $\sqrt[3]{\dfrac{x(x-1)}{x^2+2}}$, **213.** $\sqrt[3]{\dfrac{x^2(x+1)}{(x-2)(x^2+2)}}$, **214.** $\dfrac{\sqrt{x+11}}{(x-7)\sqrt[3]{2x+1}}$,

215.▷ $(1+x)^{1-x}$, **216.** $(1-3x)^{\ln x}$, **217.** $\sqrt[x]{3x^2-6x+7}$.

Exponenciális függvények

T 10.18 *Az a^x, $(a>0)$ függvény az egész számegyenesen differenciálható, deriváltja*

$$(a^x)' = a^x \ln a,$$

speciálisan $(e^x)' = e^x$, és így minden nemnegatív egész r-re $(e^x)^{(r)} = e^x$. Szokás az e alapú exponenciális függvényt exp*-pel jelölni, azaz* $\exp : x \mapsto e^x$. *E jelölést használva* $\exp^{(r)} = \exp$.

Feladatok

Milyen transzformációkkal kaphatjuk meg az alábbi függvények grafikonját az exp függvény grafikonjából?

218. 2^x, **219.**▷ 5^{x+1}, **220.** $(3^{x/2-1})^3$.

221. Ha $a<0$, akkor az a^x függvény mely valós x értékekre van értelmezve?

222. Melyek azok az x_0 valós számok, amelyek megoldásai az $f(x)^{g(x)} = f(x)^{h(x)}$ alakú egyenletnek?

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán:

223. $(2x+1)^{x-3} = (2x+1)^{5-3x}$, **224.** $(x-3)^{9/x} = (x-3)^x$,

225. $(x+1)^{2x+1} = (x^2+2x+1)^{2x+1}$.

Számítsuk ki az alábbi $x \mapsto y$ függvények deriváltját!

226. $y = x^\pi$, **227.** $y = \pi^x$, **228.** $y = 2^x$,

229. $y = 2^{-x}$, **230.** $y = 2^{\operatorname{tg} x}$, **231.** $y = 5^{1/x} + 1/5^x$,

232. $y = \exp\sqrt{x} + \sqrt{\exp x}$, **233.**▷ $e^{xy} - y = 3$, **234.** $e^{y\ln x} + \ln y = 0$.

Számítsuk ki az alábbi függvények deriváltját az $a^b = e^{b\ln a}$ átalakítás segítségével!

235.▷ $(x\ln x)^x$, **236.** $x^{\sin x}$, **237.** $x^{\frac{1}{x}}$,

238. $2x^{\sqrt{3x}}$, **239.** $(1-x)^{x^2}$, **240.** $(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

241.▷ Ha az f függvény konstans, akkor $\left(f(x)^{g(x)}\right)' = f(x)^{g(x)} g'(x) \ln f(x)$; ha a g függvény konstans, akkor $\left(f(x)^{g(x)}\right)' = g(x) f(x)^{g(x)-1} f'(x)$. Mutassuk meg, hogy általában az $f(x)^{g(x)}$ függvény deriváltja az előző két eredmény összege:

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = f(x)^{g(x)} g'(x) \ln f(x) + g(x) f(x)^{g(x)-1} f'(x).$$

242.$^\triangleright$ Bizonyítsuk be, hogy $(xe^x)^{(n)} = (x+n)e^x$.

243.$^\triangleright$ Az e^{-x^2} függvény n-edik deriváltfüggvénye kifejezhető $\left(e^{-x^2}\right)^{(n)} = e^{-x^2}H_n(x)$ alakban, ahol H_n az n-edfokú **Csebisev-Hermite** polinom. Mutassuk meg, hogy H_n eleget tesz az alábbi rekurzív összefüggésnek:

$$H_{n+1}(x) + 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0, \quad (n \geq 1).$$

244.$^\bullet$ A **Stirling-formula** (ejtsd: sztő$^{\text{r}}$ling) szerint

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \exp(\frac{\hat{}_n}{12n}),$$

ahol $\hat{}_n$ egy, a $(0,1)$ intervallumba eső valós szám. Ennek felhasználásával milyen alsó és felső becslést adhatunk n!-ra?

245.^{k} Az előző feladat eredményét felhasználva, becsüljük meg 12! és 60! értékét! Az előbbit számítsuk ki pontosan is!

246.^{k} A Stirling-formulát felhasználva adjunk meg alsó és felső becslést az $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$ szorzat értékére, majd számítsuk közelítőleg az $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 99$ szorzat értékét.

Mutassuk meg, hogy a megadott függvények a velük megadott egyenletet kielégítik:

247. $f(x) = e^{mx}, \quad f(x+y) = f(x)f(y)$,

248. $f(x) = \frac{\exp(2x)-1}{\exp(2x)+1}, \quad f'(x) = 1 - f^2(x)$,

249. $y = c_1e^{ax} + c_2e^{bx}$, $c_1, c_2, a, b \in \mathbf{R}$ konstansok, $\quad y'' - (a+b)y' + aby = 0$.

250.$^\bullet$ Mutassuk meg, hogy az

$$f'(x) = kf(x)$$

(k adott konstans) egyenletnek minden $f(x) = ce^{kx}$ alakú függvény megoldása (c tetszőleges konstans), továbbá mutassuk meg, hogy más megoldása az egyenletnek nincs is. (Útmutatás: legyen $f(x)$ egy tetszőleges megoldás, és vizsgáljuk az $f(x)e^{-kx}$ függvényt.)

251.^{k} Mekkora összeg lesz egy év elteltével egy 10000 Ft értékű, 15% kamatozású betéten, ha kamatos kamattal számolunk†, és a kamatot

a) évente,
b) havonta,
c) naponta,
d) 'folyamatosan' számoljuk (ami azt jelenti, hogy évente n-szer számoljuk, és ennek vesszük a határértékét, ha $n \to \infty$)?

252.^{k} Mekkora összeg lesz E év elteltével egy A Ft értékű, K% kamatozású betéten, ha kamatos kamattal számolunk† és a kamatot az előző feladatbeli a), b), c), d) pontoknak megfelelően számítjuk?

253. Egy évi s% kamatozású betéten levő összeg hány százalékkal kamatozik, ha nem csak kamatot, hanem folyamatos kamatozással kamatos kamatot számítunk?

† *ami azt jelenti, hogy a kamatot hozzá kell adni a betét értékéhez, és legközelebb e megnövelt értékre számítunk kamatot*

254.• Egy radioaktív anyag elbomlásakor a tömeg megváltozásának sebessége az anyag tulajdonságaitól függ, de minden pillanatban arányos az anyag tömegével; legyen az arányossági tényező k. Mutassuk meg, hogy az az idő, amely alatt az anyag fele elbomlik, nem függ a tömegétől, azaz csak az anyag jellemzője — ezt nevezik **felezési idő**nek —, és ez az idő $-\ln 2/k$.

255.[k] 3 gramm 14-es szénizotópból mennyi marad meg 1000 év elteltével, ha felezési ideje 5730 év?

256. (**Kormeghatározás** 14-es szénizotóppal) Az élő szervezetekben a stabil 12-es és a radioaktív 14-es szénizotóp aránya mindaddig állandó, amíg a szervezet él. Pusztulása után azonban az 5730 év felezési idejű 14-es szénizotóp mennyisége csökken. Egy barlangban talált emberi haj csak 40%-át tartalmazza az élő emberi haj szénizotópmennyiségének. Hány éve halt meg a haj viselője?

257. Egy populáció egyedeinek számát az idő függvényében leíró függvény nem folytonos, hanem szakaszonként konstans, hisz csak egész értékeket vehet fel. Ha azonban az egyedek száma nagy, e függvény jól közelíthető egy folytonos, sőt differenciálható függvénnyel. Tegyük fel, hogy egy falu lakossága minden évben a lakosok számának 2%-ával növekszik. Mennyi idő alatt duplázódik meg a falu lélekszáma? Hány lakosa lesz a falunak 30 hónap múlva, ha ma ezren lakják?

Hiperbolikus függvények

D 10.19 *A szinusz hiperbolikusz (sh), a koszinusz hiperbolikusz (ch), a tangens hiperbolikusz (th), és a kotangens hiperbolikusz (ch) függvények definíciói:*

$$\operatorname{sh} x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \ \operatorname{ch} x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \ \operatorname{th} x := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \ \operatorname{cth} x := \frac{1}{\operatorname{th} x}.$$

T 10.20 *Az* sh, ch, th, cth *függvények egész értelmezési tartományukon differenciálhatók. Deriváltjuk:*

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \quad (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad (\operatorname{cth} x)' = \frac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Feladatok

Számítsuk ki az alábbi függvényértékeket:

258.[k] $\operatorname{sh} 1$, $\operatorname{sh}(-1)$, $\operatorname{sh} 1 + \operatorname{ch} 1$, $\operatorname{th} 1$, $\operatorname{cth} 1$,

259. $\operatorname{sh}\ln 2$, $\operatorname{ch}\ln 2$, $\operatorname{cth}(\frac{1}{2}\ln\frac{5}{3})$, $\operatorname{sh} 5 + \operatorname{ch} 5$.

Igazoljuk az alábbi azonosságokat:

260. **Paritási összefüggések**: $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$, $\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x$,

261. $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x, \quad \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x},$

262. **Összegzési képletek**: $\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y,$
$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y, \quad \operatorname{th}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y},$

263. $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x, \quad \operatorname{th} 2x = \dfrac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x},$

264.▷ **Négyzetes összefüggések**:
$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad \operatorname{th}^2 x + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1, \quad \operatorname{cth}^2 x - \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x} = 1.$

265.▷ **Linearizáló formulák**: $\operatorname{sh}^2 x = \dfrac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}$, $\operatorname{ch}^2 x = \dfrac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}$,

266. Bontsuk fel az e^x és az e^{-x} függvényeket egy páros és egy páratlan függvény összegére.

267. Mutassuk meg, hogy minden valós v számra $(\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x)^v = \operatorname{sh} vx + \operatorname{ch} vx$.

268.▷ Fejezzük ki az sh és a ch függvényeket a th segítségével!

269. Fejezzük ki $\operatorname{sh} x$-et és $\operatorname{ch} x$-et $\operatorname{th} \frac{x}{2}$ segítségével!

Differenciáljuk az alábbi függvényeket x szerint!

270. $\operatorname{ch}(3x^2 - x + 1)$, **271.** $\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 4x}$, **272.** $\operatorname{sh}(e^{3x})$,

273. $e^x \operatorname{ch} x$, **274.** $\operatorname{sh}(\cos x)$, **275.** $\operatorname{sh} 3x \operatorname{ch} 5x$.

276. Mutassuk meg, hogy az $y(x) = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} + C$, $(a \neq 0,\ C \in \mathbf{R})$ függvény kielégíti az $y'' = \frac{1}{a}\sqrt{1 + y'^2}$ egyenletet! (Ez a differenciálegyenlet, és így a megoldását adó $y(x)$ függvény írja le egy két végén felfüggesztett, csak saját súlyával terhelt lánc alakját. Ezért szokták a ch függvény grafikonját **láncgörbé**nek nevezni.)

277. Ha egy m tömegű test a sebességének négyzetével arányos légellenállás mellett szabadon esik, akkor sebessége eleget tesz az $m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2$ differenciálegyenletnek, ahol k a test aerodinamikai tulajdonságaitól függő állandó. Mutassuk meg, hogy a

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \operatorname{th}\Big(\sqrt{\frac{gk}{m}} \cdot t\Big)$$

függvény kielégíti a fenti egyenletet. Határozzuk meg a határsebességet, azaz a $\lim_{t\to\infty} v(t)$ határértéket.

Area függvények

D 10.21 *Az areafüggvények a hiperbolikus függvények inverzei:*
$\operatorname{arsh} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}; x \mapsto y,$ *ahol* $\operatorname{sh} y = x,$
$\operatorname{arch} : [1, \infty) \to [0, \infty); x \mapsto y,$ *ahol* $\operatorname{ch} y = x,$
$\operatorname{arth} : (-1, 1) \to \mathbf{R}; x \mapsto y,$ *ahol* $\operatorname{th} y = x,$
$\operatorname{arcth} : \mathbf{R} \setminus [-1, 1] \to \mathbf{R} \setminus \{0\}; x \mapsto y,$ *ahol* $\operatorname{cth} y = x.$

T 10.22 *Az areafüggvények kifejezhetőek a logaritmusfüggvénnyel:*

$$\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), \ (x \in \mathbf{R}), \qquad \operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \ (|x| < 1),$$

$$\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}), \ (x \geq 1), \qquad \operatorname{arcth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}, \ (|x| > 1).$$

T 10.23 *Az* arch *függvény az* $(1, \infty)$ *intervallumon, a többi areafüggvény az egész értelmezési tartományán differenciálható, és*

$$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad (\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad (\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad (\operatorname{arcth} x)' = \frac{1}{1-x^2}.$$

Feladatok

Igazoljuk az alábbi azonosságok helyességét!

278. ▷ $\operatorname{arsh} \operatorname{sh} x = \operatorname{arth} \operatorname{th} x = x, \quad \operatorname{arch} \operatorname{ch} x = |x|,$

279. ▷ $\operatorname{ch} \operatorname{arsh} x = \sqrt{1+x^2}, \quad \operatorname{sh} \operatorname{arch} x = \sqrt{x^2-1}$, ha $x \geq 1$,
$\operatorname{th} \operatorname{arcth} x = \frac{1}{x}$, ha $|x| \geq 1$, $\quad \operatorname{cth} \operatorname{arth} x = \frac{1}{x}$, ha $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$,

280. ▷ $\operatorname{th} \operatorname{arsh} x = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \operatorname{th} \operatorname{arch} x = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x},$
$\operatorname{sh} \operatorname{arth} x = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \operatorname{ch} \operatorname{arth} x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán (a, b adott konstansok)!

281. ▷ $\operatorname{arsh} x = \operatorname{arch} x,$

282. ▷ $\operatorname{arsh} x = \operatorname{arth} x,$

283. ▷ $\operatorname{arsh} x = \operatorname{arsh} a + \operatorname{arsh} b,$

284. $\operatorname{arch} x = \operatorname{arch} a + \operatorname{arch} b,$

285. $\operatorname{arth} x = \operatorname{arth} a + \operatorname{arth} b,$

286. $\operatorname{arsh} x = \operatorname{arth} a + \operatorname{arch} b.$

Differenciáljuk az alábbi függvényeket:

287. $\operatorname{arsh} x^3,$

288. $\operatorname{arth} \frac{1}{x},$

289. $\operatorname{arsh}(\sin 3x),$

290. $\operatorname{arth}^2(3x),$

291. $\exp \operatorname{arch} x,$

292. $\operatorname{arsh} \frac{\operatorname{sh} x}{2}.$

Gudermann függvénynek nevezzük az $u \mapsto \varphi = 2\,\mathrm{arctg}\, e^u - \dfrac{\pi}{2}$ függvényt. Bizonyítsuk be e függvényről az alábbiakat:

293. $\mathrm{Ran}\,\varphi = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, **294.** páratlan, **295.** invertálható,

296.[⋆] $\varphi = \mathrm{arctg}\,\mathrm{sh}\,u = \arcsin \mathrm{th}\,u$,

297. $\mathrm{sh}\,u = \mathrm{tg}\,\varphi$, $\mathrm{ch}\,u = \frac{1}{\cos\varphi}$, $\mathrm{th}\,u = \sin\varphi$,

298. $u = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} = \ln\frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi}$.

299.[k] Azonos magasságban és egymástól 2 m távolságra lévő két pont között kifeszítünk egy kötelet, mely a végpontoknál 10°-os szöget zár be a vízszintessel. Tudva, hogy a kötél alakja az $a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$ függvény valamely eltoltjával írható le, számítsuk ki a kötél belógását.