11. fejezet

Egyváltozós valós függvények menetének vizsgálata

Szélsőérték meghatározása az első deriválttal

D 11.1 *Legyen f egy metrikus tér valamely részhalmazán értelmezett valós értékű függvény. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az értelmezési tartományához tartozó P_0 pontban* **maximuma** *(***minimuma**, **szigorú maximuma**, *ill.* **szigorú minimuma***) van, ha $f(P) \leq f(P_0)$, $(f(P) \geq f(P_0)$, $f(P) < f(P_0)$, ill. $f(P) > f(P_0))$. Ha az $f(P) \leq f(P_0)$ egyenlőtlenség f értelmezési tartományának minden P pontjára teljesül, akkor a P_0 pontot az f függvény* **abszolút minimumhely***ének nevezzük. Hasonlóan definiálható az abszolút maximumhely, ill. a szigorú abszolút minimum- és maximumhely fogalma.*

T 11.2 *Ha az egyváltozós valós f függvény az x_0 pontban differenciálható, akkor az x_0 pontbeli szélsőérték létezéséhez szükséges, hogy $f'(x_0) = 0$ legyen.*

T 11.3 *Ha az f függvény differenciálható az (a, x_0) intervallumon, és itt $f' \geq 0$, valamint differenciálható az (x_0, b) intervallumon is, ahol $f' \leq 0$, továbbá f folytonos az x_0 pontban, akkor az f függvénynek x_0-ban maximuma van. (Másképpen fogalmazva: ha f monoton növekvőből monoton csökkenőbe vált egy x_0 pontban, akkor ott maximuma van.)*

P 11.4 *Azokat az intervallumokat, melyekben a derivált állandó előjelű, a derivált zérushelyei és szakadási helyei határolják. Például az $f : x \mapsto x + 1/x$ függvény deriváltja az $f' : x \mapsto 1 - 1/x^2$ függvény. Ennek zérushelyei: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, szakadási helye: $x_3 = 0$. Így az alábbi intervallumokon kell a derivált előjelét vizsgálni: $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \infty)$. Praktikus lehet a derivált előjelére, valamint az f függvény viselkedésére vonatkozó ismereteket táblázatban összefoglalni, pl. a következőképpen:*

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	*0*	$(0, 1)$	*1*	$(1, \infty)$
f'	$+$	*0*	$-$	*szak.*	$-$	*0*	$+$
f	$\nearrow$	*MAX*	$\searrow$	*pólus*	$\searrow$	*MIN*	$\nearrow$

A megoldásokban az alábbi rövidítéseket használjuk:

MIN	*minimum*	*MAX*	*maximum*
INFL	*inflexiós pont*	*nincs sz.*	*nincs szélsőérték*
n.ért.	*nincs értelmezve*	*pólus*	*f-nek pólusa van*
$+$	$f' > 0$ *(ill.* $f'' > 0)$	$-$	$f' < 0$ *(ill.* $f'' < 0)$
$\nearrow$	*f monoton nő*	$\searrow$	*f monoton csökken*
$\smile$	*f konvex*	$\frown$	*f konkáv*

Feladatok

Határozzuk meg az alábbi $x \mapsto f(x)$ függvények szélsőértékhelyeit a derivált zérushelyeinek és szakadási helyeinek, valamint az ezek által meghatározott intervallumokon felvett előjelének meghatározásával.

1. $x^2\sqrt[3]{x+2}$,

2. $|x-3|+|2x+1|$,

3. $|x-1||x+2|$,

4. $\max\{2|x|, |1+x|\}$,

5. $\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x,\ 0 < x < \pi$,

6. $\cos x + \dfrac{1}{2}\cos 2x + \dfrac{1}{3}\cos 3x$,

7. x^x,

8. x^{-x^2}.

Taylor-formula

D 11.5 *Az x_0 helyen legalább r-szer differenciálható egyváltozós valós f függvény x_0 helyhez tartozó r-edik* **Taylor-polinom***ján az alábbi (legfeljebb r-edfokú) polinomfüggvényt értjük:*

$$T_r(x) := \sum_{n=0}^{r} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

T 11.6 Taylor-formula: *Ha az f függvény az x_0 és az x pontokat tartalmazó valamely intervallumon $(r+1)$-szer differenciálható, akkor az x_0 és x pontok között található olyan ξ, hogy*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{r} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_r(x),$$

ahol

$$R_r(x) = \frac{f^{(r+1)}(\xi)}{(r+1)!}(x-x_0)^{r+1}.$$

E képletbeli $R_r(x)$ tagot a Taylor-formula **maradéktag***jának nevezzük. Mivel ξ az x_0 és az x közé esik, ezért kifejezhető $\xi = x_0 + \theta(x-x_0)$ alakban, ahol $0 < \theta < 1$. A Taylor-formulát* **Maclaurin-formulá***nak is nevezzük, ha $x_0 = 0$. Ekkor a formula alakja:*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{r} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(r+1)}(\theta x)}{(r+1)!}x^{r+1}, \text{ ahol } 0 < \theta < 1.$$

Feladatok

Írjuk fel az alábbi függvények x_0 ponthoz tartozó harmadik Taylor-polinomját és a Taylor-formula maradéktagját.

9.$^\triangleright$ $\dfrac{1}{x}$, $x_0 = 1$,

10. e^x, $x_0 = 0$,

11. e^x, $x_0 = 1$,

12. $\sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$,

13. $ax^3 + bx^2 + cx + d$, $x_0 = 0$,

14. $ax^3 + bx^2 + cx + d$, $x_0 = 1$.

15.$^\triangleright$ Fejezzük ki a $P(x) = x^5 - 4x^4 + 5x^3 - x^2 - 2x + 1$ függvényt az $x - 1$ polinomjaként.

16. Fejezzük ki a $P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ függvényt az $x + 1$ polinomjaként.

Írjuk fel az alábbi függvények $x_0 = 0$ ponthoz tartozó n-edik Maclaurin-polinomját és a formula maradéktagját.

17. e^x,

18. $\sin x$,

19. $\cos x$,

20.$^\bullet$ $(1 + x)^m$.

21.$^\triangleright$ Az e^x függvény Maclaurin-polinomjai közül hányadfokúak azok, melyek az e^x függvényt a $[-1; 1]$ intervallumon 2 tizedesjegy pontossággal (azaz legfeljebb $0,005$-es hibával) közelítik?

Írjuk fel az f függvény a ponthoz tartozó 6-odfokú Taylor-polinomját. Mely x helyeken közelíti ez a polinom $0,0001$-nél kisebb hibával az f függvényt.

22.$^\triangleright$ $f(x) = \cos x$, $a = 0$,

23. $f(x) = \sin x$, $a = 1$.

24. Legyen $g(x) = p(x) + x^{n+1} f(x)$, ahol p egy n-edfokú polinom, f az egész számegyenesen n-szer differenciálható. Mutassuk meg, hogy a g függvény n-edik Maclaurin-polinomja p.

25. Az előző feladat eredményét is felhasználva határozzuk meg az $f_1(x) = x+x^3$, az $f_2(x) = x+x^3+x^4$, az $f_3(x) = x+x^3+x^4 \sin x$, az $f_4(x) = x+x^3+x^5 \operatorname{arctg} x$ és az $f_5(x) = x + x^3 \cos^2 x$ függvények harmadfokú Maclaurin-polinomját!

Annyiadik Maclaurin formulát írva a számlálóba, amennyi a nevező fokszáma, számítsuk ki az alábbi határértékeket!

26.$^\triangleright$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$,

27. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}}{x^6}$,

28. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5}$,

29. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}}{x^4}$.

Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőtlenségeket:

30.$^\bullet$ $\operatorname{sh} x > x + \frac{x^3}{6}$, ha $x > 0$,

31. $\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$, ha $x \in \mathbf{R}$.

Számítsuk ki az alábbi értékeket az a ponthoz tartozó n-edik Taylor-polinom segítségével. Becsüljük meg a közelítés hibáját.

32.^{k} $\cos 62°$, $a = \dfrac{\pi}{3}$, $n = 2$,

33.^{k} $\sin 43°$, $a = \frac{\pi}{4}$, $n = 3$.

34.* Számítsuk ki $\sqrt[3]{29}$ értékét a négy alapművelet segítségével, 10^{-3} pontossággal.

Szélsőértékek meghatározása

T 11.7 *Legyen $n \geq 1$ és f az x_0 pont valamely teljes környezetében legalább n-szer folytonosan differenciálható egyváltozós valós függvény; továbbá legyen $f^{(k)}(x_0) = 0$, ha $0 < k < n$, de $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Ha n páros, akkor a függvénynek az x_0 helyen szélsőértéke van, mégpedig szigorú minimuma van, ha $f^{(n)}(x_0) > 0$, és szigorú maximuma, ha $f^{(n)}(x_0) < 0$. Ha n páratlan, akkor a függvénynek az x_0 helyen nincs szélsőértéke, inflexiós pontja van.*

Feladatok

Magasabbrendű deriváltak segítségével (az előző tételt használva) vizsgáljuk meg, hogy az alábbi függvényeknek van-e szélsőértékük az $x_0 = 0$ pontban, és ha igen, milyen!

35.$^\triangleright$ $\cos x - 2x^2$,

36. $e^{2x} + 2e^{-x}$,

37. $(e^{-1} + x)\ln(e^{-1} + x)$,

38.$^\triangleright$ $\operatorname{tg} x - x$,

39. $\cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6}$,

40.$^\bullet$ $\operatorname{ch} x + \cos x$,

41. $1 - \dfrac{x^2}{2} - \cos x$,

42.$^\bullet$ $\sin x - x + \dfrac{x^3}{3!}$.

Határozzuk meg az alábbi $f(x)$ függvények szélsőértékhelyeit és abszolút szélsőértékhelyeit a megadott intervallumon. (Vizsgáljuk meg a függvényt az intervallum végpontjaiban, valamint a deriváltfüggvény zérushelyein és szakadási helyein.)

43.$^\triangleright$ $x^3 + 6x^2 - 15x + 3,\ [-6, 6]$,

44.$^\triangleright$ $x^3 + 6x^2 - 15x + 3,\ (-6, 6)$,

45. $\sqrt[3]{x^2},\ [-1, 8]$,

46. $\sqrt[3]{x^2} - \frac{x^2}{3},\ [-1, \sqrt{2}]$,

47. $\sqrt[3]{x^2} - \frac{x^2}{3},\ (-1, \sqrt{8})$,

48. $xe^{-x},\ [1/2, \infty)$,

49. $x^2 \ln x,\ [1, e]$,

50. $e^{-|x|},\ [-1, 2]$,

51. $\begin{cases} x^2 + 1, & x \in [-2, -1) \\ 5 + 2x - x^2, & x \in [-1, 3) \\ x - 1, & x \in [3, 8), \end{cases}$

52. $\begin{cases} e^{1/x}, & x \in [-1, 0) \cup (0, 1] \\ 1, & x = 0, \end{cases}$

53.* $x^m(1 - x)^n, \quad m, n \in \mathbf{N}^+, \quad x \in \mathbf{R}$.

54.$^\bullet$ Bizonyítsuk be, hogy ha f monoton, akkor a g és az $f \circ g$ függvényeknek ugyanott vannak szélsőértékei, mégpedig
   a) ha f monoton nő, akkor g-nek és $f \circ g$-nek ugyanott vannak maximumai, és ugyanazokon a helyeken vannak minimumai,
   b) ha f monoton csökken, akkor g-nek ott van maximuma, ahol $f \circ g$-nek minimuma, és fordítva.

Határozzuk meg az alábbi függvények szélsőértékhelyeit az előző feladat eredményének felhasználásával!

55.$^{\triangleright}$ $f(x) = \dfrac{42}{3x^4 + 8x^3 - 18x^2 + 56}$, **56.**$^{\bullet}$ $f(x) = \operatorname{arctg}(4 - \sqrt{e - e^{x^2}})$,

57. $f(x) = \cos \operatorname{arcctg}(1 - x^2)$, **58.** $f(x) = \operatorname{th}\Big(1 - \ln(1 + x + x^2)\Big)$.

Bizonyítsuk be a következő egyenlőtlenségeket:

59.$^{\triangleright}$ $|3x - x^3| \le 2$, ha $|x| \le 2$, **60.*** $|a \sin x + b \cos x| \le \sqrt{a^2 + b^2}$,

61.$^{\triangleright}$ $x^m (1 - x)^n \le \dfrac{m^m n^n}{(m + n)^{m+n}}$, ha $x \in [0; 1]$, $m, n > 0$,

62.$^{\triangleright}$ $\dfrac{2}{3} \le \dfrac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1} \le 2$, $x \in \mathbf{R}$.

Határozzuk meg az alábbi sorozatok legnagyobb elemét:

63.$^{\triangleright}$ $a_n = \dfrac{n^2}{n^3 + 100}$, **64.**^{k} $a_n = \dfrac{n^{10}}{2^n}$, **65.**^{k} $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{n}{100}}$.

66.* Milyen feltételek mellett van az $x^3 + px + q$ egyenletnek (a) egy, (b) három valós gyöke? Ábrázoljuk a megfelelő tartományokat a (p, q) koordinátasíkon.

Határozzuk meg az alábbi függvényeknek a megadott intervallumokhoz tartozó infimumát és szuprémumát!

67.$^{\triangleright}$ $f(x) = \dfrac{1 + x}{3 + x^2}$, $(0, \infty)$, **68.**$^{\triangleright}$ $f(x) = \dfrac{1 + x^2}{3 + x^2}$, $(0, \infty)$.

Az $[a, b]$ intervallumon értelmezett valós függvények halmazán távolságfüggvény az alábbi ρ:

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

Határozzuk meg az alábbi függvények távolságát a megadott intervallumon!

69.$^{\triangleright}$ $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$, $[0, 1]$, **70.** $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $[0, \pi]$.

71. Állapítsuk meg a c valós szám értékét úgy, hogy a $[0, 2]$ intervallumon az x^2 és a $2x + c$ függvények távolsága minimális legyen.

Oldjuk meg az alábbi szöveges szélsőértékfeladatokat!

72.$^{\triangleright}$ Bontsuk fel a pozitív b számot két szám összegére úgy, hogy a szorzatuk maximális legyen.

73. Adott átfogójú derékszögű háromszögek közül melyiknek maximális a területe?

74. Adott térfogatú egyenes hengerek közül melyiknek legkisebb a felszíne?

75. Határozzuk meg az $A(2, 0)$ pont és az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű körvonal pontjai közötti legkisebb és legnagyobb távolságot.

76. Az $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ egyenletű ellipszishez érintőt húzunk. Az érintő és a koordinátatengelyek által meghatározott háromszög területe milyen x és y értékekre lesz minimális, és mennyi a háromszög területe?

77. Az f fókusztávolságú lencsétől t távolságra lévő tárgy k képtávolsága kielégíti az $\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k}$ összefüggést. Ha f adott, akkor mennyi a képtávolság és a tárgytávolság összegének infimuma és szuprémuma?

78. Egy a oldalú négyzetlapból az ábrán látható módon ki kell vágni a sarkán 4 kis négyzetet úgy, hogy a belőle hajtogatott doboz térfogata maximális legyen. Mekkora legyen a kivágott négyzet oldala?

79.[k] Tegyük fel, hogy az y és az x változók közötti függvénykapcsolat $y = kx$ alakú, ahol k állandó. Négy mérést végzünk az x és az y értékére: $(x_1, y_1) = (1, 4)$, $(x_2, y_2) = (2, 7)$, $(x_3, y_3) = (3, 13)$, $(x_4, y_4) = (4, 15)$. Határozzuk meg k értékét úgy, hogy az eltérések négyzetösszege, azaz a

$$H(k) = \sum_{i=1}^{4} (y_i - kx_i)^2$$

függvény értéke minimális legyen.

80. (**Snell** törvénye) A Fermat-elv szerint a fény két pont között azon az úton halad, melyet a legrövidebb idő alatt tesz meg. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2},$$

ahol v_1 illetve v_2 a fény sebessége két különböző közegben, és α_1 illetve α_2 a közegek határára merőleges egyenes és a fénysugár által bezárt szög az egyik illetve a másik közegben. (Az alábbi ábrán a közegek határa az x-tengely, a fény az $A(0, a)$ és $B(c, -b)$ pont között halad.)

81. A jobb oldali ábrán látható A jelű házból a gazda elindul a folyó felé, megmeríti vödrét, majd a) ugyanakkora sebességgel, b) harmadakkora sebességgel folytatja útját a B jelű házig. Milyen útvonalon halad, ha a legrövidebb idő alatt ér A-ból B-be.

82.$^{\triangleright}$ Egy r sugarú, kör alakú asztal közepe fölött milyen magasra kell elhelyezni a lámpát, hogy az asztal szélén maximális legyen a megvilágítás erőssége? (A megvilágítás erőssége egyenesen arányos a hajlásszög szinuszával, és fordítva arányos a távolság négyzetével.)

83.$^{\triangleright}$ Legfeljebb mekkora lehet annak a gerendának a hossza, amelyet egy 2 m sugarú kör alaprajzú, henger formájú toronyba be lehet vinni az oldalán lévő 2 m magas ajtón keresztül?

Konvexség, konkávság, inflexiós pont

D 11.8 *Legyen f egyváltozós valós függvény. Ha az $y = f(x)$ egyenletű görbének az x_0 abszcisszájú pontban van érintője, és a görbe az x_0 valamely környezetében az érintő* **felett** *(***alatt***) halad, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény az x_0 helyen* **konvex** *(***konkáv***). Azt mondjuk, hogy az f függvény az (a, b) intervallumon* **konvex** *(***konkáv***), ha annak minden pontjában az.*

T 11.9 *Legyen $n \geq 2$ és f az x_0 pont valamely teljes környezetében legalább n-szer folytonosan differenciálható egyváltozós valós függvény; továbbá legyen $f^{(k)}(x_0) = 0$, ha $1 < k < n$, de $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. A függvény az x_0 helyen konvex, ha $f^{(n)}(x_0) > 0$ és n páros, konkáv ha $f^{(n)}(x_0) < 0$ és n páros. Ha n páratlan, akkor a függvénynek az x_0 helyen inflexiós pontja van.*

T 11.10 *Ha az egyváltozós valós f függvény az x_0 pont valamely teljes környezetében legalább kétszer folytonosan differenciálható, és $f''(x_0) > 0$, akkor konvex, ha $f''(x_0) < 0$, akkor konkáv az f függvény az x_0 pontban. Ha pedig f az x_0 pont valamely teljes környezetében legalább háromszor folytonosan differenciálható, és $f''(x_0) = 0$, de $f'''(x_0) \neq 0$, akkor x_0 a függvény inflexiós pontja.*

T 11.11 *Ha az f függvény grafikonjának az x_0 abszcisszájú pontjában van érintője, és f az x_0 egy ba loldali környezetében konvex, egy jobb oldali környezetében konkáv (vagy fordítva), akkor f-nek az x_0 helyen inflexiós pontja van.*

Feladatok

84.$^{\triangleright}$ Legyen f legalább kétszer folytonosan differenciálható az x_0 valamely teljes környezetében. A **T 11.10** felhasználásával mutassuk meg, hogy ha f szigorúan monoton nő és konvex (ill. konkáv) x_0-ban, akkor inverze szigorúan nő és konkáv (ill. konkáv) $f(x_0)$-ban, ha pedig f szigorúan monoton csökken és konvex (ill. konkáv) x_0-ban, akkor inverze is szigorúan csökken és konvex (ill. konkáv) $f(x_0)$-ban.

Határozzuk meg, hogy az alábbi függvények mely intervallumokon konvexek, melyeken konkávok, és hol vannak inflexiós pontjaik:

85.▷ $f(x) = x^3$, **86.**▷ $f(x) = \sqrt[3]{x}$,

87.• $f(x) = x + x^{5/3}$, **88.** $f(x) = (x-5)^{5/3} + 2$,

89.▷ $f(x) = x \sin(\ln x)$, **90.**▷ $f(x) = 2 - |x^5 - 1|$.

Magasabbrendű deriváltak segítségével határozzuk meg az f függvény inflexiós pontjait:

91. $f(x) = x^3$, **92.** $f(x) = x^{2n+1}$, $n \in \mathbf{N}^+$,

93. $f(x) = x^{2n}$, $n \in \mathbf{N}^+$, **94.** $f(x) = \sin^2 x$,

95.▷ $f(x) = \operatorname{sh} x + \sin x$, **96.** $f(x) = \operatorname{sh} x + \sin x + 3x$,

97.▷ Mutassuk meg, hogy az $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ függvény grafikonján az inflexiós pontok egy egyenesbe esnek.

98. Milyen c értékekre lesz az $f(x) = x^4 + cx^3 + 3x^2 + 1$ függvény konvex minden x-re?

99.▷ Milyen feltételeket kell kielégítenie az a, b, c, d konstansoknak, hogy az $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ függvénynek legyen inflexiós pontja?

L'Hospital szabály

T 11.12 L'Hospital szabály. *Legyen f és g két olyan egyváltozós valós függvény, amely az x_0 valamely K környezetében értelmezve van és differenciálható, és $g'(x) \neq 0$, ha $x \in K$. Ha*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0, \quad \text{vagy} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty,$$

továbbá létezik az

$$L' = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

határérték, akkor létezik az

$$L = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

határérték is, és $L = L'$. Analóg állítás igaz K baloldali környezettel és a limeszjelben $(x_0 - 0)$-val, illetve K jobboldali környezettel és a limeszjelben $(x_0 + 0)$-val, valamint akkor, ha K a ∞ ill. $-\infty$ valamely környezete, és x_0-t a ∞ ill. $-\infty$ szimbólummal helyettesítjük.

D 11.13 *Ha $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, akkor az $L = \lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ határértéket, $\dfrac{0}{0}$* **típusú határérték***nek nevezzük, ahol a lehet x_0, $x_0 - 0$, $x_0 + 0$, ∞, $-\infty$. Hasonló értelemben beszélhetünk $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0 vagy 1^∞ típusú határértékekről. (Ezek azok a típusok, melyekről nem dönthető el ránézésre, hogy mi a határértékük, ezért* **határozatlan típus***)oknak is nevezik őket.)*

P 11.14 *Ha egy $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0 vagy 1^∞ típusú határértéket kell kiszámítanunk, akkor először algebrai átalakításokkal vagy logaritmálással $\dfrac{\infty}{\infty}$ vagy $\dfrac{0}{0}$ típusúvá alakítjuk, majd erre megpróbáljuk a L'Hospital szabályt alkalmazni. Azt, hogy a $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$ határérték kiszámítása helyett a $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$ kiszámítására térünk át, a két határérték közé tett $\overset{L}{=}$ jellel fejezzük ki. Számítsuk ki az alábbi $\infty - \infty$ (ellenőrizzük!) típusú határértéket (mely összevonás után $\frac{0}{0}$ típusú határértékké alakul át):*

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{x}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x - x^2 + x}{(x-1)\ln x} \overset{L}{=} \lim_{x\to 1}\frac{1/x - 2x + 1}{(x-1)/x + \ln x} =$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1 - 2x^2 + x}{x - 1 + x\ln x} \overset{L}{=} \lim_{x\to 1}\frac{-4x+1}{2+\ln x} = -\frac{3}{2}.$$

Feladatok

Ellenőrizzük, hogy az alábbi határértékek $\frac{0}{0}$ típusúak-e, és számítsuk ki a határértékeket a L'Hospital szabály segítségével.

100.• $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$, **101.** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$, **102.** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x}$,

103. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$, **104.**▷ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax} - e^{-ax}}{\ln(1+x)}$, **105.**▷ $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$,

106. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^{1/x^2} - 1}{2\operatorname{arctg} x^2 - \pi}$.

Ellenőrizzük, hogy az alábbi határértékek $\frac{\infty}{\infty}$ típusúak-e, és számítsuk ki a határértékeket a L'Hospital szabály segítségével.

107.▷ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{xe^{x/2}}{e^x + x}$, **108.**▷ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x^2}{\sqrt{x}}$, **109.**▷ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^x \ln x}{e^x + x}$,

110.▷ $\displaystyle\lim_{x\to a+0}\frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}$, **111.**▷ $\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{\ln x}{1+\ln\sin x}$, **112.** $\displaystyle\lim_{x\to 1-0}\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$.

113.• Ha $x \to \infty$, akkor az $\log_a(x)$ $(a > 1)$, a^x $(a > 1)$, x^k $(k > 0)$ függvények is ∞-hez tartanak. Hasonlítsuk össze e három függvény értékét 'nagy' x-ekre, azaz, ha lehet, állítsuk őket nagyságszerinti sorrendbe. (Ehhez számítsuk ki a hányadosaik határértékét.)

Számítsuk ki az alábbi $0 \cdot \infty$ típusú határértékeket!

114.• $\displaystyle\lim_{x\to +0} x\ln x$, **115.**▷ $\displaystyle\lim_{x\to +0} x\ln\sin x$, **116.** $\displaystyle\lim_{x\to +0}\ln x\ln(x+1)$,

117. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} x^2 e^x$, **118.** $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} e^x\ln(-x)$,

119. $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\arcsin x \cdot \operatorname{ctg} x)$, **120.** $\displaystyle\lim_{x\to 0}(x \cdot \operatorname{ctg}\pi x)$,

121.• $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{v}{x}\right)$, $(v \in \mathbf{R})$, **122.**• $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^\varepsilon e^{-x}$, $(\varepsilon \in \mathbf{R})$,

123.▷ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\Big(\ln(1+\sin^2 x)\cdot\operatorname{ctg}\ln^2(1+x)\Big)$.

124.$^\bullet$ Legyen p egy tetszőleges polinomfüggvény, r egy teszőleges racionális törtfüggvény. Mutassuk meg, hogy

$$\lim_{x\to\infty} p(x)e^{-x} = 0, \quad \text{illetve} \quad \lim_{x\to\infty} r(x)e^{-x} = 0.$$

Számítsuk ki az alábbi $\infty - \infty$ típusú határértékeket!

125.$^\triangleright$ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$, **126.**$^\triangleright$ $\lim_{x\to\pi/2}\left(x \operatorname{tg} x - \frac{\pi}{2\cos x}\right)$,

127.$^\bullet$ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x\right)$, **128.** $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$,

129. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$, **130.*** $\lim_{x\to 1}\left(\frac{p}{1-x^p} - \frac{q}{1-x^q}\right)$, $p, q \neq 0$.

Számítsuk ki az alábbi 0^0, ∞^0 vagy 1^∞ típusú határértékeket!

131.$^\triangleright$ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$, **132.** $\lim_{x\to 0}(\sin x)^x$, **133.**$^\triangleright$ $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-0}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$,

134. $\lim_{x\to +0}(1+x)^{\ln x}$, **135.**$^\bullet$ $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{s}{x})^x$, $s \in \mathbf{R}$, **136.** $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Vizsgáljuk meg, hogy alkalmazható-e a L'Hospital szabály az alábbi határértékeknél.

137.$^\triangleright$ $\lim_{x\to 0}\frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}$, **138.**$^\triangleright$ $\lim_{x\to\infty}\frac{x - \sin x}{x + \sin x}$.

Határozzuk meg az alábbi függvényeknek a megadott intervallumokhoz tartozó infimumát és szuprémumát!

139. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $(1, \infty)$,

140. $f(x) = (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!})e^{-x}$, $(0, \infty)$, $n \in \mathbf{N}$ rögzített egész.

Határozzuk meg az alábbi függvények grafikonjának aszimptotáit!

141. $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x} - 3x$, **142.** $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$.

Függvények vizsgálata

M 11.15 *A függvények vizsgálatához és ábrázolásához az alábbiakra lehet szükség:*

(1) határozzuk meg a függvény értelmezési tartományát;
(2) vizsgáljuk meg, hogy a függvény páros-, páratlan-, vagy periodikus-e;
(3) keressük meg a folytonossági intervallumokat és a szakadási helyeket;
(4) vizsgáljuk meg a függvény viselkedését az értelmezési tartomány határpontjaiban, számítsuk a függvény határértékeit a szakadási pontokban és a ∞ és $-\infty$ helyeken, keressük meg az aszimptotákat;
(5) határozzuk meg a függvény grafikonjának metszéspontjait a koordinátatengelyekkel;
(6) keressük meg a szélsőértékhelyeket, és azokat a szakaszokat, ahol a függvény monoton növekvő, illetve csökkenő;

(7) *keressük meg az inflexiós pontokat, és azokat a szakaszokat, ahol a függvény konvex, illetve konkáv;*
(8) *esetleg egy-két további tulajdonság megállapítása, a grafikonon néhány pont koordinátáinak kiszámítása és az értékkészlet meghatározása után rajzoljuk fel a függvény grafikonját.*

Feladatok

Végezzük el az f függvény teljes vizsgálatát a bevezetőben leírtakat követve, ha $f(x)$ az alábbi képlettel van megadva:

143.▷ $\dfrac{x^3+1}{x^2}$, **144.**▷ $\sqrt[3]{1-x^3}$, **145.**▷ $x^6-3x^4+3x^2-1$,
146.▷ $\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x+1}$, **147.**▷ $\arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$, **148.**▷ $x^2e^{\frac{1}{x}}$,
149.▷ $x-2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{x+1}$, **150.**▷ $\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$, **151.**▷ $\dfrac{\ln x}{x}$,
152. x^x, **153.** $(x+1)^3\sqrt[3]{x^2}$, **154.** $x^2\ln x^2$,
155. x^2e^{-x}, **156.** $\sqrt{x}e^{\frac{1}{x}}$, **157.**⋆ $4e^{(\sqrt{3}-2)x}\sin x$,
158. $\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$.

Paraméteresen adott síkgörbék vizsgálata

D 11.16 **Síma görbeív**_nek nevezzük az $x=x(t)$, $y=y(t)$ $(t_1<t<t_2)$ paraméteres egyenletrendszerrel jellemzett síkbeli ponthalmazt, ha a (t_1,t_2) nyílt intervallumban_
1. az $x(t)$ és $y(t)$ akárhányszor differenciálhatók t szerint;
2. legfeljebb véges sok olyan t_0 van, ahol $\dot{x}(t_0)=0$ vagy $\dot{y}(t_0)=0$;
3. egyetlen olyan t_0 sincs, ahol egyidejűleg $\dot{x}(t_0)=\dot{y}(t_0)=0$ lenne.

T 11.17 *Síma görbeív bármely pontjában az y koordinátafüggvénynek x szerinti és az x koordinátafüggvénynek y szerinti differenciálhányadosa közül legalább az egyik létezik, mégpedig az $x_0=x(t_0)$ illetve $y_0=y(t_0)$ helyen*

$$y'(x_0)=\frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)},\ \text{ha } \dot{x}(t_0)\neq 0,\quad \left(\frac{dx}{dy}\right)_{y=y_0}=\frac{\dot{x}(t_0)}{\dot{y}(t_0)},\ \text{ha } \dot{y}(t_0)\neq 0.$$

T 11.18 *Síma görbeív bármely pontjában az y koordinátafüggvénynek x szerinti és az x koordinátafüggvénynek y szerinti második differenciálhányadosa közül legalább az egyik létezik, mégpedig az $x_0=x(t_0)$ helyen*

$$y''(x_0)=\left(\frac{dy'/dt}{dx/dt}\right)_{t=t_0}=\left(\frac{\ddot{y}\dot{x}-\dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}\right)_{t=t_0},\quad \text{ha } \dot{x}(t_0)\neq 0,$$

illetve az y és x felcserélésével adódó képlet érvényes az $y_0=y(t_0)$ helyen, ha $\dot{y}(t_0)\neq 0$.

Feladatok

A **D 11.16** szerint mely (t_1, t_2) intervallumokon lesz az alábbi paraméteresen megadott görbe síma görbeív?

159. $x = t^2,\ y = t^3,$ **160.** $x = |t|,\ y = t^3 + 1,$ **161.** $x = \cos\dfrac{1}{t},\ y = \sin\dfrac{1}{t}.$

Határozzuk meg az alábbi paraméteresen megadott $x \mapsto y$ függvény x szerinti első és második deriváltját a paraméter kiküszöbölése nélkül:

162. ▷ $x = 3t^2,\ y = 2t^3,$

163. $x = 6t^2,\ y = t^3,$

164. $x = e^t \cos t,\ y = e^t \sin t,$

165. $x = 3\,\mathrm{tg}\, t - 1,\ y = \frac{5}{\cos t} + 2,$

166. $x = \frac{2}{1+t^2},\ y = \frac{2}{t(1+t^2)}.$ 13.1.18

Határozzuk meg az alábbi paraméteres egyenletrendszerrel adott görbék t_0 paraméterértékhez tartozó érintőjének egyenletét:

167. $x = 4t + t^2,\ y = 2t^2,\ t_0 = 1,$

168. $x = 2t - t^2,\ y = 3t - t^3,$ (a) $t_0 = 0$, (b) $t_0 = 1$.

Határozzuk meg az alábbi paraméteres egyenletrendszerrel adott görbék t_0 paraméterértékhez tartozó simulókörének egyenletét:

169. $x = 2t - \dfrac{3}{t},\ y = 2t + \dfrac{3}{t},\ t_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}},$

170. $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t,\ t_0 = \pi/3.$

171. Mutassuk meg, hogy az $x = 2t + |t|,\ y = 5t^2 + 4t|t|$ paraméteres egyenletrendszerrel megadott $x \mapsto y$ függvény $t = 0$ esetén differenciálható.