11. Egyváltozós valós függvények menetének vizsgálata (megoldások)

1. $f'(x) = \frac{1}{3}x(7x+12)(x+2)^{-2/3}$, f' zérushelyei: $x_1 = 0$, $x_2 = -12/7$, f nem differenciálható: $x_3 = -2$.

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-12/7)$	$-12/7$	$(-12/7,0)$	0	$(0,\infty)$
f'	$+$	n.ért.	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	nincs sz.	$\nearrow$	MAX	$\searrow$	MIN	$\nearrow$

2. $f(x) = \begin{cases} 2-3x, & \text{ha } x \le -1/2; \\ x+4, & \text{ha } -1/2 \le x \le 3; \\ 3x-2, & \text{ha } 3 \le x. \end{cases}$ $f'(x) = \begin{cases} -3, & \text{ha } x < -1/2; \\ 1, & \text{ha } -1/2 < x < 3; \\ 3, & \text{ha } 3 < x. \end{cases}$

f'-nek nincs zérushelye, f nem differenciálható: $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 3$.

	$(-\infty,-1/2)$	$-1/2$	$(-1/2,3)$	3	$(3,\infty)$
f'	$-$	n.ért.	$+$	n.ért.	$+$
f	$\searrow$	MIN	$\nearrow$	nincs sz.	$\nearrow$

3. $f(x) = \begin{cases} x^2+x-2, & \text{ha } x \in (-\infty,-2] \cup [1,\infty); \\ -x^2-x+2, & \text{ha } x \in [-2,1]. \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{ha } x \in (-\infty,-2) \cup (1,\infty); \\ -2x-1, & \text{ha } x \in (-2,1). \end{cases}$

f' zérushelye: $x_1 = -1/2$, f nem differenciálható: $x_2 = -2$, $x_3 = 1$.

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1/2)$	$-1/2$	$(-1/2,1)$	1	$(1,\infty)$
f'	$-$	n.ért.	$+$	0	$-$	n.ért.	$+$
f	$\searrow$	MIN	$\nearrow$	MAX	$\searrow$	MIN	$\nearrow$

4. A $2|x| = |1+x|$ egyenlet megoldásai: $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{3}$. Így

$f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{ha } x \le -1/3; \\ x+1, & \text{ha } -1/3 \le x \le 1; \\ 2x, & \text{ha } 1 \le x. \end{cases}$ $f'(x) = \begin{cases} -2, & \text{ha } x < -1/3; \\ 1, & \text{ha } -1/3 < x < 1; \\ 2, & \text{ha } 1 < x. \end{cases}$

f'-nek nincs zérushelye, f nem differenciálható az x_1 és x_2 helyen.

	$(-\infty,-1/3)$	$-1/3$	$(-1/3,1)$	1	$(1,\infty)$
f'	$-$	n.ért.	$+$	n.ért.	$+$
f	$\searrow$	MIN	$\nearrow$	nincs sz.	$\nearrow$

5. $f'(x) = \cos x(2\sin x - \sqrt{3})$, f' zérushelyei: $x_1 = \pi/3$, $x_2 = \pi/2$, $x_3 = 2\pi/3$.

	$(0,\pi/3)$	$\pi/3$	$(\pi/3,\pi/2)$	$\pi/2$	$(\pi/2,2\pi/3)$	$2\pi/3$	$(2\pi/3,\pi)$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	MIN	$\nearrow$	MAX	$\searrow$	MIN	$\nearrow$

6. A függvény 2π szerint periodikus, így elég a vizsgálatot csak a $[0,2\pi)$ intervallumon elvégezni. $f'(x) = -2\sin x\cos x(1+2\cos x)$, f' zérushelyei: $x_1 = 0$, $x_2 = \pi/2$, $x_3 = 2\pi/3$, $x_4 = \pi$, $x_5 = 4\pi/3$, $x_6 = 3\pi/2$. f' előjelének megállapításában segíthet a sin, a cos és az $1+2\cos$ függvények grafikonjának ábrázolása. (A következő táblázatban N ill. X jelentése MIN ill. MAX.)

	0	$(0,\frac{\pi}{2})$	$\frac{\pi}{2}$	$(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3})$	$\frac{2\pi}{3}$	$(\frac{2\pi}{3},\pi)$	π	$(\pi,\frac{4\pi}{3})$	$\frac{4\pi}{3}$	$(\frac{4\pi}{3},\frac{3\pi}{2})$	$\frac{3\pi}{2}$	$(\frac{3\pi}{2},2\pi)$
f'	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	X	$\searrow$	N	$\nearrow$	X	$\searrow$	N	$\nearrow$	X	$\searrow$	N	$\nearrow$

7. $f(x) = x^x = e^{x\ln x},\ x > 0.$
$f'(x) = x^x(\ln x + 1),\ f'(\frac{1}{e}) = 0.$

	$(0,1/e)$	$1/e$	$(1/e,\infty)$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	MIN	$\nearrow$

8. $f(x) = e^{-x^2\ln x},\ x > 0.$
$f'(x) = -x^{1-x^2}(2\ln x + 1),\ f'(\frac{1}{\sqrt{e}}) = 0.$

	$(0,1/\sqrt{e})$	$1/\sqrt{e}$	$(1/\sqrt{e},\infty)$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	MAX	$\searrow$

9. $f(1) = \frac{1}{x}\,|_1 = 1,\ f'(1) = -\frac{1}{x^2}\,|_1 = -1,\ f''(1) = \frac{2}{x^3}\,|_1 = 2,$
$f'''(1) = -\frac{6}{x^4}\,|_1 = -6,\ f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5}$. A Taylor-polinom $1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3$. A maradéktag $R_3(x) = \dfrac{(x-1)^4}{\xi^5}$, ahol ξ az 1 és x közé esik.
Így $\dfrac{1}{x} = 1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3+\dfrac{(x-1)^4}{\xi^5}.$

10. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{e^\xi x^4}{24}$, ahol ξ az 1 és x közé esik.

11. $e^x = e + e(x-1) + \dfrac{e}{2}(x-1)^2 + \dfrac{e}{6}(x-1)^3 + \dfrac{e^\xi}{24}(x-1)^4$, ahol ξ az 1 és x közé esik.

12. $\sin x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(x-\frac{\pi}{6}) - \frac{1}{4}(x-\frac{\pi}{6})^2 - \frac{\sqrt{3}}{12}(x-\frac{\pi}{6})^3 + \frac{\sin\xi}{24}(x-\frac{\pi}{6})^4.$

13. $ax^3 + bx^2 + cx + d.$

14. $(a+b+c+d) + (3a+2b+c)(x-1) + (3a+b)(x-1)^2 + a(x-1)^3,$
a maradéktag 0.

15. Írjuk fel a P polinom $x_0 = 1$ ponthoz tartozó ötödfokú Taylor-formuláját. Mivel P hatodik deriváltja 0, ezért a maradéktag is 0. P deriváltjainak értéke az $x_0 = 1$ pontban: $P(1) = 0,\ P'(1) = 0,\ P''(1) = 0,\ P'''(1) = -6,\ P^{(4)}(1) = 24,\ P^{(5)}(1) = 120$; a Taylor-polinom: $\frac{-6}{3!}(x-1)^3 + \frac{24}{4!}(x-1)^4 + \frac{120}{5!}(x-1)^5$, azaz $P(x) = -(x-1)^3 + (x-1)^4 + (x-1)^5$.

16. $P(x) = 1 - 2(x+1) + 4(x+1)^2 - 3(x+1)^3 + (x+1)^4.$

17. $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots \dfrac{x^n}{n!} + \dfrac{e^\xi x^{n+1}}{(n+1)!},\ 0 < \xi < x$ vagy $x < \xi < 0.$

18. $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{m+1}\dfrac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + (-1)^m \cos\xi \dfrac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$, ha $n = 2m$, és $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{m+1}\dfrac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + (-1)^m \sin\xi \dfrac{x^{2m}}{(2m)!}$, ha $n = 2m-1$, és ahol $0 < \xi < x$ vagy $x < \xi < 0$.

19. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^m \dfrac{x^{2m}}{(2m)!} + (-1)^{m+1} \sin\xi \dfrac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}$, ha $n = 2m+1$, és $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^m \dfrac{x^{2m}}{(2m)!} + (-1)^{m+1} \cos\xi \dfrac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$, ha $n = 2m$, és ahol $0 < \xi < x$ vagy $x < \xi < 0$.

20. $f(x) = (1+x)^m$, $f'(x) = m(1+x)^{m-1}$, $f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}, \ldots,$ $f^{(n)}(x) = m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n}$, így $(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + R_n(x)$, ahol $R_n(x) = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\xi)^{m-n-1}$, és $0 < \xi < x$ vagy $x < \xi < 0$. Látható, hogy nemnegatív egész m értékekre és $n \geq m$ esetén e formula megegyezik a binomiális tétel szerintivel.

21. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^\xi$, ahol $|x| \leq 1$, ξ a 0 és x közé esik. $|R_n(x)| = \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^\xi < \dfrac{e}{(n+1)!}$, és $\dfrac{e}{(n+1)!} < 0{,}005$, ha $n \geq 5$.

22. $T_6(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!}$. Mivel a $\cos x$ függvény 7-edik Maclaurin-polinomja is 6-odfokú, hisz a hetedfokú tag együtthatója 0, ezért számolhatunk R_7-tel: $|R_7(x)| = \left|\frac{\cos\xi}{8!}x^8\right| \leq \frac{|x|^8}{8!}$, és $|x|^8/8! < 0{,}0001$, ha $|x| < 1{,}19$. (R_6-tal számolva azt kapjuk, hogy $|x| < 0{,}9$).

23. $|R_6(x)| = |-(\cos\xi)(x-1)^7/7!| \leq |x-1|^7/7!$ és ez kisebb mint $0{,}0001$, ha $|x-1| < 0{,}9067$, azaz ha $x \in (-0{,}0933; 1{,}9067)$.

24. Könnyen látható, hogy $k \leq n$ esetén $g^{(k)}(0) = p^{(k)}(0)$, így g és p n-edik Maclaurin-polinomjai megegyeznek.

25. Mindegyik függvény Maclaurin-polinomja $x + x^3$.

26. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1 - \frac{x^2}{2} + R_2(x) - 1}{x^2} = \frac{1}{2} + \lim_{x\to 0}\frac{R_2(x)}{x^2} = \frac{1}{2} + \lim_{x\to 0}\frac{x\sin\xi}{6} = \frac{1}{2}$, mivel $x \to 0$ esetén $\xi \to 0$ (és így $\sin\xi \to 0$), hisz ξ az x és 0 közé esik.

27. $\dfrac{1}{720}$. **28.** $\dfrac{1}{120}$. **29.** $\dfrac{1}{24}$.

30. A harmadik Maclaurin-formulát felírva azonnal kapjuk, hogy: $\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{6} + \operatorname{sh}\xi\frac{x^4}{24} > x + \frac{x^3}{6}$, mivel $0 < \xi < x$. Ennek egyszerű következménye: $\operatorname{sh} x > x$, ha $x > 0$.

32. $62^\circ = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{90}$ radián. $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{90}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi}{90}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{90}\right)^2 + R_2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{90}\right) \approx 0{,}4694654 + \frac{\sin\xi}{3!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^3$, ahol $\left|\frac{\sin\xi}{3!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^3\right| < \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{90}\right)^3 \approx 0{,}0000071$. Tehát

$\cos 62° \approx 0,4694654$, ahol a hiba legfeljebb $0,0000071$.

33. $\sin 43° \approx 0,68199832$, a hiba legfeljebb $0,0000000438$.

34. Mivel $\sqrt[3]{29} = \sqrt[3]{27+2} = 3(1+\frac{2}{27})^{1/3}$, ezért használhatjuk az alábbi Taylor-formulát:

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + R_n(x),$$

ahol $R_n(x) = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\xi)^{m-n-1}$, és $0 < \xi < x$ vagy $x < \xi < 0$. Ha $x = \frac{2}{27}$, $m = \frac{1}{3}$, akkor $\sqrt[3]{29} \approx 3(1 + \frac{2}{81} - \frac{4}{81^2} + \ldots + R_n(x))$. A maradéktagot megbecsülve $3|R_1(x)| < 3 \cdot 2 \cdot 2/81^2 < 0,002$, $3|R_2(x)| < 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5/81^3 < 0,0003$. Ez utóbbi már megfelelő pontosságot biztosít, így $\sqrt[3]{29} \approx 3(1 + \frac{2}{81} - \frac{4}{81^2}) \approx 3,072$.

35. $f'(x) = -\sin x - 4x$, $f''(x) = -\cos x - 4$, tehát $f'(0) = 0$, $f''(0) = -5 < 0$. Mivel az első nemnulla értékű derivált másodrendű és negatív értékű, ezért a függvénynek 0-ban maximuma van.

36. minimum

37. minimum

38. Mivel az első nemnulla értékű derivált harmadrendű, ezért a függvénynek 0-ban nincs szélsőértéke, inflexiós pontja van.

39. inflexiós pont

40. $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$, $f^{(4)}(0) = \operatorname{ch} 0 + \cos 0 = 2 > 0$. Mivel az első nemnulla értékű derivált negyedrendű és pozitív értékű, ezért a függvénynek 0-ban minimuma van.

41. Mivel az első nemnulla értékű derivált negyedrendű és negatív értékű, ezért a függvénynek 0-ban maximuma van.

42. Mivel az első nemnulla értékű derivált ötödrendű, ezért a függvénynek 0-ban nincs szélsőértéke, inflexiós pontja van.

43. $f'(x) = 3x^2 + 12x - 15$, zérushelyei $x_1 = -5$, $x_2 = 1$. Tehát szélsőérték lehet az $x_0 = -6$, $x_1 = -5$, $x_2 = 1$, $x_3 = 6$ pontokban. $f(-6) = 93$, $f(-5) = 103$, $f(1) = -5$, $f(6) = 345$, és f' negatív a $(-5,1)$ intervallumon. Tehát maximum az $x_1 = -5$ és $x_3 = 6$, minimum az $x_0 = -6$, $x_2 = 1$ pontokban van, abszolút maximum van az $x_3 = 6$, abszolút minimum az $x_2 = 1$ pontban.

44. Az előző feladat szerint f maximuma az $x = -5$, minimuma az $x = 1$ pontban van (ez abszolút minimum is). Abszolút maximum nincs, hisz a függvény értékkészletének szuprémuma 345, és ezt sehol sem veszi fel értékként.

45. $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, $x \neq 0$, f nem differenciálható: $x_1 = 0$, f' sehol nem 0; végpontok: $x_2 = -1$, $x_3 = 8$. $f(-1) = 1$, $f(0) = 0$ MIN, $f(8) = 4$ MAX.

46. $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{2x}{3}$, $x \neq 0$, f nem differenciálható: $x_1 = 0$, f' zérushelyei: $x_2 = -1$; $x_3 = 1$; végpontok: $x_4 = -1$, $x_5 = \sqrt{2}$. $f(-1) = \frac{2}{3}$ MAX, $f(0) = 0$ MIN, $f(1) = \frac{2}{3}$ MAX, $f(\sqrt{2}) = \sqrt[3]{2} - \frac{2}{3} < \frac{2}{3}$.

47. $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{2x}{3}$, $x \neq 0$; f nem differenciálható: $x_1 = 0$; f' zérushelyei: $x_2 = -1$; $x_3 = 1$; végpontok: $x_4 = -1$, $x_5 = \sqrt{8}$. f' előjelváltásait is figyelembe véve: $f(-1) = \frac{2}{3}$, $f(0) = 0$ (lokális) MIN, $f(1) = \frac{2}{3}$ (abszolút) MAX, $f(\sqrt{8}) = \frac{2}{3}$, tehát abszolút MIN nincs.

48. $f'(x) = e^{-x}(1-x)$. f' zérushelye $x = 1$, ahol f' előjelet vált. $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, $f(0,5) > 0$, tehát maximuma van f-nek az $x = 1$ pontban, minimuma nincs.

49. $f(1) = 0$ MIN; $f(e) = e^2$ MAX. **50.** $f(0) = 1$ MAX, $f(2) = 1/e^2$ MIN.

51. $f(-2) = 5$ MAX, $f(-1) = f(3) = 2$ (abszolút) MIN, $f(1) = 6$ MAX, abszolút maximum nincs, mert $\lim_{x\to 8-0} f(x) = 7$.

52. $f(-1) = 1/e$, $f(1) = e$, $\lim_{x\to -0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to +0} f(x) = \infty$. f-nek se minimuma, se maximuma nincs.

53. $f'(x) = x^{m-1}(1-x)^{n-1}(m-(n+m)x)$. f' zérushelyei: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{m}{m+n}$. Az $x_3 = \frac{m}{m+n}$ helyen maximum van, és $f(x_3) = m^m n^n/(m+n)^{m+n}$. $x_1 = 0$ minimumhely, ha m páros, nem szélsőértékhely, ha páratlan. $x_2 = 1$ minimumhely, ha n páros, nem szélsőértékhely, ha páratlan.

54. Tegyük fel, hogy g-nek x_0-ban minimuma van. Ekkor van x_0-nak olyan K környezete, hogy $x \in K$ esetén $g(x) \geq g(x_0)$. Ha f monoton nő, akkor $f(g(x)) \geq f(g(x_0))$, vagyis x_0 minimuma az $f \circ g$ függvénynek is. Maximumra, és monoton csökkenő függvényre a bizonyítás hasonló.

55. Az f függvény helyett elég megvizsgálni a $g(x) = 3x^4 + 8x^3 - 18x^2 + 56$ függvényt, hisz g-nek ott van maximuma, ahol f-nek minimuma, és fordítva, hisz a reciprokfüggvény monoton csökkenő. Mivel $g'(x) = 12x(x^2+2x-3)$, $g''(x) = 12(3x^2+4x-3)$, g' zérushelyei: -3, 0, 1, és e pontokban $g''(-3) > 0$, $g''(0) < 0$, $g''(1) > 0$, ezért az $x = -3$ és $x = 1$ pontokban (g-nek minimuma) f-nek maximuma van, az $x = 0$ pontban (g-nek maximuma) f-nek minimuma van.

56. Az f függvénynek ott van minimuma, ahol a $g : x \mapsto 4 - \sqrt{e - e^{x^2}}$ függvénynek, hisz az arctg függvény monoton növő. g-nek ott van minimuma, ahol a $h : x \mapsto e - e^{x^2}$ függvénynek maximuma, hisz az $y \mapsto 4 - \sqrt{y}$ függvény monoton csökkenő. h-nak maximuma van az $x = 0$ pontban, így ott f-nek minimuma van, míg az $x = 1$, $x = -1$ pontokban h-nak minimuma, így f-nek maximuma van.

57. $x = 0$ maximum. (az arctg értékkészletén a cos függvény monoton csökken.)

58. $x = -\frac{1}{2}$ maximum.

59. Az $f(x) = 3x - x^3$ $(-2 \leq x \leq 2)$ függvény szélsőértékhelyei: abszolút maximum van az $x = -2$, $x = 1$ pontokban, ahol $f(x) = 2$, míg abszolút minimum van az $x = -1$, $x = 2$ pontokban, ahol $f(x) = -2$. Ebből következik, hogy $|f(x)| \leq 2$.

60. 1. megoldás: Ahol az $f(x) = |a\sin x + b\cos x|$ függvény nem differenciálható, ott értéke 0, azaz minimuma van. Ebből következik, hogy maximuma csak ott lehet, ahol $(a\sin x + b\cos x)' = 0$, azaz ahol $\operatorname{tg} x = a/b$. Mivel $\sin x = \operatorname{tg} x/\sqrt{1+\operatorname{tg} x} = a/\sqrt{a^2+b^2}$, $\cos x = 1/\sqrt{1+\operatorname{tg} x} = b/\sqrt{a^2+b^2}$, ezért $|a\sin x + b\cos x| \leq |a^2/\sqrt{a^2+b^2} + b^2/\sqrt{a^2+b^2}| = \sqrt{a^2+b^2}$.

2. megoldás: Tekintsük az (a, b) és a $(\sin x, \cos x)$ vektorokat. Mivel az utóbbi vektor egységvektor, ezért $|(a;b)(\sin x;\cos)| = |a\sin x + b\cos x|$ nem más, mint az $(a;b)$ vektornak a $(\sin x;\cos x)$ vektor egyenesére eső merőleges vetületének hossza, ami kisebb vagy egyenlő az $(a;b)$ vektor hosszánál, azaz $\sqrt{a^2+b^2}$-nél.
3. megoldás: Lásd a **1.??** feladatot.

61. $f(x) = x^m(1-x)^n$, $f'(x) = x^{m-1}(1-x)^{n-1}(m-(n+m)x)$. f' zérushelyei 0, 1, $\frac{m}{m+n}$. Az $\frac{m}{m+n}$ helyen maximuma van f-nek, és $f(\frac{m}{m+n}) = m^m n^n/(m+n)^{m+n}$, ami bizonyítja az egyenlőtlenséget.

62. A törtfüggvényt f-fel jelölve $f'(x) = (x^2-1)/(x^2+x+1)^2$, amiből látható, hogy f a $(-\infty;-1)$ és az $(1;\infty)$ intervallumon nő, a $(-1;1)$ intervallumon csökken, $x=-1$-ben f-nek maximuma, $x=1$-ben minimuma van, és $f(-1) = 2$, $f(1) = \frac{2}{3}$. Mivel $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$, ezért e szélsőértékek egyúttal abszolút szélsőértékek is.

63. Tekintsük az $f(x) = x^2/(x^3+100)$ függvényt a $[0;\infty)$ intervallumon. $f'(x) = x(200-x^3)/(x^3+100)^2$, amiből kapjuk, hogy f monoton növekvő a $(0, \sqrt[3]{200}$ intervallumon és monoton csökkenő a $(\sqrt[3]{200}, \infty)$ intervallumon. Az $5 < \sqrt[3]{200} < 6$ egyenlőtlenségből azt kapjuk, hogy a_5 vagy a_6 a legnagyobb. $a_5 = 1/9$, $a_6 = 9/79$, tehát a_6 a legnagyobb.

64. a_{14}.

65. a_{272}.

66. (a) $f(x) = x^3+px+q = 0$, $f'(x) = 3x^2+p$. f-nek szélsőértéke lehet az $x_1 = \sqrt{-p/3}$ és az $x_2 = -\sqrt{-p/3}$ pontokban (ha $p<0$). f-nek egy valós gyöke van, ha f monoton növő $(-\infty,\infty)$-en, (azaz, ha $p \geq 0$), vagy ha f nem vált előjelet a minimum- és maximumhelyek között, azaz $f(x_1)f(x_2) > 0$. Ebből $f(x_1)f(x_2) = q^2 - \left(\left(\sqrt{-p/3}\right)^3 + p\sqrt{-p/3}\right)^2$ miatt $p^3/27 + q^2/4 > 0$ adódik.
(b) Hasonlóan számolva: $p^3/27 + q^2/4 < 0$.

67. f lokális maximumhelye: $x=1$, és $f(1) = \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = f(0) = \dfrac{1}{3}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, tehát $\sup\limits_{(0,\infty)} f(x) = \max\limits_{(0,\infty)} f(x) = f(1) = \dfrac{1}{2}$, $\inf\limits_{(0,\infty)} f(x) = 0$.

68. $f'(x) = 4x/(3+x^2)^2 > 0$, ha $x \in (0,\infty)$, tehát f az adott intervallumon szigorúan monoton nő. $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = f(0) = \dfrac{1}{3}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, tehát $\sup\limits_{(0,\infty)} f(x) = 1$, $\inf\limits_{(0,\infty)} f(x) = \dfrac{1}{3}$.

69. $|x^2-x^3| = x^2-x^3$, ha $x \in [0,1]$. Mivel az $x \mapsto x^2-x^3$ függvény folytonos, ezért Weierstrass tétele miatt elég e függvény maximumát megkeresni. A maximumhely $x = \frac{2}{3}$, ahol $f-g$ értéke $\frac{4}{27}$, tehát $\rho(f,g) = \frac{4}{27}$.

70. Hasonlóan az előző feladathoz: az $x \mapsto |\sin x - \cos x|$ függvény maximumhelye $x = 3\pi/4$, ahol $f-g$ értéke $\sqrt{2}$, tehát $\rho(f,g) = \sqrt{2}$.

71. Legyen $F(x) = |x^2-(2x+c)|$. $F'(x) = 2x-2$, ha $x^2-2x-c > 0$, illetve $F'(x) = -2x+2$, ha $x^2-2x-2 < 0$, $F'(x) = 0$, ha $x=1$. Ahol F

nem differenciálható, ott F-nek minimuma van, mivel F értéke 0. F-nek maximuma lehet az $x = 0$, $x = 1$ vagy $x = 2$ helyeken. $F(0) = F(2) = |c|$, $F(1) = |c + 1|$, és e három érték maximuma akkor a legkisebb, ha $c = -1/2$, és ekkor $\rho(x^2, 2x - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.

72. Az egyik szám x, a másik $b - x$, a maximálandó függvény $f(x) = x(b - x)$, melynek maximuma $b/2$-ben van, tehát mindkét szám $b/2$.

73. Az egyenlőszárú derékszögű háromszögnek. (Az átfogót c-vel, az egyik befogót a-val, a vele szemközti szöget α-val, a háromszög területét T-vel jelölve $2T = a\sqrt{c^2 - a^2}$ vagy $2T = c^2 \sin\alpha\cos\alpha$.)

74. Melynek magassága és az alaplapjának átmérője megegyezik.

75. 1; 3.

76. $x = a/\sqrt{2}$, $y = b/\sqrt{2}$, $T = ab$.

77. Az összeg felülről nem korlátos, minimuma $4f$.

78. $x = a/6$.

79. $\dfrac{dH}{dk} = 2k\sum_{i=1}^{4} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{4} x_i y_i$ $\dfrac{d^2H}{dk^2} = 2\sum_{i=1}^{4} x_i^2 > 0$, tehát H konvex, így minimuma van, ha $\dfrac{dH}{dk} = 0$, azaz ha $k = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{4} x_i^2} = 3,9$. (Az általános eset leírása megtalálható a tankönyvben.)

80. A szükséges idő: $t(x) = \dfrac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \dfrac{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}{v_1}$, így ez a függvény minimalizálandó. $t'(x) = \dfrac{x}{v_1\sqrt{a^2 + x^2}} - \dfrac{c - x}{v_2\sqrt{b^2 + (d - x)^2}} = \dfrac{\sin\alpha_1}{v_1} - \dfrac{\sin\alpha_2}{v_2}$.

81. A minimalizálandó függvény: $t(x) = \sqrt{x^2 + (1/4)^2} + k\sqrt{(1 - x)^2 + (3/4)^2}$, ahol a) $k = 1$, b) $k = 3$. A szélsőértékhelyek: a) $x = 1/4$, b) $x = 3/4$. A b) esetben a gyök meghatározása nehézségekkel járhat.

82. Az $I(\alpha) = k\dfrac{\sin\alpha\cos^2\alpha}{r^2}$, ($k$ konstans) szélsőértékhelye: $\alpha = \operatorname{arctg}(1/\sqrt{2})$ vagy $\alpha = \arcsin(1/\sqrt{3})$, azaz $\alpha \approx 35,264°$, ahonnan $m = r/\sqrt{2}$.

83. Ha a gerenda alsó vége x távolságra van az ajtóval szemközti faltól, felső végpontja y távolságra a földtől, akkor a gerenda L hossza nem lehet nagyobb a $\sqrt{x^2 + y^2}$ értéknél, tehát $L \le \sqrt{x^2 + y^2}$. Mivel $2/y = (x-4)/x$, ezért $L \le \sqrt{x^2 + (2x/(x - 4))^2}$. Keressük tehát a $g(x) = \sqrt{x^2 + (2x/(x - 4))^2}$ függvény minimumát. E minimum az $x_0 = 4 +$

$\sqrt[3]{16}$ pontban van, tehát a gerenda legfeljebb
$g(x_0) = 2\sqrt{5 + 3\sqrt[3]{4} + 6\sqrt[3]{2}}$ m hosszú lehet.

84. Először tegyük fel, hogy $f'(x_0) > 0$. Ekkor $f' > 0$ az x_0 egy teljes környezetének minden pontjában, így f invertálható. Inverzét jelölje g, és legyen $y_0 = f(x_0)$. Az inverz függvény differenciálási szabálya szerint $g'(y_0) = 1/f'(x_0)$. Így ha f konvex, azaz f' monoton növő, akkor $1/f'$ monoton csökkenő, azaz g konkáv. A többi eset hasonlóan vizsgálható.

85. $f''(x) > 0$, ha $x > 0$, $f''(x) < 0$, ha $x < 0$, így

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
f''	$-$	0	$+$
f	$\frown$	INFL	$\smile$

86. Mivel az $f(x) = \sqrt[3]{x}$ függvény a $g(x) = x^3$ függvény inverze, és g-nek a $(0, 0)$ pont inflexiós pontja, ezért az f függvénynek is $(0, 0)$ lesz az inflexiós pontja. A kettővel ezelőtti feladat alapján f konvex a $(-\infty, 0)$ és konkáv a $(0, \infty)$ intervallumon.

87. $f'(x) = 1 + \dfrac{5}{3}x^{2/3}, \quad f''(x) = \dfrac{10}{9\sqrt[3]{x}}$

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
f''	$-$	n.ért.	$+$
f	$\frown$	INFL	$\smile$

Az f'' függvénynek nincs zérushelye, de nincs értelmezve az $x_0 = 0$ pontban. Mivel x_0-ban f differenciálható, azaz f grafikonjának van érintője, és ott f konkávból konvexbe vált, ezért f-nek 0-ban inflexiós pontja van.

88. Konkáv, ha $x < 5$, konvex, ha $x > 5$, az $x_0 = 5$ pontban inflexiós pontja van.

89. $f''(x) = \dfrac{1}{x}(\cos(\ln x) - \sin(\ln x)) = \dfrac{\sqrt{2}}{x}\sin(\dfrac{\pi}{4} - \ln x)$, $f''(x) = 0$, ha $x = \exp(\dfrac{\pi}{4} + k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$. Az f'' függvény e pontokban előjelet vált, így e pontok mind inflexiós pontok. f konvex, ha $x \in \left(\exp(-\frac{3}{4}\pi + 2k\pi), \exp(\frac{1}{4}\pi + 2k\pi)\right)$, és f konkáv, ha $x \in \left(\exp(\frac{1}{4}\pi + 2k\pi), \exp(\frac{5}{4}\pi + 2k\pi)\right)$.

90. $f'(x) = \begin{cases} -5x^4, & \text{ha } x > 1 \\ 5x^4, & \text{ha } x < 1 \end{cases} \quad f''(x) = \begin{cases} -20x^3, & \text{ha } x > 1 \\ 20x^3, & \text{ha } x < 1 \end{cases}.$

Az $x = 1$ pontban a függvény nem differenciálható, mert $\lim_{x\to 1+0} f'(x) \neq \lim_{x\to 1-0} f'(x)$, így ott nincs inflexiós pontja. (Azt mondjuk, hogy x_0 töréspontja az f függvénynek, ha x_0 folytonossági hely, $\lim_{x\to 1+0} f'(x)$ és $\lim_{x\to 1-0} f'(x)$ létezik, de különbözők.)

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
f''	$-$	0	$+$	n.ért.	$-$
f	$\frown$	INFL	$\smile$	töréspont	$\frown$

91. $f''(0) = 0, \quad f'''(0) = 6 \neq 0$, az $x = 0$ pont inflexiós pont.

92. $f''(0) = f'''(0) = \ldots = f^{(2n)}(0) = 0$, de $f^{(2n+1)}(0) = (2n+1)! \neq 0$, vagyis az első nem-nulla derivált rendje páratlan, így f-nek $x = 0$-ban inflexiós pontja van.

93. $f''(0) = f'''(0) = \ldots = f^{(2n-1)}(0) = 0$, de $f^{(2n)}(0) = (2n)! \neq 0$, vagyis az első nem-nulla derivált rendje páros, így f-nek $x = 0$-ban nincs inflexiós pontja, minimuma van.

94. $f''(x) = 0$, ha $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$, $k \in \mathbf{Z}$. E pontok mindegyike inflexiós pont, mivel f''' e pontok egyikében sem 0.

95. $f''(x) = \operatorname{sh} x - \sin x = 0$, ha $x = 0$. Az f''-nek más zérushelye nincs, mert $x > 0$ esetén $\operatorname{sh} x > x$, $\sin x < x$, míg $x < 0$ esetén $\operatorname{sh} x < x$, $\sin x > x$. $f'''(0) = f^{(4)}(0) = 0$, $f^{(5)}(0) = 2 \neq 0$, tehát az első nem-nulla derivált rendje páratlan, így f-nek $x = 0$-ban inflexiós pontja van.

96. ld. az előző feladatot.

97. $f''(x) = \dfrac{2(x^3 + 3x^2 - 3x - 1)}{(x^2+1)^3}$. f'' zérushelyei: $x_1 = 1$, $x_2 = -2 + \sqrt{3}$, $x_3 = -2 - \sqrt{3}$.

	$(-\infty, -2-\sqrt{3})$	$(-2-\sqrt{3}, -2+\sqrt{3})$	$(-2+\sqrt{3}, 1)$	$(1, \infty)$
f''	$-$	$+$	$-$	$+$
f	$\frown$	$\smile$	$\frown$	$\smile$

Tehát f-nek mindhárom helyen inflexiós pontja van. Az inflexiós pontok koordinátái: $(-2-\sqrt{3}, \frac{1-\sqrt{3}}{4})$, $(-2+\sqrt{3}, \frac{1+\sqrt{3}}{4})$, $(1, 1)$. Könnyen ellenőrizhető, hogy e pontok bármelyikéből a másik kettőbe mutató vektorok egyező állásúak, vagyis a pontok egy egyenesen vannak. Ennek az egyenesnek az egyenlete: $x - 4y + 3 = 0$.

98. Az $f''(x) = 6(2x^2 + cx + 1) \geq 0$ egyenlőtlenség akkor áll fenn minden x valós számra, ha $c^2 - 8 \leq 0$, azaz ha $|c| \leq 2\sqrt{2}$.

99. f-nek inflexiós pontja van az x_0 pontban, ha $f''(x_0) = 0$ és f'' ott előjelet vált. Ez akkor történik meg, ha az $f''(x) = 12x^2 + 6ax + 2b = 0$ egyenletnek van két különböző valós gyöke, vagyis ha diszkriminánsa pozitív, tehát, ha $3a^2 - 8b > 0$.

100. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{2x} = \dfrac{1}{2}$, mivel $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. (Valaki persze kiszámíthatja a $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ határértéket a L'Hospital szabállyal is, azt azonban ne felejtsük el, hogy a sin függvény differenciálásához szükségünk volt a $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ határérték ismeretére.)

101. $\dfrac{a}{b}$. **102.** 1. **103.** 1.

104. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax} - e^{-ax}}{\ln(1+x)} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ae^{ax} + ae^{-ax}}{1/(1+x)} = 2a$.

105. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt[3]{1+2x} + 1}{\sqrt{2+x} + x} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2/(3\sqrt[3]{(1+2x)^2}}{1/(2\sqrt{2+x}) + 1} = \dfrac{4}{9}$.

106. $-\dfrac{1}{2}$.

107. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{xe^{x/2}}{e^x + x} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{x/2}(1+x/2)}{e^x+1} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{x/2}(1+x/4)}{e^x} =$
$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(1+x/4)}{e^{x/2}} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1/2}{e^{x/2}} = 0.$

108. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x^2}{\sqrt{x}} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2/x}{1/(2\sqrt{x})} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4}{\sqrt{x}} = 0.$

109. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x \ln x}{e^x + x} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x \ln x + e^x/x}{e^x+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x + 1/x}{1+e^{-x}} = \infty.$

110. $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{\ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{e^x - e^a}{(x-a)e^x} = \lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{1 - e^a e^{-x}}{(x-a)} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{e^a e^{-x}}{1} = 1.$

111. $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{\ln x}{1+\ln\sin x} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to +0} \dfrac{\sin x}{x}\dfrac{1}{\cos x} = 1.$

112. $\lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to 1-0} -\dfrac{\pi(1-x)}{2\cos^2\frac{\pi x}{2}} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{\pi}{-2\pi\cos\frac{\pi x}{2}\sin\frac{\pi x}{2}} = -\infty.$

113. Legyen f és g két olyan egyváltozós valós függvény, hogy $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$. Ha $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = c > 1$, akkor a határérték definíciója szerint van olyan x_0 szám, hogy $x > x_0$ esetén $f(x)/g(x) > 1$, azaz $f(x) > g(x)$. Hasonlóképpen, ha $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = c < 1$, akkor van olyan x_0 szám, hogy $x > x_0$ esetén $f(x) < g(x)$. Számítsuk a megadott három függvény hányadosainak határértékét.
$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log_a x}{x^k} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log_a e}{kx^k} = 0.$
$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^k}{a^x} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{kx^{k-1}}{a^x \ln a} \overset{L}{=} \ldots \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{k!}{a^x(\ln a)^k} = 0.$
$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log_a x}{a^x} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log_a e}{xa^x \ln a} = 0.$
Így a reciprokokra: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^k}{\log_a x} = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a^x}{x^k} = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a^x}{\log_a x} = \infty$. Tehát, van olyan x_0, hogy $x > x_0$ esetén $\log_a x < x^k < a^x$.

114. $\lim\limits_{x\to +0} x\ln x = \lim\limits_{x\to +0} \dfrac{\ln x}{1/x} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to +0} \dfrac{1/x}{-1/x^2} = \lim\limits_{x\to +0}(-x) = 0.$

115. $\lim\limits_{x\to +0} x\ln\sin x = \lim\limits_{x\to +0} \dfrac{\ln\sin x}{1/x} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to +0} \left(-x\cos x \dfrac{x}{\sin x}\right) = 0.$

116. 0. **117.** $\lim\limits_{-\infty} \dfrac{x^2}{e^{-x}} = 0.$ **118.** 0. **119.** 1.

120. $\dfrac{1}{\pi}.$

121. $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(1+\dfrac{v}{x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(1+\dfrac{v}{x}\right) / \dfrac{1}{x} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{vx}{x+v} = v.$

122. Ha $\varepsilon \le 0$, akkor a határérték nyilvánvalóan 0. Egyébként pedig használjuk a L'Hospital szabályt. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^\varepsilon}{e^x} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\varepsilon x^{\varepsilon-1}}{e^x}$. Ha $\varepsilon - 1 \le 0$, akkor e határérték 0, ha nem, még egyszer alkalmazzuk a L'Hospital szabályt.

$\lim_{x\to\infty} \frac{\varepsilon x^{\varepsilon-1}}{e^x} \overset{L}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\varepsilon(\varepsilon-1)x^{\varepsilon-2}}{e^x}$. Ha $\varepsilon - 2 \le 0$, akkor e határérték 0, ha nem, hasonlóképpen folytatjuk az eljárást, míg végül $\varepsilon - k \le 0$ nem teljesül. A határérték 0.

123. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\sin^2 x)}{\operatorname{tg}\ln^2(1+x)} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin x\cos x}{1+\sin^2 x} \Big/ \dfrac{2\ln(1+x)}{(1+x)\cos^2\ln^2(1+x)} =$
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)\cos x\cos^2\ln^2(1+x)}{1+\sin^2 x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\ln(1+x)} \overset{L}{=} 1 \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{1/(1+x)} = 1.$

124. $\lim_{x\to\infty} p(x)e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{\exp x}$ egy $\frac{\infty}{\infty}$ típusú határérték, melynek értéke 0. Ezt a L'Hospital szabály n-szeri alkalmazásával kapjuk meg, ahol n a p polinom foka. Ha $r(x) = p(x)/q(x)$, ahol p és q két polinom, és x_0 egy olyan szám, melyre $x > x_0$ esetén $|q(x)| > 1$ (bizonyítsuk be, hogy ilyen szám mindig van), akkor $|r(x)| = |p(x)|/|q(x)| < |p(x)|$, ha $x > x_0$. Így $-|p(x)| < r(x) < |p(x)|$, vagyis $-|p(x)|e^{-x} < r(x)e^{-x} < |p(x)|e^{-x}$, és akkor a csendőrelv alkalmazásával kapjuk, hogy $\lim_{x\to\infty} r(x)e^{-x} = 0$.

125. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x\sin x - x}{x\sin x} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x - 1}{\sin x + x\cos x} \overset{L}{=}$
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-2\sin 2x}{2\cos x - x\sin x} = 0.$

126. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(x\operatorname{tg} x - \dfrac{\pi}{2\cos x}\right) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{2x\sin x - \pi}{2\cos x} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{2\sin x + 2x\cos x}{-2\sin x} = -1.$

127. 0. **128.** $\frac{1}{2}$. **129.** $\frac{1}{2}$.

130. Ha $p \ne q$ és $p \ne 1$, $q \ne 1$, akkor:
$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{p(1-x^q) - q(1-x^p)}{(1-x^p)(1-x^q)} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x^{p-1} - x^{q-1})pq}{-px^{p-1} - qx^{q-1} + (p+q)x^{p+q-1}} \overset{L}{=}$
$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\big((p-1)x^{p-2} - (q-1)x^{q-2}\big)pq}{-p(p-1)x^{p-2} - q(q-1)x^{q-2} + (p+q)(p+q-1)x^{p+q-2}} = \dfrac{p-q}{2}.$
Ugyanez adódik (nyilvánvalóan) a $p = q$ esetben, valamint (lényegileg ugyanígy) a $p = 1$, $q = 1$ esetben.

131. A határérték ∞^0 típusú. $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x} = e^{\sin x \ln\frac{1}{x}}$, ahol a kitevő $0\cdot\infty$ típusú. A $\sin x\ln\dfrac{1}{x} = \dfrac{\ln(1/x)}{1/\sin x}$ átalakítás után L'Hospital szabállyal kapjuk, hogy $\lim\limits_{x\to 0}\sin x\ln\dfrac{1}{x} = 0$, tehát $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x} = e^{\sin x\ln\frac{1}{x}} = e^0 = 1$.

132. A határérték 0^0 típusú. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x = \lim\limits_{x\to 0} e^{x\ln\sin x} = 1$.

133. A határérték ∞^0 típusú. $(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x} = e^{\operatorname{ctg} x\ln\operatorname{tg} x}$, és $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\operatorname{ctg} x\ln\operatorname{tg} x =$
$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \dfrac{\ln\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} = \lim\limits_{\substack{y=\operatorname{tg} x\\ y\to\infty}} \dfrac{\ln y}{y} \overset{L}{=} \lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{1}{y} = 0$, ezért $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x} = e^0 = 1$.

134. A határérték 1^∞ (pontosan $1^{-\infty}$) típusú. $\lim\limits_{x\to+0}(1+x)^{\ln x} = \lim\limits_{x\to+0} e^{\ln x\ln(1+x)} = 1$.

135. e^s. **136.** ∞.

137. A határérték létezik, és 0, ugyanis
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$
A deriváltak hányadosának azonban nem létezik határértéke, mert
$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\left(-\cos\frac{1}{x}\right),$$
így a L'Hospital szabály nem alkalmazható. (Ez nem mond ellent a **T 11.12** tételnek.)

138. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}=1$, tehát a határérték létezik. Másrészt az $\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$ tört számlálóját és nevezőjét is deriválva a kapott $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$ határérték nem létezik, hisz minden egész k-ra az $x=(2k+1)\pi$ helyen a nevező 0, és így e pont környezetében a függvény nem korlátos, az $x=2k\pi$ helyen pedig a függvény értéke 0.

139. f-nek lokális maximuma van az $x=e$ helyen, és $f(e)=\frac{1}{e}$, $\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, tehát $\sup\limits_{(1,\infty)}f(x)=\max\limits_{(1,\infty)}f(x)=f(1)=\dfrac{1}{e}$, $\inf\limits_{(1,\infty)}f(x)=0$.

140. $f'(x)=-\dfrac{x^n}{n!}e^{-x}<0$, ha $x\in(0,\infty)$, azaz f szigorúan monoton csökkenő ezen az intervallumon.
$\lim\limits_{x\to+0}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, tehát $\sup\limits_{(0,\infty)}f(x)=1$, $\inf\limits_{(0,\infty)}f(x)=0$.

141. A L'Hospital szabály többszöri alkalmazásával:
$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln^2 x}{x^2}-3=-3, \text{ és}$$
$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln^2 x}{x}=0.\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln^2 x}{x}-3x\right)=\infty.$$
Aszimptoták: $y=-3x$ és $x=0$.

142. $a=\lim\limits_{x\to\pm\infty}xe^{\frac{1}{x}}=\pm\infty$, így ferde aszimptota nincs. A L'Hospital szabály többszöri alkalmazásával: $\lim\limits_{x\to+0}x^2e^{\frac{1}{x}}=\infty$, és $\lim\limits_{x\to-0}x^2e^{\frac{1}{x}}=0$. Tehát az egyetlen aszimptota: $x=0$.

143. (1) $\operatorname{Dom} f=\mathbf{R}\setminus\{0\}$
(3) f folytonos az értelmezési tartományán.

(4) $\lim_{x\to 0}f(x)=\infty$, tehát az $x=0$ egyenletű egyenes függőleges aszimptota. $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty$.
$a=\lim_{x\to\pm\infty}f(x)/x=1$,
$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax)=0$,
tehát a ferde aszimptota egyenlete $y=x$.

(5) $f(-1) = 0$
(6) $f'(x) = 1 - 2/x^3$, $f''(x) = 6/x^4$, f' zérushelye $x = \sqrt[3]{2}$, tehát

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \sqrt[3]{2})$	$\sqrt[3]{2}$	$(\sqrt[3]{2}, \infty)$
f'	$+$	n.ért.	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	pólus	$\searrow$	MIN	$\nearrow$

(7) $f''(x) > 0$, ha $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, így f mindenütt konvex, inflexiós pontja nincs.
(8) $f(\sqrt[3]{2}) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$.

144. (1) $\mathrm{Dom}\, f = \mathbf{R}$
(3) f mindenütt folytonos.
(4) Függőleges aszimptota nincs.
$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty$.
$a = -1$, $b = 0$, tehát a ferde aszimptota egyenlete $y = -x$.
(5) $f(0) = 1$, $f(1) = 0$
(6) $f'(x) = -x^2/\sqrt[3]{(1-x^3)^2}$, $f''(x) = -2x/\sqrt[3]{(1-x^3)^5}$, f' zérushelye $x = 0$, minden x-re $f'(x) \le 0$. f nem differenciálható, ha $x = 1$, és $\lim_{x\to 1} f'(x) = \infty$.
(7) $f''(x) = 0$, ha $x = 0$. f'' nincs értelmezve az $x = 1$ pontban, de itt inflexiós pont van függőleges érintővel.

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
f''	$+$	0	$-$	∞	$+$
f'	$-$	0	$-$	∞	$-$
f	$\searrow \smile$	INFL	$\searrow \frown$	INFL	$\searrow \smile$

145. (1) $\mathrm{Dom}\, f = \mathbf{R}$
(2) f páros függvény, így elég csak a $[0, \infty)$ intervallumon vizsgálni.
(3) f mindenütt folytonos.
(4) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$.
Mivel $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x = \pm\infty$, ezért aszimptoták nincsenek.
(5) $f(0) = -1$, f zérushelyei -1 és 1, mivel $f(x) = (x^2-1)^3$.
(6-7) $f'(x) = 6x(x^2-1)^2$, $f''(x) = 6(5x^2-1)(x^2-1)$. f' zérushelyei 0, 1, -1, f'' zérushelyei $\pm 1/\sqrt{5}$, ± 1. $x \ge 0$ esetén $f'(x) \ge 0$, $x \le 0$ esetén $f'(x) \le 0$. $f''(x) > 0$, ha
$x \in (-\infty, -1) \cup (-1/\sqrt{5}, 0) \cup (0, 1/\sqrt{5}) \cup (1, \infty)$.

	0	$(0,1/\sqrt{5})$	$1/\sqrt{5}$	$(1/\sqrt{5},1)$	1	$(1,\infty)$
f''	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
f'	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$
f	MIN	$\nearrow \smile$	INFL	$\nearrow \frown$	INFL	$\nearrow \smile$

(8) $f(1/\sqrt{5}) = f(-1/\sqrt{5}) = -\frac{64}{125} = -0,512.$

146. (1) $\mathrm{Dom}\, f = \mathbf{R}$
(3) f mindenütt folytonos.
(4) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Így az $y = 0$ egyenletű egyenes a függvény egyetlen aszimptotája.
(5) $f(0) = -1$. A függvénynek zérushelye nincs, mivel minden valós x-re $\sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{x+1}$, azaz $f(x) < 0$.
(6-7) $f'(x) = \dfrac{\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[3]{x^2(x+1)^2}}$,
$f''(x) = -\dfrac{2}{9}\dfrac{\sqrt[3]{(x+1)^5} - \sqrt[3]{x^5}}{\sqrt[3]{x^5(x+1)^5}}$.
$f'(x) = 0$, ha $x = -\frac{1}{2}$. f' nincs értelmezve az $x = -1$ ill. $x = 0$ pontokban, ahol f' határértéke $-\infty$ ill. ∞. E két helyen tehát inflexiós pontja van a függvénynek függőleges érintővel. f'' értéke sehol sem zérus, és nincs értelmezve az $x = -1$ és $x = 0$ pontokban.

		-1		$-1/2$		0	
f''	$-$	n.ért.	$+$	$+$	$+$	n.ért.	$-$
f'	$-$	$\lim: -\infty$	$-$	0	$+$	$\lim: \infty$	$+$
f	$\searrow \frown$	INFL	$\searrow \smile$	MIN	$\nearrow \smile$	INFL	$\nearrow \frown$

(8) $f(-1) = -1,\ f(-1/2) = -\sqrt[3]{4}$.

147. (1) $\mathrm{Dom}\, f = \mathbf{R}$, mivel $|1-x^2|/|1+x^2| \le 1$.
(3) f mindenütt folytonos.
(4) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{-\pi}{2}$. Így az $y = \frac{-\pi}{2}$ egyenletű egyenes a függvény egyetlen aszimptotája.
(5) $f(0) = -\pi/2$. $f(x) = 0$, ha $x = -1$ vagy $x = 1$.
(6-7) $f'(x) = \dfrac{-2x}{|x|(1+x^2)}$,
$f''(x) = \dfrac{4|x|}{(1+x^2)^2}$.
f csökkenő, ha $x > 0$, növekvő, ha $x < 0$. f' nincs értelmezve az $x = 0$ pontban, ahol bal oldali határértéke 2, jobb oldali határértéke -2. E pontban f-nek maximuma van. $f''(x) > 0$, ha $x \neq 0$, így f konvex az $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ halmazon.

148. (1) $\mathrm{Dom}\, f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$
(3) f folytonos az értelmezési tartományán.

(4) $\lim_{x\to+0} x^2 e^{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{y\to\infty \\ y=1/x}} \frac{e^y}{y^2} \overset{L}{=} \lim_{y\to\infty} \frac{e^y}{2y} \overset{L}{=}$
$\lim_{y\to\infty} \frac{e^y}{2} = \infty$, tehát az $x = 0$ egyenletű egyenes függőleges aszimptota.
$\lim_{x\to-0} f(x) = 0$. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$,
$a = \lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x = \pm\infty$, így más aszimptota nincs.
(5) f-nek nincs zérushelye.
(6) $f'(x) = 2e^{1/x}(x - \frac{1}{2})$. $f'(x) = 0$, ha $x = \frac{1}{2}$. f monoton nő, ha $x > \frac{1}{2}$, monoton csökken, ha $x < \frac{1}{2}$, f-nek $x = \frac{1}{2}$-ben minimuma van.
(7) $f''(x) = e^{1/x}(2x^2 - 2x + 1)/x^2$.
$f''(x) > 0$, így f konvex, és inflexiós pontja nincs.

149. (1) $\mathrm{Dom}\, f = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$
(3) f folytonos az értelmezési tartományán.

(4) $\lim_{x\to-1\pm0} f(x) = -1\pm\pi$, tehát függőleges aszimptota az $x = -1$ pontban nincs.
$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.
$a = \lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x = 1$,
$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = -\pi/2$, tehát a ferde aszimptota egyenlete $y = x - \pi/2$.
(5) $f(0) = 0$, f többi zérushelye elemi úton nem határozható meg (még egy zérushely van, és arról könnyen látható, hogy pozitív, éspedig $\approx 0,87$).
(6-7) $f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2 + (x+1)^2}$,
$f''(x) = \frac{4(2x+1)}{(2x^2 + 2x + 1)^2}$.
$f'(x) = 0$, ha $x = (-1 \pm \sqrt{3})/2$,
$f''(x) = 0$, ha $x = -1/2$.

		$\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$		-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$	
f''	$-$	$-$	$-$	n.ért.	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f'	$+$	0	$-$	n.ért.	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f	$\nearrow \frown$	MAX	$\searrow \frown$	n.ért.	$\searrow \frown$	INFL	$\searrow \smile$	MIN	$\nearrow \smile$

150. (1) $\mathrm{Dom}\, f = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$
(2) f páratlan függvény, így elég csak a $[0, \infty)$ intervallumon vizsgálni.
(3) f folytonos az értelmezési tartományán.

(4) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$,
$\lim\limits_{x\to-1\pm0} f(x) = \lim\limits_{x\to1\pm0} f(x) = \pm\infty$.
$a = 0$, $b = \pm\infty$, tehát ferde aszimptota nincs, a két függőleges aszimptota egyenlete $x = -1$ és $x = 1$.
(5) $f(0) = 0$.
(6-7) $f'(x) = \dfrac{x^2 - 3}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}$,
$f''(x) = \dfrac{2x(9 - x^2)}{9\sqrt[3]{(x^2-1)^7}}$.
$f'(x) = 0$, ha $x = \pm\sqrt{3}$. $f''(x) = 0$, ha $x = 0$, $x = \pm 3$.

	0		1		$\sqrt{3}$		3	
f''	0	+	n.ért.	+	+	+	0	$-$
f'	$-$	$-$	n.ért.	$-$	0	+	+	+
f	INFL	$\searrow \smile$	n.ért.	$\searrow \smile$	MIN	$\nearrow \smile$	INFL	$\nearrow \frown$

151. (1) $\mathrm{Dom}\, f = \mathbf{R}^+$
(3) f folytonos az értelmezési tartományán.

(4) $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, tehát az $x = 0$ egyenletű egyenes függőleges aszimptota, az $y = 0$ egyenletű egyenes ferde aszimptota.
(5) $f(x) = 0$, ha $x = 1$.
(6) $f'(x) = (1 - \ln x)/x^2$. $f'(x) = 0$, ha $x = e$. f monoton nő, ha $0 < x < e$, monoton csökken, ha $x > e$, f-nek $x = e$-ben maximuma van.
(7) $f''(x) = (2\ln x - 3)/x^3$. $f''(x) = 0$, ha $x = e^{3/2}$. f konkáv, ha $0 < x < e^{3/2}$, konvex, ha $x > e^{3/2}$, f-nek $x = e^{3/2}$-ben inflexiós pontja van.

152. $\mathrm{Dom}\, f = \mathbf{R}^+$, minimum: $x = 1/e$, határértéke $+0$-ban 1, konvex.

153.

154.

155.

156.

157.

158.

159. A definíció 3. feltétele nem teljesül a $t_0 = 0$ pontban, tehát a görbe síma görbeív lesz, ha $0 \notin (t_1, t_2)$, azaz ha $(t_1, t_2) \subset \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

160. A definíció 1. feltétele nem teljesül a $t_0 = 0$ pontban, tehát a görbe síma görbeív lesz, ha $0 \notin (t_1, t_2)$, azaz ha $(t_1, t_2) \subset \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

161. A definíció 2. feltétele nem teljesül, ha $t_1 = 0$, vagy $t_2 = 0$. Az 1. feltétel nem teljesül, ha $0 \in (t_1, t_2)$. Tehát a görbe síma görbeív lesz, ha $0 < t_1 < t_2$, vagy ha $t_1 < t_2 < 0$. (Itt nem elég, hogy $(t_1, t_2) \subset \mathbf{R} \setminus \{0\}$.)

162. $t \neq 0 \quad y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt} = \dfrac{6t^2}{6t} = t$. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{dy'/dt}{dx/dt} = \dfrac{1}{6t}$. A másik képlettel is kiszámítva: $\dot{x} = 6,\ \dot{y} = 12t,\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3} = \dfrac{1}{6t}$.

163. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{t}{4},\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{1}{48t},\ t \neq 0$.

164. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos t + \sin t}{\cos t - \sin t},\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{2}{e^t(\cos t - \sin t)^3},\ t \neq \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

165. $t \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{5\sin t}{3},\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{5\cos^3 t}{9}$.

166. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 + 3t^2}{2t^3},\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{3(1+t^2)^3}{8t^5},\ t \neq 0$.

167. $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=1} = \dfrac{2}{3}$, az egyenes egyenlete: $y = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{4}{3}$.

168. (a) $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0} = \dfrac{3}{2}$, az egyenes egyenlete: $y = \dfrac{3}{2}x$.

(b) A görbe nem síma a $t_0 = 1$ paraméterű pontban, mert $\dot{y}(1) = \dot{x}(1) = 0$, de létezik a $\lim_{t\to 1} \dot{y}/\dot{x} = 3$ határérték, így az érintő is. Egyenlete $y = 3x - 1$.

169. $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t_0} = \left.\dfrac{2t^2 - 3}{2t^2 + 3}\right|_{t_0} = -\dfrac{1}{2},\ \left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t_0} = \left.\dfrac{24t^3}{(2t^2+3)^3}\right|_{t_0} = \dfrac{3\sqrt{2}}{32}$.

$$\left(x - \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{32\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{1000}{9}.$$

170. $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t_0} = \sqrt{3},\ \left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t_0} = -4$.

$$\left(x - \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 4.$$

171. Ha $t \geq 0$, akkor $x = 3t,\ y = 9t^2$, azaz $y = x^2$. Ha $t \leq 0$, akkor $x = t,\ y = t^2$, azaz ismét $y = x^2$. E függvény pedig differenciálható az $x(0) = 0$ pontban, és $y'(0) = 0$.