10. Egyváltozós valós elemi függvények (megoldások)

1. A maradékos osztást az alábbiak szerint végezzük: leírjuk egymás után az osztandót és az osztót; elosztjuk a legmagasabb kitevőjű tagokat, azaz $2x^3$-öt x^2-tel ($2x^3 : x^2 = 2x$), és a $2x$-et leírjuk az eredményhez; az osztót visszaszorozzuk $2x$-szel és a szorzatot ($2x^3+6x^2+2x$) az osztandó alá írjuk, majd kivonjuk az osztandóból; az így kapott polinommal megismételjük az előbbi eljárást, és ezt addig folytatjuk, míg az osztónál kisebb fokú maradékot nem kapunk.

$$\begin{array}{rrrrl}
(2x^3 & +2x^2 & -4x & -2) & : \ (x^2 \ +3x \ +1) \ = \ 2x \ -4 \\
-2x^3 & \pm 6x^2 & \pm 2x & & \\
\hline
 & -4x^2 & -6x & -2 & \\
 & \mp 4x^2 & \mp 12x & \mp 4 & \\
\hline
 & & +6x & +2 &
\end{array}$$

Tehát a hányados $q(x) = 2x-4$, a maradék $r(x) = 6x+2$. Eredményünket az $f = gq+r$ alakba írva: $2x^3+2x^2-4x-2 = (x^2+3x+1)(2x-4)+(6x+2)$.

2. $q(x) = x-1$, $r(x) = 0$.

3. $q(x) = x^3$, $r(x) = x^2+2x+3$.

4. $q(x) = x^2+2x$, $r(x) = -3x^2+2x+3$.

5. $q(z) = z^2+iz+4$, $r(z) = 2i$.

6. $q(z) = z-i$, $r(z) = 0$.

7. $q(x) = x^{3k-3}+x^{3k-6}+\ldots+x^3+1$, $r(x) = 0$.

8. $q(x) = x^{3k-2}-x^{3k-3}+x^{3k-5}-x^{3k-6}+\ldots+x^4-x^3+x-1$, $r(x) = 1$.

9. a) b) c) $f(x) = (x+1)^2(x-\frac{1}{2})$, d) $f(x) = x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}$.

10. a) b) c) $f(x) = (x-1)(x+2)^2(x+1)$, d) $f(x) = x^4+4x^3+3x^2-4x-4$.

11. a) b) c) $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$, d) $f(x) = x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc$.

12. a) $f(x) = (x-1)(x-i)(x+i)$, b) c) $f(x) = (x-1)(x^2+1)$, d) $f(x) = x^3-x^2+x-1$.

13. a) $f(x) = (x-1)(x-i)^2(x+i)^2$, b) $f(x) = (x-1)(x^2+1)^2$, c) $f(x) = (x-1)(x^4+2x^2+1)$, d) $f(x) = x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1$.

14. a) $f(x) = (x-1)(x-1-i)^2(x-1+i)^2$, b) $f(x) = (x-1)(x^2-2x+2)^2$,
c) $f(x) = (x-1)(x^4-4x^3+8x^2-8x+4)$,
d) $f(x) = x^5-5x^4+12x^3-16x^2+12x-4$.

15. a) $f(x) = (x+1)(x-i)(x+i)(x-1-i)(x-1+i)$, b) $f(x) = (x+1)(x^2+1)(x^2-2x+2)$, c) $f(x) = (x+1)(x^4-2x^3+3x^2-2x+2)$, d) $f(x) = x^5-x^4+x^3+x^2+2$.

16. a) $f(x) = (x-i)^2(x+i)$, b) c) ilyen alakok nincsenek, mivel az egymásnak konjugált komplex zérushelyek nem ugyanannyiszoros zérushelyek ($k_1 \neq k_2$), és ezért a **T 10.4** miatt f együtthatói nem lehetnek mind valósak,
d) $f(x) = x^3-ix^2+x-i$.

17. a) $f(x) = (x-i)^2(x+i)^3$, b) c) az előző feladatban leírtak szerint ilyen alakok nincsenek, d) $f(x) = x^5 + ix^4 + 2x^3 + 2ix^2 + x + i$.

18. a) $f(x) = (x-i)(x-2-i)(x-2+i)$, b) c) ilyen alakok nincsenek, mivel az egymásnak konjugált komplex zérushelyek nem ugyanannyiszoros zérushelyek, hisz i egyszeres zérushely, $-i$ nem zérushely, tehát a **T 10.4** miatt f együtthatói nem lehetnek mind valósak, d) $f(x) = x^3 - (4+i)x^2 + (5+4i)x - 5i$.

19. Legyen $f(x) = (x^2-1)^n$. f-nek -1 és 1 is n-szeres zérushelye. Az f' függvénynek -1 és 1 is $(n-1)$-szeres zérushelye, és a Rolle-féle középértéktétel szerint van még egy zérushelye a $(-1, 1)$ intervallumban. Az f'' függvénynek -1 és 1 is $(n-2)$-szeres zérushelye és megint csak a Rolle-féle középértéktétel szerint van még két zérushelye a $(-1, 1)$ intervallumban, melyeket elválaszt egymástól f' egy zérushelye. A gondolatmenetet hasonlóképpen folytatva azt kapjuk, hogy az $f^{(n)}$ függvénynek a $(-1, 1)$ intervallumban n zérushelye van, melyeket elválaszt egymástól az $f^{(n-1)}$ függvény $(n-1)$ zérushelye, azaz e zérushelyek különbözőek.

20. Írjuk f együtthatóit az első sorba. Vigyázzunk, x^5 és x^2 együtthatója 0.

	1	0	-1	2	0	1	-1
-2	1	-2	3	-4	8	-15	29

Tehát, $f(-2) = 29$.

21. A Horner-séma komplex számokkal is ugyanúgy működik:

	3	-4	$13+8i$	$1-2i$	0	4	0
$2i$	3	$-4+6i$	1	1	$2i$	0	0

Tehát, $f(2i) = 0$.

22. $f(-4) = -5079$. **23.** $f(1,39) = 10,80418$. **24.** $f(\cos 1) = 0,808$.

25. Írjuk fel a Horner-sémát a $c = 1$ értékkel.

	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5

,

tehát a hányados $x^3 + 2x^2 + 3x + 4$, a maradék 5, azaz $\frac{f(x)}{x-1} = x^3 + 2x^2 + 3x + 4 + \frac{5}{x-1}$.

26. $f(x)/g(x) = x^8 - x^7 + x^4 - x^3 + 1 - 1/(x+1)$.

27. $f(x)/g(x) = 3,11x^4 + 4,20x^3 + 13,96x^2 + 24,28x + 32,78 + 34,27/(x-1,35)$.

28. $f(x)/g(x) = 0,45x^2 + 1,02x + 0,56 - 0,20/(x - \operatorname{tg} 0,5)$.

29. $f(x)/g(x) = x^4 + ix^3 - x^2 + (2-i)x + 2i$, mivel a maradék 0.

30. $f(x)/g(x) = x^4 + (-1+i)x^3 + (3-i)x^2 - x + 2 + i + 1/(x+2+i)$.

31. $f(x) = a(x+1)^4 + b(x+1)^3 + c(x+1)^2 + d(x+1) + e$ alakú előállítást kersünk. e éppen maradéka az $f(x)$ polinom $(x+1)$-gyel való maradékos osztásának, a hányados $(x+1)$-gyel való osztásának maradéka pedig d. Hasonlóan folytatva kapjuk a c, b, a értékeket. A maradékos osztásokat egyetlen táblázatban ábrázoltuk, a keresett együtthatókat vastag számokkal jelöltük.

	1	2	-3	-4	1
-1	1	1	-4	0	**1**
-1	1	0	-4	**4**	
-1	1	-1	$\mathbf{-3}$		
-1	1	$\mathbf{-2}$			
-1	**1**				

tehát $f(x) = (x+1)^4 - 2(x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 4(x+1) + 1$.

32. $f(x) = (x+1)^4 - 3(x+1)^2$.

33. $f(x) = (x-1)^5 + 5(x-1)^4 + 10(x-1)^3 + 10(x-1)^2 + 5(x-1) + 1$. Ezt az eredményt a Horner-módszernél sokkal gyorsabban megkapjuk a binomiális tételből, ha kifejtjük az alábbi kifejezést: $x^5 = [(x-1)+1]^5$.

34. A **T 10.3** szerint a maradék $f(a)$, azaz $(p-3)a^4$. Ez pontosan akkor 0, ha $p = 3$ (és a tetszőleges), vagy $a = 0$ (és p tetszőleges).

35. Az egyenletet először egész együtthatóssá alakítjuk: $2x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x - 2 = 0$. Ennek racionális, nem egyszerüsíthető p/q alakú gyökei lehetnek azok, amelyekre $p| - 2$, tehát $p = \pm 1, \pm 2$, és $q|2$, tehát $q = \pm 1, \pm 2$. Ebből p/q lehetséges értékei: $\pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2$. A Horner-módszerrel azt kapjuk, hogy $\frac{1}{2}$ és -1 az egyenlet gyökei. Osztva az $(x - \frac{1}{2})$ és az $(x+1)$ polinomokkal kapjuk, hogy

	2	1	3	2	-2
-1	2	-1	4	-2	0
$\frac{1}{2}$	2	0	4	0	

tehát $2x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x - 2 = (x - \frac{1}{2})(x+1)(2x^2+4)$, azaz 2-vel való osztás után $x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x - 1 = (x - \frac{1}{2})(x+1)(x^2+2)$.

36. A racionális gyökök: 1, $-\frac{1}{2}$, -3, a szorzatalak: $(x-1)(x+\frac{1}{2})(x+3)$.

37. Az egyenletnek nincs racionális gyöke. (Egyébként a valós szorzatalak: $x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x - 3 = (x^2+x+1)(x^2-3)$.)

38. A racionális gyökök: $-1, -2, -3, -4$, a szorzatalak: $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$.

39. A zérushelyek: $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$. Az $f(x)$ grafikonját az $x_1 = 0$ helyen legalább másodrendben érinti az $f_1(x) = \frac{1}{12}x^2(0+1)(0-3)^2 = \frac{3}{4}x^2$ polinom grafikonja, az $x_2 = -1$ helyen legalább elsőrendben érinti az $f_2(x) = \frac{1}{12}(-1)^2(x+1)(-1-3)^2 = \frac{3}{4}(x+1)$ polinom grafikonja, és az $x_3 = 3$ helyen legalább másodrendben érinti az $f_3(x) = \frac{1}{12}(3)^2(3+1)(x-3)^2 = 3(x+3)^2$ polinom grafikonja.

40. $x = 0: \ -\frac{4}{9}x, \ x = -2: \ 6(x+2)^2, \ x = 1: \ (x-1)^3$.

41. $x = 0: \ \frac{36}{25}x, \ x = -3: \ 3(x+3)^2, \ x = 2: \ 2(x-2)^2$.

42. $x=0: \ \frac{1}{2}x^2, \ x=2: \ 9(x-2)^2, \ x=-1: \ \frac{9}{16}(x+1)^2, \ x=-2: \ 4(x+2)$.

43. pólus: $x=0$, zérushely: $x=1$, $x=-1$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} r(x)=1$.

44. pólus: $x=0$, zérushely: $x=1$, hézagpont: $x=-1$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} r(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-1} r(x)=-2$.

45. pólus: $x=0$, zérushely: $x=1$, hézagpont: $x=-1$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} r(x)=1$, $\lim\limits_{x\to-1} r(x)=0$.

46. pólus: $x=0$, $x=-1$, zérushely: $x=1$, $x=-2$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} r(x)=\pm\infty$.

47. Páros. **48.** Páratlan. **49.** Páratlan.

50. Páros. **51.** Páratlan. **52.** Páros.

53. Páratlan. **54.** Páros. **55.** Páratlan.

56. Egyik sem, $x^2-x=(x^2)+(-x)$.

57. Egyik sem, $(x+1)\sin x = x\sin x+\sin x$.

58. Egyik sem, $|x-1|=\frac{1}{2}\left(|x-1|+|x+1|\right)+\frac{1}{2}\left(|x-1|-|x+1|\right)$.

59. f_1 és f_2 páros függvények, így $f_1(-x)=f_1(x)$ és $f_2(-x)=f_2(x)$ ha $x\in H$, tehát $(f_1+f_2)(-x)=f_1(-x)+f_2(-x)=f_1(x)+f_2(x)=(f_1+f_2)(x)$, azaz f_1+f_2 páros.

60. Páratlan. **61.** Egyik sem. **62.** Páros.

63. Páros. **64.** Páratlan. **65.** Páros.

66. Páratlan. **67.** Páratlan. **68.** Páros.

69. Az összetett függvény differenciálási szabálya szerint $[f(-x)]'=-f'(-x)$, és mivel $f(-x)=f(x)$, ezért $f'(x)=-f'(-x)$, tehát f' páratlan.

70. Páros.

71. $2\pi/3$. **72.** $2\pi/a$. **73.** $2\pi/a$.

74. π. **75.** Nem periodikus. **76.** 6π.

77. Legyen f és g periodikus p szerint. Ekkor $f(x+p)=f(x)$ és $g(x+p)=g(x)$, tehát $(f+g)(x+p)=f(x+p)+g(x+p)=f(x)+g(x)=(f+g)(x)$, azaz

$f+g$ is periodikus p szerint, ha nem konstans. A többi műveletre a bizonyítás hasonló.

78. Függvénytranszformációkkal az alábbi lépéseken át: $\sin x$, $\sin 2x$, $3\sin 2x$, $3\sin 2x+1$.

79. Az alábbi lépéseken át: $\sin x$, $\sin 2x$, $3\sin 2x$, $3\sin 2(x-\frac{\pi}{6})$, $3\sin 2(x-\frac{\pi}{6})-2$.

80. A cos függvény grafikonját k-szorosára zsugorítjuk az x-tengely mentén.

81. A sin függvény grafikonját k-szorosára nyújtjuk az x-tengely mentén.

82. $\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{ctg}(x+\pi/2)$, $-2\operatorname{ctg}(x+\pi/2)$, vagy felhasználva, hogy $-2\operatorname{ctg}(x+\pi/2) = 2\operatorname{tg} x$.

83. $a\sin(bx+c) = a\sin b(x+c/b)$: b-szeres zsugorítás az x-tengely irányában, a-szoros nyújtás az y-tengely irányában, $-c/b$-vel való eltolás az x-tengely irányában.

84.

85.

86.

87.

91. $\cos x\sin x(1-2\sin^2 x) = \frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x = \frac{1}{4}\sin 4x$.

92. $\sin x+\cos x = \sqrt{2}\,(\sin x\cos(\pi/4)+\cos x\sin(\pi/4)) = \sqrt{2}\sin(x+\pi/4)$.

10.5

93. $\sqrt{3}\sin x + 2\cos x = \sqrt{7}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\sin x + \frac{2}{\sqrt{7}}\cos x\right) = \sqrt{7}\sin(x+\varphi)$, ahol $\cos\varphi = \sqrt{3}/\sqrt{7}$ és $\sin\varphi = 2/\sqrt{7}$.

94. $a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$, ahol $\cos\varphi = a/\sqrt{a^2+b^2}$ és $\sin\varphi = b/\sqrt{a^2+b^2}$. Eszerint $a\sin x + b\cos x$ grafikonját a $\sin x$ grafikonjából egy y-tengely irányú $\sqrt{a^2+b^2}$-szeres nagyítással, és egy x-tengely irányú φ-vel való eltolással kaphatjuk meg.

95. $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin x\cos\frac{\pi}{3} = \sin x$.

96. $\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{tg}(\pi/4)+\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}(\pi/4)-\operatorname{tg}(\pi/4)\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$.

98. $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}(\pi-(\alpha+\beta)) = \operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta-\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = (\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\frac{-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = -\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = -\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$.

99. $\frac{-2\sin\frac{1}{3x}}{3x^2\cos^3\frac{1}{3x}}$.

100. $\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$.

101. $\frac{3\sin^2 x(\cos 2x\cos x + 2\sin 2x\sin x)}{\cos^4 2x}$.

102. $-2x\sin x^2\cos(\cos x^2)$.

103. $x\cos x^2/\sqrt{\sin x^2}$.

104. $-\operatorname{ctg}^2\frac{x}{3}/\sin^2\frac{x}{3}$.

105. 1,82348.

106. 0,005.

107. $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$, így $\operatorname{arcctg} 10 = 0,09967$.

108. $\pi/4$.

109. $\pi/6$.

110. $\pi/6$.

111. $3\pi/4$.

112. $2\pi < 7 < 2\pi + \pi/2$, így $\arccos\cos 7 = 7 - 2\pi$.

113. $1,6-\pi$.

114. $3\pi - 10$.

115. $13 - 4\pi$.

116. $4\pi - 13$.

117. $\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$, $x \in (0,1)$,

118. $\frac{-2x}{2-2x^2+x^4}$, $x \in \mathbf{R}$,

119. $-\frac{1}{x^2}$, mivel $\operatorname{ctg}\operatorname{arctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg}\operatorname{arctg} x} = \frac{1}{x}$.

120. $\frac{2(1-x^2)}{|1-x^2|(1+x^2)} = \begin{cases} 2/(1+x^2), & \text{ha } |x|<1 \\ -2/(1+x^2), & \text{ha } |x|>1 \end{cases}$. Az $|x|=1$ helyeken a függvény nem differenciálható.

121. $-\frac{\sin x}{|\sin x|} = \begin{cases} -1, & \text{ha } 2k\pi < x < (2k+1)\pi,\ (k\in\mathbf{Z}) \\ 1, & \text{ha } (2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi,\ (k\in\mathbf{Z}) \end{cases}$. Az $x = k\pi,\ (k \in \mathbf{Z})$ helyeken a függvény nem differenciálható, bár folytonos.

122. $\frac{-x}{|x|\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,0)\cup(0,1)$.

123. A függvények értelmezési tartományának közös része $(0,1)$, és itt mindegyikük differenciálható. Mivel mindegyikük deriváltja $1/\sqrt{x-x^2}$, ezért a

T 9.18 tétel szerint a függvények csak egy konstansban különböznek. A konstansok meghatározhatók, ha egyetlen x_0 értéket behelyettesítünk mindegyik függvénybe. Például az $x_0 = 0$ értéket behelyettesítve, illetve amelyik függvény nincs értelmezve 0-ban, ott a függvény 0-beli határértékét tekintve azt kapjuk, hogy: $\arcsin(2x-1) + \frac{\pi}{2} = 2\arcsin\sqrt{x} = -2\arcsin\sqrt{1-x} + \pi = 2\arccos\sqrt{1-x} = 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x}{1-x}} = -2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{x}} + \pi = 4\,\mathrm{arctg}\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} - \pi = -4\,\mathrm{arctg}\frac{1+\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} + 2\pi$.

124. (1. megoldás) A $\mathrm{tg}\arcsin x = (\sin\arcsin x)/(\cos\arcsin x) = x/\sqrt{1-x^2}$, és az $\arcsin x + \arccos x = \pi/2 \approx 1,5707963$ képletekből adódik helyességük .
(2. megoldás) Az első képlet esetében mindkét oldal deriváltja $1/\sqrt{1-x^2}$, ezért a **T 9.18** tétel szerint a két oldal különbsége konstans, tehát $\arcsin x = \mathrm{arctg}(x/\sqrt{1-x^2}) + c$, de $\arcsin 0 = \mathrm{arctg}(0/\sqrt{1-0})$, így $c = 0$.

125. A második ábrán jelölje α az x-szel szemközti szöget. Ekkor $\sin\alpha = x$, azaz $\arcsin x = \alpha$, másrészt $\cos\alpha = \sqrt{1-x^2}$, azaz $\cos\arcsin x = \sqrt{1-x^2}$. Felhasználva a $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$ összefüggést kapjuk, hogy $\cos\arcsin x = \pm\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \pm\sqrt{1-x^2}$. Itt azonban mindig a pozitív előjel érvényes, mivel a cos függvény az arcsin értékkészletén mindig pozitív. A $\sin\arccos$ függvényre vonatkozó összefüggés hasonlóan bizonyítható.

126. $\mathrm{tg}\,\mathrm{arcctg}\, x = \dfrac{1}{\mathrm{ctg}\,\mathrm{arcctg}\, x} = \dfrac{1}{x}$. Az első ábráról leolvasható.

127. $\mathrm{tg}\arccos x = \dfrac{\sin\arccos x}{\cos\arccos x} = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$. A harmadik ábráról leolvasható.

128. Az előző feladat megoldásához hasonlóan. Lásd még a **124.** feladatot.

131. Ha $\arcsin\sin x = y$, akkor $\sin x = \sin y$, ahol $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Ennek megoldásai:
$y = x + 2k\pi$, ha valamely egész k-ra $2k\pi - \frac{\pi}{2} \le x \le 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, vagy
$y = \pi - x + 2k\pi$, ha valamely egész k-ra $(2k+1)\pi - \frac{\pi}{2} \le x \le (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}$.

135. $\sin\arcsin : [-1,1] \to [-1,1]; x \mapsto x$,
$\cos\arccos : [-1,1] \to [-1,1]; x \mapsto x$,
$\mathrm{tg}\,\mathrm{arctg} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}; x \mapsto x$,
$\mathrm{ctg}\,\mathrm{arcctg} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}; x \mapsto x$,

$\arcsin\sin : \mathbf{R} \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\quad \arccos\cos : \mathbf{R} \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

$\operatorname{arctg}\operatorname{tg} : \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbf{Z}\} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,

$\operatorname{arcctg}\operatorname{ctg} : \mathbf{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbf{Z}\} \to (0, \pi)$.

136. $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ felhasználásával: $1 - 2\sin^2(\arcsin(-\frac{2}{3})) = 1 - 2(-\frac{2}{3})^2 = \frac{1}{9}$.

137. $3/4$.

138. $56/65$.

139. $(\cos\arccos\frac{3}{5})(\cos\arcsin\frac{12}{13}) - (\sin\arccos\frac{3}{5})(\sin\arcsin\frac{12}{13}) = -33/65$.

140. Vegyük mindkét oldal szinuszát: $x = \sqrt{1 - x^2}$, amiből $x = 1/\sqrt{2}$.

141. Vegyük mindkét oldal tangensét: $\sqrt{1 - x^2}/x = x$, amiből $x = \sqrt{(\sqrt{5} - 1)/2}$.

142. Vegyük mindkét oldal koszinuszát: $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ miatt kapjuk, hogy $1 - 2\sin^2 \arcsin x = \cos\arccos 2x$, azaz $1 - 2x^2 = 2x$, amiből $x = (-1 \pm \sqrt{3})/2$. A negatív gyök hamis, mivel abszolút értéke 1-nél nagyobb, így a megoldás: $x = (\sqrt{3} - 1)/2$.

143. Vegyük mindkét oldal tangensét: $\frac{(x-1)-(x-2)}{1+(x-1)(x-2)} = 1$, amiből $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

144. Vegyük mindkét oldal szinuszát. A megoldás $x = 1/2$.

145. A $t = \arcsin ax$ helyettesítéssel, amikor is $x = \frac{1}{a}\sin t$, kapjuk hogy

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin ax}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{at}{\sin t} = a.$$

146. 1. ($t = \operatorname{arctg} x$ helyettesítéssel, az előző megoldáshoz hasonlóan.)

147. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin ax}{\arcsin bx} = \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin ax}{x}\Big/\frac{\arcsin bx}{x} = a/b.$

148. Az előző feladatok gondolatmenetét és eredményeit felhasználva: a/b.

149. $\operatorname{sgn} a \operatorname{sgn} b$, $b \neq 0$.

150. Nem létezik, mivel a jobboldali határérérték $\pi/2$, a baloldali $-\pi/2$.

151. A feladatbeli feltétel fennállása esetén az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha a bal és a jobb oldalán álló kifejezés tangense is egyenlő. Azok pedig egyenlőek:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y) = \frac{\operatorname{tg}\operatorname{arctg} x + \operatorname{tg}\operatorname{arctg} y}{1 - \operatorname{tg}\operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{tg}\operatorname{arctg} y} = \frac{x + y}{1 - xy} = \operatorname{tg}\operatorname{arctg}\frac{x + y}{1 - xy}.$$

152. $0 < \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} < \frac{\pi}{4}$, tehát az előző feladatbeli feltétel fennáll, így az ottani képlet alkalmazható:
$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

153. $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$, $\operatorname{arctg}\frac{3}{4} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$.

154. $\operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \operatorname{arctg}\frac{1}{4} = \operatorname{arctg}\frac{8}{15}$, $\operatorname{arctg}\frac{8}{15} + \operatorname{arctg}\frac{1}{4} = \operatorname{arctg}\frac{47}{52}$.

155. $4\operatorname{arctg}\frac{1}{5} = \operatorname{arctg}\frac{120}{119}$.

156. Az egyenlőség ekvivalens a következővel: $\arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{16}{65} = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{4}{5}$. Ennek mindkét oldala 0 és $\pi/2$ közé esik (a bal oldal például azért, mert $\arcsin x < \frac{\pi}{2}x$, ha $x < 0$, és így $\arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{16}{65} < \frac{\pi}{2}(\frac{5}{13} + \frac{16}{65}) < \frac{\pi}{2}$), így ekvivalens átalakítás az, ha mindkét oldal koszinuszát vesszük. Egyrészt $\cos(\arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{16}{65}) = \frac{4}{5}$, másrészt $\cos(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{4}{5}) = \sin\arcsin\frac{4}{5} = \frac{4}{5}$, vagyis a két oldal koszinusza egyenlő, tehát a két oldal is.

157. Mindkét oldal deriváltja $\dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$, ezért a két oldal legfeljebb egy additív konstansban térhet el egymástól. A két oldal $x = 0$ helyen vett helyettesítési értéke megegyezik, így e konstans 0, vagyis a két oldal valóban megegyezik.

158. 1. megoldás. A **151.** feladat eredményét felhasználva kapjuk, hogy
$$\operatorname{arctg}\frac{1}{x} - \operatorname{arctg}\frac{1}{x+1} = \operatorname{arctg}\frac{1/x - 1/(x+1)}{1 + 1/(x^2+x)} = \operatorname{arctg}\frac{1}{x^2+x+1}.$$
2. megoldás. Az előző feladat megoldásához hasonlóan: mindkét oldal deriváltja $-(2x+1)/(x^4+2x^3+3x^2+2x+2)$.

159. Az ábráról leolvasható, hogy az egy csúcsban összefutó három szög nagysága rendre $\operatorname{arctg} 1$, $\operatorname{arctg} 2$, $\operatorname{arctg} 3$, összegük pedig π.

160. a) $3,5$; b) 5; c) 3; d) 2; e) $1/9$; f) 3; g) 27.

161. a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{3}{2}$; c) $\frac{2}{3}$; d) $\frac{9}{5}$; e) -2; f) -2; g) 5; h) $-\frac{2}{3}$; i) $\frac{1}{\pi}$.

162. $\operatorname{Dom} f = (0,1) \cup (1,\infty)$, $\operatorname{Ran} f = \mathbf{R}$.

163. $\operatorname{Dom} f = (0,1) \cup (1,\infty)$, $\operatorname{Ran} f = \{1\}$.

164. $\operatorname{Dom} f = \mathbf{R} \setminus \{\emptyset\}$, $\operatorname{Ran} f = \mathbf{R}$.

165. $\operatorname{Dom} f = \bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty} (2k\pi, (2k+1)\pi)$, $\operatorname{Ran} f = (-\infty, 0]$.

166. $\operatorname{Dom} f = \bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $\operatorname{Ran} f = (-\infty, 0]$.

167. $\operatorname{Dom} f = \bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty} \left(k\pi, (k + \frac{1}{2})\pi\right)$, $\operatorname{Ran} f = \mathbf{R}$.

168. $\operatorname{Dom} f = (0,1]$, $\operatorname{Ran} f = (-\infty, \ln\frac{\pi}{2}]$.

169. $\operatorname{Dom} f = [-1,1)$, $\operatorname{Ran} f = (-\infty, \ln\pi]$.

170. $\operatorname{Dom} f = [\frac{1}{e}, e]$, $\operatorname{Ran} f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

171. Az $x = \log_a b$, $y = \log_c b$, $z = \log_c a$ jelöléseket használva, a logaritmus definíciója alapján: $a^x = b$, $c^y = b$, $c^z = a$. Az utóbbi kettőt az előzőbe helyettesítve kapjuk, hogy $c^{xz} = c^y$, amiből $x = \frac{y}{z}$, és ez x, y, z értékének visszahelyettesítése után a feladatbeli összefüggést adja. E formula egy másik könnyen megjegyezhető alakja: $\log_c a \cdot \log_a b = \log_c b$.

172. 1. megoldás. Az előző feladatból $c = b$ helyettesítéssel.
2. megoldás. Az $x = \log_a b$ jelöléssel, a logaritmus definíciója alapján $a^x = b$. Ebből, mindkét oldal b alapú logaritmusát véve, a logaritmus ismert azonosságai alapján $x \log_b a = 1$. Ez x értékének visszahelyettesítése után a feladatbeli összefüggést adja. E formula egy másik könnyen megjegyezhető alakja: $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

173. 10-es alapú logaritmusra áttérve:
$$\log_{a_1} a_2 \cdot \log_{a_2} a_3 \cdot \ldots \cdot \log_{a_n} a_1 = \frac{\lg a_1}{\lg a_2} \frac{\lg a_2}{\lg a_3} \cdots \frac{\lg a_n}{\lg a_1} = 1.$$

174. 1. megoldás. $\log_{a^n} b = \dfrac{\lg b}{\lg a^n} = \dfrac{\lg b}{n \lg a} = \dfrac{1}{n} \log_a b$.
2. megoldás. Az $x = \log_{a^n} b$ jelöléssel $a^{nx} = b$, amiből $\log_a b = nx$.

175. $\log_{a^n} b^n = \dfrac{\lg b^n}{\lg a^n} = \dfrac{n \lg b}{n \lg a} = \log_a b$.

176. $-\log_{1/a} b = \dfrac{\lg b}{-\lg(1/a)} = \dfrac{\lg b}{\lg a} = \log_a b$.

177. $\log_{ab} c = \dfrac{1}{\log_c ab} = \dfrac{1}{\log_c a + \log_c b} = \dfrac{1}{1/\log_a c + 1/\log_b c} =$
$\dfrac{\log_a c}{1 + \log_a c/\log_b c} = \dfrac{\log_a c}{1 + \log_a b}$.

178. Az előzőhöz hasonlóan.

179. $\log_{a_1 \ldots a_n} c = \dfrac{1}{\log_c a_1 \ldots a_n} = \dfrac{1}{\log_c a_1 + \cdots + \log_c a_n} = \dfrac{1}{\frac{1}{\log_{a_1} c} + \cdots + \frac{1}{\log_{a_n} c}}$.

180. $0,6931$; $0,3010$; $2,3026$; $0,4343$; $1,1447$.

181. $1,5850$; $0,6309$; $0,8736$; $3,3219$; $0,8097$.

182. 2, 1, 1 (l. **177**–**179**).

183. 1/2, 2, 1 (l. **173**, **175**).

184. $\lg 8 = \lg 2^3 = 3 \lg 2 \approx 0,903$; $\lg 5 = \lg 10/2 = 1 - \lg 2 \approx 0,699$; $\lg 72/100 = \lg 18/25 = 2 \lg 3 + \lg 2 - 2(1 - \lg 2) = 2 \lg 3 + 3 \lg 2 - 2 \approx -0,1427$; $\lg \sqrt[7]{7,5} = \frac{1}{7}(1 + \lg 3 - 2 \lg 2) \approx 0,125$.

185. Az első esetben az $\ln \frac{x}{k}$ grafikonját, a másodikban az $\ln x + c$ grafikonját kapjuk. Azonban $\ln \frac{x}{k} = \ln x - \ln k$, így $c = -\ln k$ esetén a két függvény, s így a két grafikon is egybeesik.

186. $\log_2 x = \ln x / \ln 2$, tehát y irányú $1/\ln 2$-szörös nyújtással.

187. $\log_3 \dfrac{x^{3/2}}{9} = \dfrac{3}{2 \ln 3} \ln x - 2$, tehát egy y irányú $\dfrac{3}{2 \ln 3}$-szeresre való nyújtással és egy y irányú -2-vel való eltolással.

188. $\ln \sqrt[3]{1 - x} = \frac{1}{3} \ln(1 - x)$, tehát egy y tengelyre való tükrözéssel, egy x irányban 1-gyel való eltolással és egy y irányú harmadára való zsugorítással.

189. $(x + 2)^2 = 3x^2 + 14x + 13$, így $x_1 = 1$, $x_2 = -5$, ez utóbbi hamis gyök.

190. $2 \ln |x| + 8 \ln |x| = 10$, amiből $|x| = e$, azaz $x_1 = e$, $x_2 = -e$.

191. $\log_{32} 2x = \frac{1}{5}\log_2 2x = \frac{1}{5}(1+\log_2 x)$, $\log_8 4x = \frac{1}{3}\log_2 4x = \frac{1}{3}(2+\log_2 x)$ behelyettesítése után $\log_2 x = 4$, azaz $x = 16$.

192. $\dfrac{\log_2 8}{\log_2 x} - \dfrac{\log_2 64}{\log_2 4x} = \dfrac{\log_2 4}{\log_2 2x}$, amiből $\dfrac{3}{\log_2 x} - \dfrac{6}{2+\log_2 x} = \dfrac{2}{1+\log_2 x}$, így $\log_2 x = 1$ ill. $\log_2 x = -6/5$, azaz $x_1 = 2$, $x_2 = 1/\sqrt[5]{64}$.

193. $\dfrac{5}{5x+1}$.

194. $\dfrac{1}{x}\lg e$.

195. $-\dfrac{1}{x}$.

196. $\dfrac{-4\ln(1-2x)}{1-2x}$.

197. $\operatorname{ctg} x$.

198. $-\operatorname{tg} x \cdot \lg e$.

199. $\frac{2x\log_3 e}{x^2-1}$.

200. $-\frac{\log_5 e}{x\log_5^2 x}$.

201. $x^{n-1}(n\ln x + 1)$.

202. $(\ln x)' = x^{-1}$, $(\ln x)'' = -x^{-2}$, $(\ln x)''' = 2x^{-3}, \ldots, (\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$.

203. $y' = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, $y'' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $-\dfrac{1}{\sin^2 x} + \dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = -1$.

204. $y' = \frac{1}{x}(c_1\cos\ln x - c_2\sin\ln x)$, $y'' = \frac{1}{x^2}((c_2-c_1)\sin\ln x - (c_1+c_2)\cos\ln x)$.

205. A Lagrange-féle középértéktételt használjuk az ln függvényre: $\frac{\ln b - \ln a}{b-a} = (\ln x)'|_{x=c} = \frac{1}{c}$, ahol $a < c < b$. Így $\frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$, és ezt akartuk bizonyítani.

206. Az $f(x) = 2(\sqrt{x}-1) - \ln x$ függvény deriváltja $f'(x) = 1/\sqrt{x} - 1/x$, ami $x > 1$ esetén pozitív, így f szigorúan monoton nő, másrészt $f(1) = 0$, tehát $f(x) > 0$, ha $x > 1$.

207. A prímszámtétel szerint $\pi(x)$ közelítőleg $\dfrac{x}{\ln x}$, ha x 'elég nagy'. Így $\pi(10^7) \approx \frac{10^7}{\ln 10^7} \approx 620421$. (Valójában $\pi(10^7) = 664579$.)

208. A kisszekundnak megfelelő hányadost jelölje k. Egy oktáv 12 kisszekund, így $k^{12} = 2$, azaz $k = \sqrt[12]{2}$. n kisszekundnak a $2^{n/12}$ hányados felel meg. Mivel $\frac{x}{y} = 2^{n/12}$, ezért az x és y közti hangköz $n = 12\log_2\frac{x}{y}$ kisszekundból áll.

209. $\left(\ln\dfrac{(x^2+2)(x+9)^{1/2}}{x-1}\right)' = \left(\ln(x^2+2) + \dfrac{1}{2}\ln(x+9) - \ln(x-1)\right)' = \dfrac{2x}{x^2+2} + \dfrac{1}{2x+18} - \dfrac{1}{x-1}$, így az $f' = f(\ln f)'$ képletet használva:

$$\left(\frac{(x^2+2)(x+9)^{1/2}}{x-1}\right)' = \frac{(x^2+2)(x+9)^{1/2}}{x-1}\left(\frac{2x}{x^2+2} + \frac{1}{2x+18} - \frac{1}{x-1}\right).$$

A fenti megoldás csak $x > 1$ esetén érvényes, mivel csak ekkor vehetjük mindegyik tényező logaritmusát. Előjelcserével (az $x-1$ helyébe $1-x$-et írva) az $x < 1$ esetben is használható a módszer, de a $-(-f)' = f'$ összefüggés miatt ugyanezt az eredményt kapjuk.

210. $(x+1)(x+2)(x+3)\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3}\right) = 3x^2 + 12x + 11$.

211. $2(2x+1)(x^2+1)x^{4/5}\left(\frac{1}{2x+1} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{2}{5x}\right) = \frac{2}{5}x^{-1/5}(19x^3 + 7x^2 + 9x + 2)$.

212. $\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{x(x-1)}{x^2+2}}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2x}{x^2+1}\right)$.

213. $\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{x^2(x+1)}{(x-2)(x^2+2)}}\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{2x}{x^2+2}\right)$.

214. $\dfrac{\sqrt{x+11}}{(x-7)\sqrt[3]{2x+1}}\left(\dfrac{1}{2x+22}-\dfrac{1}{x-7}-\dfrac{1}{6x+3}\right)$.

215. $\left(\ln(1+x)^{1-x}\right)'=((1-x)\ln(1+x))'=-\ln(1+x)+\frac{1-x}{1+x}$, így $\left((1+x)^{1-x}\right)'=\left((1+x)^{1-x}\right)\left[\frac{1-x}{1+x}-\ln(1+x)\right]$.

216. $(1-3x)^{\ln x}(\ln(1-3x)/x-3\ln x/(1-3x))$.

217. $\sqrt[x]{3x^2-6x+7}\left[-\frac{\ln(3x^2-6x+7)}{x^2}+\frac{6x-6}{x(3x^2-6x+7)}\right]$.

218. $2^x=e^{x\ln 2}$, tehát x-tengely irányú $\ln 2$-szeres zsugorítással.

219. $5^{x+1}=e^{(x+1)\ln 5}$, tehát x-tengely irányú $\ln 5$-szörös zsugorítással, majd egy x irányú -1-gyel való eltolással, vagy az $5^{x+1}=5e^{x\ln 5}$ átalakítás alapján egy x-tengely irányú $\ln 5$-szörös zsugorítással, majd egy y irányú 5-szörös nyújtással.

220. $(3^{x/2-1})^3=\exp\frac{3}{2}(x-2)\ln 3$, tehát x-tengely irányú $\frac{3}{2}\ln 3$-szoros zsugorítással, majd egy x irányú 2-vel való eltolással, vagy az $(3^{x/2-1})^3=\frac{1}{27}\exp\frac{3}{2}x\ln 3$ átalakítás alapján egy x-tengely irányú $\frac{3}{2}\ln 3$-szoros zsugorítással, majd egy y irányú 27-edére való zsugorítással.

221. Azokra az x racionális számokra, melyek egyszerüsített p/q alakjában (azaz, ahol p és q relatív prímek) q páratlan.

222. Azok, amelyekre
a) $g(x_0)=h(x_0)$ és az $f(x_0)^{g(x_0)}$ hatvány értelmezve van, vagy
b) $f(x_0)=1$ és $g(x_0)$, $h(x_0)$ értelmezve vannak, vagy
c) $f(x_0)=0$, $g(x_0)>0$, $h(x_0)>0$, vagy
d) $f(x_0)=-1$, és a $(-1)^{g(x_0)}$, $(-1)^{h(x_0)}$ hatványok értelmezve vannak, és egyenlőek.

223. Vagy $x-3=5-3x$, azaz $x=2$, vagy $2x+1=1$, azaz $x=0$, vagy $2x+1=-1$, azaz $x=-1$. A $2x+1=0$ eset nem vezet megoldáshoz, mert a bal oldali hatványnak az $x=-1/2$ helyen nincs értelme.

224. Vagy $9/x=x$, amiből megoldásként $x=3$ és $x=-3$ adódik, vagy $x-3=1$, azaz $x=4$, vagy $x-3=0$, azaz $x=3$. A $x-3=-1$ eset nem vezet megoldáshoz, mert a bal oldali hatványnak az $x=2$ helyen nincs értelme.

225. Az $(x+1)^{2x+1}=((x+1)^2)^{x+1/2}$ átalakítás után a megoldások: $x=-1/2$ és $x=0$.

226. $\pi x^{\pi-1}$. **227.** $\pi^x\ln\pi$. **228.** $2^x\ln 2$. **229.** $-2^{-x}\ln 2$.

230. $(2^{\operatorname{tg} x}\ln 2)/\cos^2 x$. **231.** $(-5^{1/x}x^{-2}-5^{-x})\ln 5$.

232. $\frac{1}{2}x^{-1/2}\exp\sqrt{x}+\frac{1}{2}(\exp x)^{-1/2}\exp x=(\exp\sqrt{x}+\sqrt{x\exp x})/(2\sqrt{x})$.

233. $\dfrac{d}{dx}(e^{xy}-y)=\dfrac{d}{dx}(3),\quad e^{xy}(x\dfrac{dy}{dx}+y)-\dfrac{dy}{dx}=0,\quad \dfrac{dy}{dx}(1-xe^{xy})=ye^{xy}$,
$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{ye^{xy}}{1-xe^{xy}}=\dfrac{y(3+y)}{1-x(3+y)}$, mivel $e^{xy}=3+y$.

234. $e^{y\ln x}(y'\ln x+\frac{y}{x})+\frac{y'}{y}=0,\quad y'=\frac{-e^{y\ln x}y/x}{e^{y\ln x}\ln x+1/y}=\frac{y\ln y}{x/y-x\ln x\ln y}$, mivel $e^{y\ln x}=-\ln y$.

235. $((x\ln x)^x)'=\left(e^{x\ln(x\ln x)}\right)'=(x\ln x)^x(\ln(x\ln x)+1+1/\ln x)$.

236. $x^{\sin x}(\cos x\ln x+\frac{1}{x}\sin x)$.

237. $x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$.

238. $2x^{\sqrt{3x}}\sqrt{\frac{3}{x}}(\frac{\ln x}{2}+1)$.

239. $(1-x)^{x^2}(2x\ln(1-x)-\frac{x^2}{1-x})$.

240. $(\sin x)^{\operatorname{tg} x}((\ln\sin x)/(\cos^2 x)+1)$.

241. $\left(f(x)^{g(x)}\right)'=\left(e^{g(x)\ln f(x)}\right)'=e^{g(x)\ln f(x)}\left(g'(x)\ln f(x)+g(x)f'(x)/f(x)\right)=f(x)^{g(x)}g'(x)\ln f(x)+g(x)f(x)^{g(x)-1}f'(x)$.

242. Teljes indukcióval bizonyítunk. $n=0$ esetén az állítás igaz. Ha n-re igaz, akkor a képlet mindkét oldalát differenciálva azt kapjuk, hogy $(xe^x)^{(n+1)}=[(x+n)e^x]'=(x+n+1)e^x$, azaz az összefüggés igaz.

243. Teljes indukcióval bizonyítunk. Az áttekinthetőség kedvéért a továbbiakban $H_n(x)$ helyett csak H_n-et írunk. $(e^{-x^2})'=-2xe^{-x^2}$, $(e^{-x^2})''=(4x^2-2)e^{-x^2}$, azaz $H_0=1$, $H_1=-2x$, $H_2=4x^2-2$, és ezek kielégítik a $H_2+2xH_1+2H_0=0$ egyenletet. Az $(e^{-x^2})^{(n)}$ függvényt differenciálva kapjuk, hogy $((e^{-x^2})^{(n)})'=e^{-x^2}H_n'-2xe^{-x^2}H_n$; másrészt $(e^{-x^2})^{(n+1)}=e^{-x^2}H_{n+1}$, amiből $H_n'=H_{n+1}+2xH_n$. Tegyük fel, hogy valamely n értékre igaz a feladatbeli összefüggés. Differenciálva, majd behelyettesítve, $H_{n+1}'+2xH_n'+2H_n+2nH_{n-1}'=H_{n+2}+2xH_{n+1}+(2n+2)H_n+2x(H_{n+1}+2xH_n+2nH_{n-1})=0$, azaz $H_{n+2}+2xH_{n+1}+(2n+2)H_n=0$, vagyis az összefüggés $(n+1)$-re is igaz.

244. Mivel az exp függvény monoton növő, ezért ha $\hat{}_n$ helyébe 0-t írunk, akkor alsó, ha 1-et, akkor felső becslést kapunk $n!$-ra. Eszerint az $R=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ jelölést használva $R<n!<R\exp\frac{1}{12n}$.

245. A becslés: $475687486<12!<479002369$, a pontos érték: $12!=479001600$; illetve a becslés: $8,3094383\cdot10^{81}<60!<8,3209872\cdot10^{81}$, a pontos érték tíz értékes jeggyel: $60!\approx 8,320987112\cdot10^{81}$.

246. $1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)=\dfrac{(2n)!}{2^n n!}=\sqrt{2}(\dfrac{2n}{e})^n\exp\dfrac{\hat{}_{2n}-2\hat{}_n}{24n}$, ahonnan $\sqrt{2}(\frac{2n}{e})^n\exp\frac{-1}{12n}<1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot99<\sqrt{2}(\frac{2n}{e})^n\exp\frac{1}{24n}$.
$n=50$ esetén: $2,72312\cdot10^{78}<1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot99<2,729938\cdot10^{78}$.

247. $e^{m(x+y)}=e^{mx}e^{my}$ miatt nyilvánvaló. Megmutatható, hogy az egész számegyenesen folytonos függvények között más megoldása e függvényegyenletnek nincs.

248. $f'(x)=\dfrac{4\exp(2x)}{(\exp(2x)+1)^2}=1-\left(\dfrac{\exp(2x)-1}{\exp(2x)+1}\right)^2$.

249. $y'=c_1ae^{ax}+c_2be^{bx}$, $y''=c_1a^2e^{ax}+c_2b^2e^{bx}$ behelyettesítésével adódik.

250. Ha $f(x)=ce^{kx}$, akkor $f'(x)=cke^{kx}$ és ezek kielégítik az egyenletet. Tegyük fel, hogy $f(x)$ egy megoldása az egyenletnek, és legyen $g(x)=f(x)e^{-kx}$. Ekkor $g'(x)=f'(x)e^{-kx}-kf(x)e^{-kx}$. De, mivel $f(x)$ kielégíti az egyenletet, tehát $f'(x)=kf(x)$, ezért minden x-re $g'(x)=0$. Emiatt minden x-re

$g(x) = c$
(c konstans), így $f(x) = g(x)e^{kx} = ce^{kx}$.

251. a) $10000 \cdot 1,15 = 11500$; b) $10000 \cdot (1 + \frac{0,15}{12})^{12} \approx 11607,55$;
c) $10000 \cdot (1 + \frac{0,15}{365})^{365} \approx 11617,98$;
d) $10000 \cdot (1 + \frac{0,15}{n})^{n} \to 10000e^{0,15} \approx 11618,34$.

252. a) $A(1+\frac{K}{100})^{E}$; b) $A(1+\frac{K}{12\cdot 100})^{12E}$; c) $A(1+\frac{K}{365\cdot 100})^{365E}$; d) $A(1+\frac{K}{n\cdot 100})^{nE} \to Ae^{KE/100}$. A folyamatos kamatozást leíró utóbbi képletet megérthetjük abból, hogy az $f(E) = Ae^{KE/100}$ függvény kielégíti az $f'(E) = \frac{K}{100}f(E)$ egyenletet és az $f(0) = A$ feltételt. Ez ugyanis azt jelenti, hogy ha $f(E)$ jelöli a pénz mennyiségét az E időpillanatban, akkor a növekmény pillanatnyi mértéke mindig a pillanatnyi pénzösszeg K%-ával egyenlő, az $f(0) = A$ feltétel pedig azt jelenti, hogy a kezdő pénzösszeg A.

253. Ha csak kamatot számítunk, akkor persze s%-kal növekszik a pénzösszeg. A pénz mennyisége t idő elteltével legyen $f(t)$, induláskor $f(0) = c$. Mivel a pénzmennyiség változásának sebessége a folyamatosan számított kamatok miatt mindig arányos a pénz pillanatnyi mennyiségével, azaz $f'(t) = kf(t)$, ezért $f(t) = ce^{kt}$; a k értéke $\frac{s}{100}$, hisz $f'(t_0)$ azt jelenti, mennyivel növekedne a pénzmennyiség egy év alatt, ha a növekedés sebessége megőrizné pillanatnyi értékét, ebből pedig $f'(t_0) = cke^{kt_0} = \frac{s}{100}ce^{kt_0}$, azaz $\frac{s}{100}$. Egy év elteltével a pénzmennyiség $f(1)$, a növekedés százalékban kifejezve
$100(f(1) - f(0))/f(0) = 100(e^{s/100} - 1)$.

254. Legyen $m(t)$ a radioaktív anyag tömege a t időpillanatban. A tömeg változásának sebessége $\frac{dm(t)}{dt}$, ami bomláskor negatív. Mivel a sebesség arányos a tömeggel, ezért $m(t)$ kielégíti az $m'(t) = km(t)$ egyenletet. Ennek összes megoldása $m(t) = ce^{kt}$ alakú. Legyen $m(0) = m_0$ az anyag kiindulási tömege. Az előző egyenletből $m_0 = ce^{k0}$, azaz $c = m_0$, $m(t) = m_0e^{kt}$. Az az idő, amely alatt $m(t)$ a felére csökken, kielégíti az $m(t) = m_0e^{kt} = m_0/2$ egyenletet. Ebből $t = -\ln 2/k$, ami valóban független m_0-tól.

255. A megfigyelés kezdetétől számított t év múlva a szén tömege $m(t) = 3e^{kt}$ gramm. Az előző feladat alapján: $3e^{5730k} = 3/2$, azaz $k = -\ln 2/5730$. Így 1000 év elteltével a tömeg $m(1000) = 3e^{-1000\cdot\ln 2/5730} \approx 2,658$. Tehát 2,658 gramm marad a szénből.

256. $k = -\ln 2/5730$, t idő elteltével a szénizotóp mennyisége $m_0e^{kt} = 0,4m_0$, amiből $t = -5730 \cdot \ln 0,4/\ln 2 \approx 7574,65$, tehát kb. 7575 éve halt meg a haj viselője.

257. Legyen $f(t)$ a lakosok száma, ekkor $f'(t)$ a lélekszám változásának sebessége. A feltételekből adódóan $f'(t) = kf(t)$, amiből $f(t) = ce^{kt}$, ahol $c = f(0)$ a falu lélekszáma a megfigyelés kezdetén, k pedig meghatározható abból a feltételből, hogy egy év alatt a lakosság 2%-kal növekszik, azaz $f(1) = ce^{k} = 1,02c$, tehát $k = \ln 1,02 \approx 0,0198$. Ha a lakosság a t_0 időpillanatra megduplázódik, akkor $f(t_0) = 2f(0)$, amiből a megduplázódási idő $t_0 = \ln 2/\ln 1,02 \approx 35$ év. 30 hónap, azaz $2,5$ év eltelte után a lélekszám $f(2,5) = 1000e^{2,5k} \approx 1051$. (Az f függvény értékét egész t helyeken könnyen meghatározhatjuk, hisz ha egy év alatt a lélekszám $1,02$-szorosára nő, akkor t év alatt $1,02^t$-szeresére, azaz $f(t) = c1,02^t = ce^{t\ln 1{,}02}$. Nem magától értetődő azonban a nem egész t esete.)

258. 1,1752; -1,1752; $\operatorname{sh} 1 + \operatorname{ch} 1 = e$ (miért?); 0,7616; 1,3130.

259. $\frac{2-1/2}{2} = \frac{3}{4}$; $\frac{5}{4}$; 4, e^5.

264. $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 - \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 = 1$.
$\operatorname{th}^2 x + 1/\operatorname{ch}^2 x = \operatorname{sh}^2 x/\operatorname{ch}^2 x + 1/\operatorname{ch}^2 x = (\operatorname{sh}^2 x + 1)/\operatorname{ch}^2 x = 1$.

265. $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 1 + 2\operatorname{sh}^2 x$, amiből $\operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x - 1)$.

266. $e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x$, $e^{-x} = \operatorname{ch} x + (-\operatorname{sh} x)$.

267. $(\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x)^v = (e^x)^v = e^{vx} = \operatorname{sh} vx + \operatorname{ch} vx$.

268. $\operatorname{sh} x = \dfrac{\operatorname{th} x}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2 x}}$, $\operatorname{ch} x = \dfrac{1}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2 x}}$.
E képletek megkaphatók a $\operatorname{th}^2 x = \operatorname{sh}^2 x/\operatorname{ch}^2 x = \operatorname{sh}^2 x/(1+\operatorname{sh}^2 x)$, illetve a $\operatorname{th}^2 x = (\operatorname{ch}^2 x - 1)/\operatorname{ch}^2 x$ összefüggésekből egyszerű átrendezéssel, vagy az alábbi módon:
$\operatorname{sh} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{1} = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}} = \dfrac{\operatorname{th} x}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2 x}}$.

269. $\operatorname{sh} x = \operatorname{sh} 2\dfrac{x}{2} = 2\operatorname{sh}\dfrac{x}{2}\operatorname{ch}\dfrac{x}{2} = \dfrac{2\operatorname{sh}\frac{x}{2}\operatorname{ch}\frac{x}{2}}{1} = \dfrac{2\operatorname{sh}\frac{x}{2}\operatorname{ch}\frac{x}{2}}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2} - \operatorname{sh}^2\frac{x}{2}} = \dfrac{2\operatorname{th}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{th}^2\frac{x}{2}}$. Hasonlóképpen $\operatorname{ch} x = \dfrac{1+\operatorname{th}^2\frac{x}{2}}{1-\operatorname{th}^2\frac{x}{2}}$.

270. $(6x+1)\operatorname{sh}(3x^2 - x + 1)$.

271. $(\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 4x})' = (\operatorname{ch} 4x)' = 4\operatorname{sh} 4x$.

272. $3e^{3x}\operatorname{ch}(e^{3x})$.

273. e^{2x}.

274. $-\sin x \operatorname{ch}(\cos x)$.

275. $5\operatorname{sh} 3x \operatorname{sh} 5x + 3\operatorname{ch} 3x \operatorname{ch} 5x$.

276. $y'(x) = \operatorname{sh}\frac{x}{a}$, $y''(x) = \frac{1}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{a}$. Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy ezek kielégítik az egyenletet.

277. $\frac{dv}{dt} = g\operatorname{ch}^{-2}(\sqrt{gk/m}t)$. Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy v kielégíti az egyenletet. $\lim_{t\to\infty} v(t) = \sqrt{mg/k}$.

278. Az inverz függvény definiciójából (**D 9.20**) azonnal adódik.

279. $\operatorname{ch}\operatorname{arsh} x = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2\operatorname{arsh} x} = \sqrt{1+x^2}$, a többi hasonlóan bizonyítható.

280. $\operatorname{th}\operatorname{arsh} x = \operatorname{sh}\operatorname{arsh} x/\operatorname{ch}\operatorname{arsh} x = \operatorname{sh}\operatorname{arsh} x/\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\operatorname{arsh} x} = x/\sqrt{1+x^2}$, $\operatorname{sh}\operatorname{arth} x = \operatorname{th}\operatorname{arth} x/\sqrt{1-\operatorname{th}^2\operatorname{arth} x} = x/\sqrt{1-x^2}$. A többi hasonlóan bizonyítható.

281. (1. megoldás) Mivel az sh és ch függvények grafikonjai nem metszik egymást, hisz $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) > \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \operatorname{sh} x$, ezért inverzeik grafikonjai sem fogják: $\operatorname{arsh} x > \operatorname{arch} x$.
(2. megoldás) Véve mindkét oldal sh-át $x = \operatorname{sh}\operatorname{arch} x$, ebből $x = \sqrt{x^2-1}$, ami lehetetlen.

282. Véve mindkét oldal sh-át $x = \operatorname{sh}\operatorname{arth} x$, ebből $x = x/\sqrt{1-x^2}$, aminek $x = 0$ az egyetlen gyöke. Az $x = 0$ az eredeti egyenletet is kielégíti.

283. $x = \operatorname{sh}(\operatorname{arsh} a + \operatorname{arsh} b) = \operatorname{sh}\operatorname{arsh} a \operatorname{ch}\operatorname{arsh} b + \operatorname{ch}\operatorname{arsh} a \operatorname{sh}\operatorname{arsh} b =$ $a\sqrt{1+b^2} + b\sqrt{1+a^2}$.

284. Ha $a < 1$ vagy $b < 1$, akkor az egyenlet jobb oldala nincs értelmezve Ha $a \geq 1$ és $b \geq 1$, akkor $x = ab + \sqrt{(a^2-1)(b^2-1)}$; ez gyöke az egyenletnek, mert $ab \geq 1$, így $x \geq 1$.

285. Ha $|a|, |b| < 1$: $x = (a+b)/(1+ab)$, $(x \in \operatorname{Dom}\operatorname{arth})$.

286. Ha $|a| < 1$ és $b > 1$: $x = (ab + \sqrt{1+b^2})/\sqrt{1-a^2}$.

287. $3x^2/\sqrt{1+x^6}$.

288. $(1-x^2)^{-1}$.

289. $3\cos 3x/\sqrt{\sin^2 3x + 1}$.

290. $6 \operatorname{arth} 3x/(1-9x^2)$.

291. A **T 10.22** miatt $\exp \operatorname{arch} x = x + \sqrt{x^2-1}$, tehát $(\exp \operatorname{arch} x)' = (x + \sqrt{x^2-1})/\sqrt{x^2-1}$.

292. $\operatorname{ch} x/\sqrt{4 + \operatorname{sh}^2 x}$.

294. A második egyenlőségnél felhasználva, hogy $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \pi/2$, ha $x > 0$, kapjuk, hogy
$2 \operatorname{arctg} e^{-u} - \pi/2 =$
$2 \operatorname{arctg}(1/e^u) - \pi/2 =$
$2(\pi/2 - \operatorname{arctg} e^u) - \pi/2 =$
$-(2 \operatorname{arctg} e^u - \pi/2)$,
tehát a függvény páratlan.

295. $\frac{d\varphi}{du} = 2e^u/(1+e^{2u}) > 0$, tehát a függvény szigorúan monoton nő, így invertálható is.

296. Mivel $0 < \operatorname{arctg} e^u < \pi/2$, ezért $-\pi/2 < \varphi = 2\operatorname{arctg} e^u - \pi/2 < \pi/2$, tehát $\varphi = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\varphi)$, másrészt $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(2\operatorname{arctg} e^u - \pi/2) = -\operatorname{ctg}(2\operatorname{arctg} e^u) =$ $-(1-\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} e^u))/(2\operatorname{tg}\operatorname{arctg} e^u) = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u}) = \operatorname{sh} u$, azaz $\varphi = \operatorname{arctg}\operatorname{sh} u$. Az $\operatorname{arctg} x = \arcsin(x/\sqrt{1+x^2})$ képlet (l. **129.** feladat) felhasználásával kapjuk, hogy $\varphi = \operatorname{arctg}\operatorname{sh} u = \arcsin(\operatorname{sh} u/\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u}) = \arcsin \operatorname{th} u$.

297. Az előző feladatból azonnal adódik, hogy $\operatorname{sh} u = \operatorname{tg}\varphi$, és $\operatorname{th} u = \sin\varphi$. Ha $u \neq 0$, $\varphi \neq 0$, akkor e két egyenlet elosztásával kapjuk, hogy $\operatorname{ch} u = \frac{1}{\cos\varphi}$, ami viszont $u = \varphi = 0$ esetén is igaz.

298. $u = \operatorname{arth}\sin\varphi = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} = \ln\sqrt{\dfrac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}} = \ln\dfrac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi}$.

299. Legyen a két végpont koordinátája $(-1, 0)$ és $(1, 0)$, a rajtuk áthaladó görbe egyenlete $y(x) = a\operatorname{ch}\frac{x}{a} + C$. Az $y(1) = 0$ és az $y'(1) = \operatorname{tg} 10°$ egyenletből $a = 1/\operatorname{arsh}\operatorname{tg} 10° \approx 5,7004$; $C = -a\operatorname{ch}(1/a) = -5,788$. A kötél belógása $-y(0) \approx 0,0879$ m.