13. fejezet

Határozott integrál

A határozott integrál fogalma és tulajdonságai

D 13.1 *Legyen f az $[a, b]$ intervallumon legfeljebb véges számú pont kivételével mindenütt értelmezett korlátos valós függvény, továbbá legyen*

$$B: \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

az $[a, b]$ intervallum valamely beosztása, és legyen $\xi \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. Az

$$I = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

összeget az f függvényhez, a B beosztáshoz és annak $[\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n]$ reprezentánsrendszeréhez tartozó **integrálközelítő összeg***nek nevezzük.*

Ha az $[a, b]$ intervallum minden határon túl finomodó $[B_m;\ m \in \mathbf{N}^+]$ beosztássorozatához tartozó integrálközelítő összegek bármely $[I_m]$ sorozatának van határértéke, akkor azt mondjuk, hogy f az $[a, b]$ intervallumon **integrálható**; ezt a határértéket – amely minden ilyen $[I_m]$ esetén ugyanaz a szám – az f függvény $[a, b]$ intervallumon vett **határozott integrál**jának nevezzük és így jelöljük:

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ vagy } \int_a^b f\,.$$

T 13.2 *Bármely integrálható f, g függvényekre és bármely a, b, c valós számokra érvényesek az alábbi tulajdonságok:*

(1) $$\int_a^b (c \cdot f(x))\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx\,,$$

(2) $$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\,,$$

(3) $$\int_a^a f(x)\,dx = 0\,,$$

(4) $$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx\,,$$

(5) $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,,$$

(6) $m \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M \cdot (b - a)$, *ahol m az f függvénynek alsó korlátja, M pedig felső korlátja az $[a, b]$ intervallumon.*

T 13.3 (Integrál-középértéktétel.) *Ha az f függvény az $[a,b]$ intervallumon folytonos, akkor integrálható is, és van olyan $c \in [a,b]$, hogy*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,. \tag{7}$$

T 13.4 Newton–Leibnitz-formula. *Ha f és F függvények az $[a,b]$ intervallumon folytonosak, továbbá F a f-nek primitív függvénye az (a,b) intervallumon, akkor*

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b\,, \quad \text{ahol} \quad [F(x)]_a^b := F(b) - F(a)\,. \tag{8}$$

P 13.5 *Keressünk olyan c számot, amely kielégíti az $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ függvényre és a $[-1,1]$ intervallumra vonatkozó integrál-középértéktételt.*
A (8) alapján

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}[\operatorname{arctg} x]_{-1}^1 = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{\pi}{4}$$

és $f(c) = \dfrac{1}{1+c^2}$*; ezért (7) szerint* $\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{1+c^2}$*, azaz* $c^2 = \dfrac{4-\pi}{\pi}$ *.Tehát két ilyen szám van:*
$c_1 = -\sqrt{\dfrac{4-\pi}{\pi}}$ *és* $c_2 = \sqrt{\dfrac{4-\pi}{\pi}}$.

Feladatok

1.$^\triangleright$ Számítsuk ki az $f(x) = x+1$ függvénynek a $B = \{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$ beosztáshoz és a $\{\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}\}$ reprezentánsrendszerhez tartozó integrálközelítő összegét.

Számítsuk ki a megadott integrálokat a **D 13.1** definíció segítségével úgy, hogy az adott intervallumot n egyenlő részre osztjuk és reprezentánsrendszernek az intervallumok bal vagy jobb végpontját választjuk:

2.$^\triangleright$ $\displaystyle\int_0^1 x\,dx\,,$ **3.** $\displaystyle\int_0^2 x^2\,dx\,.$ **4.** $\displaystyle\int_0^2 2\,dx\,.$

5.$^\triangleright$ $\displaystyle\int_0^1 x\,dx + \int_2^1 -x\,dx + \int_3^3 x^3\,dx,$ **6.**$^\triangleright$ $\displaystyle\int_0^5 \left(5x^3+1\right)dx + \int_5^4 \left(5x^3+1\right)dx.$

7.$^\triangleright$ Adjunk alsó és felső becslést az $I = \displaystyle\int_2^4 e^{-x^2}\sin\frac{\pi x}{4}\,dx$ integrál értékére!

Keressük meg azokat a c számokat, amelyek kielégítik az alább megadott f függvényre és $[a,b]$ intervallumra vonatkozó integrál-középértéktételt.

8.$^\triangleright$ $f(x) = 3x^2,\ [-4,-1]\,,$ **9.** $f(x) = \sqrt{2x+1},\ [4,12]\,,$

10. $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x},\ \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right],$ **11.** $f(x) = \sin x;\ \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right],$

12. $f(x) = \sin x;\ [0,\pi]\,.$

Improprius integrálok

D 13.6 *Az $I = [a,\infty)$, ill. $I = (-\infty, b]$, ill. $I = (-\infty,\infty)$ intervallumon értelmezett f függvény (végtelenbe nyúló) I intervallumon vett* **improprius integrál***jának jele és értelmezése:*

$$\text{(9)}\qquad \int_a^\infty f := \lim_{b\to\infty}\int_a^b f\,,\quad \text{ill.} \int_{-\infty}^b f := \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f\,,\quad \text{ill.} \int_{-\infty}^\infty f := \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b f\,,$$

amennyiben f minden véges $[a,b]$ intervallumon integrálható, és a jobb oldalra írt határértékek léteznek (a legutóbbi esetben úgy, hogy a és b egymástól függetlenül tart mínusz végtelenhez, illetve végtelenhez).

D 13.7 *Ha az $I = (a,b]$, ill. $I = [a,b)$, ill. $I = (a,b)$ intervallumon értelmezett f függvény az I-hez nem tartozó határpont(ok) környezetében nem korlátos, de integrálható minden*

$$[t,b]\ (a<t)\quad \text{ill. } [a,u]\ (u<b)\,,\quad \text{ill. } [t,u]\ (a<t<u<b)$$

intervallumon, akkor az f függvény $[a,b]$ intervallumon vett **improprius integrál***jának jele és értelmezése:*

$$\text{(10)}\qquad \int_a^b f := \lim_{t\to a+0}\int_t^b f \quad \text{ill.} \quad \int_a^b f := \lim_{u\to b-0}\int_a^u f \quad \text{ill.} \quad \lim_{\substack{t\to a+0\\ u\to b-0}}\int_t^u f\,,$$

amennyiben a feltüntetett jobb-, ill. baloldali határértékek léteznek (a legutóbbi esetben úgy, hogy t és u egymástól függetlenül tart jobbról a-hoz, illetve balról b-hez).

D 13.8 *Legyen értelmezve az f függvény az $(a,u)\cup(u,b)$ halmazon. Ha f nem korlátos az u környezetében és esetleg az a vagy a b (vagy mindkettő) környezetében sem (vagy $a=-\infty$ és/vagy $b=\infty$), de az f függvénynek az $[a,u]$ és $[u,b]$ intervallumokon vett improprius integrálja létezik, akkor az f függvény $[a,b]$ intervallumon vett improprius integrálja:*

$$\text{(11)}\qquad \int_a^b f(x)\,dx := \int_a^u f(x)\,dx + \int_u^b f(x)\,dx\,.$$

Ha a fenti definíciókban szereplő határértékek valamelyike létezik, akkor az illető improprius integrált **konvergens***nek nevezzük (ellenkező esetben* **divergens***nek).*

P 13.9 *Számítsuk ki az $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$ improprius integrált (ha létezik). Az alsó határra a (10) alatti első képletet, a felső határra a (9) alatti első képletet alkalmazzuk. Akkor*

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \lim_{\substack{a\to1+0\\ b\to\infty}}\int_a^b \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \lim_{\substack{a\to1+0\\ b\to\infty}}\Big[2\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}\Big]_a^b =$$

$$= \lim_{\substack{a\to1+0\\ b\to\infty}}\Big(2\operatorname{arctg}\sqrt{b-1} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{a-1}\Big) = 2\cdot\frac{\pi}{2} - 2\cdot 0 = \pi\,.$$

(Az $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$ határozatlan integrált legegyszerűbben az $u=\sqrt{x-1}$ helyettesítéssel számíthatjuk ki.)

Feladatok

Állapítsuk meg, hogy az alábbi nem korlátos függvények improprius integráljai, illetve a végtelen intervallumokon vett improprius integrálok konvergensek-e, s ha igen, határozzuk meg az értéküket.

13.• $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$, **14.**• $\int_{-3}^{0} \frac{dx}{\sqrt[5]{(x+2)^4}}$, **15.**▷ $\int_0^2 \sqrt[3]{2}x^{-\frac{1}{3}}\,dx$,

16. $\int_{-1}^1 x^{-\frac{2}{3}}\,dx$, **17.** $\int_0^{\sqrt[3]{2}} \frac{3x^2\,dx}{\sqrt[7]{(x^3-1)^2}}$, **18.** $\int_{-\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$,

19. $\int_{-2}^0 \frac{dx}{x+2}$, **20.** $\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$, **21.** $\int_0^1 \ln^2 x\,dx$,

22.▷ $\int_0^\infty e^{-x}$, **23.** $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$, **24.** $\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{3+4x^2}$,

25. $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{2x+1^2}}$, **26.** $\int_{-\infty}^0 e^{2x}\,dx$, **27.** $\int_0^\infty xe^{-x}\,dx$,

28. $\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x}$, **29.** $\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln^2 x}$, **30.** $\int_0^\infty e^{-x}\cdot\cos x\,dx$,

31. $\int_1^\infty \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$, **32.** $\int_0^\infty x^2e^{-2x}\,dx$.

33.▷ Keressünk olyan $b \neq 0$ valós számot, amelyre $\int_0^b \ln x\,dx = 0$.

Számítsuk ki az alábbi határozott, vagy improprius integrálokat.

34. $\int_0^2 (16x - x\cdot 4^x)\,dx$, **35.** $\int_0^\pi \cos^2 2x$, **36.** $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{2+3x^2}$,

37. $\int_0^\infty \frac{1}{1+x}\,dx$, **38.** $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3}}$, **39.** $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$,

40. $\int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$, **41.** $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$. **42.**▷ $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{|x-2||x-3|}}$.

43. $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,dx$.

Bizonyítsuk be, hogy ha $p > 0$ konstans, akkor

44.• $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{1-p}, & \text{ha } p > 1, \\ \infty, & \text{ha } p \leq 1. \end{cases}$ **45.**• $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{1-p} & \text{, ha } p < 1, \\ \infty & \text{, ha } p \geq 1. \end{cases}$

Terület

D 13.10*Legyen f az (a, b) intervallumon előjelet nem váltó, korlátos, és legfeljebb véges számú hely kivételével folytonos valós függvény (az $a = -\infty$ és a $b = \infty$ esetet is megengedve). A síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben az $y = f(x)$ egyenletű görbe, az (a, b) intervallum, valamint (véges a és b esetén) az $x = a$ és az $x = b$ egyenletű egyenes által határolt síkidomot az f függvény és az (a, b) intervallum által meghatározott* **görbevonalú trapéz***nak nevezzük, és ennek* **területén** *az*

$$\int_a^b |f(x)| \, dx$$

határozott vagy improprius integrált értjük, feltéve, hogy ez az integrál létezik.

Ha az y_1 és y_2 is az $[a, b]$ intervallumon értelmezett korlátos és legfeljebb véges számú hely kivételével folytonos valós függvény úgy, hogy minden $x \in [a, b]$ esetén $y_1 \geq y_2 \geq 0$, akkor az $y = y_1(x)$ és az $y = y_2(x)$ egyenletű görbék, valamint az $x = a$ és az $x = b$ egyenletű egyenesek által határolt síkidom területét az

$$\int_a^b (y_1(x) - y_2(x)) \, dx$$

integrállal számítjuk. Ezt a területet röviden a két görbe közötti területnek mondjuk.

Ha az f függvény az (a, b) intervallum egyes részintervallumain az $f(x) \geq 0$ egyenlőtlenségnek, a többi részintervallumain pedig az $f(x) \leq 0$ egyenlőtlenségnek tesz eleget, akkor részintervallumonként külön számítjuk ki a területet, és az ezekre kapott értékeket összeadjuk.

P 13.11 *Számítsuk ki az $f(x) = x^2 - 2x$ függvény és a $[-1, 3]$ intervallum által meghatározott görbevonalú trapéz területét. A függvény grafikonja a $[-1, 0)$ és a $(2, 3]$ intervallumon az x tengely felett, a $(0, 2)$ intervallumon az x tengely alatt halad, ezért a keresett T terület:*

$$T = \int_{-1}^0 (x^2 - 2x) \, dx - \int_0^2 (x^2 - 2x) \, dx + \int_2^3 (x^2 - 2x) \, dx = 4 \, .$$

T 13.12 **Görbevonalú trapéz területe**, *ha a határoló görbe $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(t_1 < t < t_2)$ paraméteres egyenletrendszerrel van megadva, akkor az*

$$\int_{t_1}^{t_2} |x(t)y(t)| \, dt$$

integrállal számítható ki (feltéve, hogy az integrál létezik).

P 13.13 *Számítsuk ki az $y_1(x) = e^x$ és $y_2(x) = 8 - 3e^x$ egyenletű görbék közti területet 0-tól a görbék metszéspontjának abszcisszájáig terjedő intervallumon.*
A metszéspont abcisszája az $e^x = 8 - 3e^x$ egyenletből: $x = \ln 2$.
A görbék közti terület:

$$T = \int_0^{\ln 2} \left((8 - 3e^x) - e^x\right) \, dx = [8x - 4e^x]_0^{\ln 2} = 4(2 \ln 2 - 1) \, .$$

D 13.14*Legyen r egy 2π-nél nem hosszabb $[\alpha, \beta]$ intervallumon értelmezett valós függvény. A síkbeli polárkoordináta-rendszerben az $r = r(\varphi)$ egyenletű görbe, valamint a $\varphi = \alpha$ és a*

$\varphi = \beta$ egyenletű félegyenes által határolt síkidomot az r függvény és az $[\alpha, \beta]$ intervallum által meghatározott **szektor***nak nevezzük, és ennek* **terület***én az*

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\, d\varphi \tag{12}$$

határozott integrált értjük, feltéve, hogy ez az integrál létezik.

D 13.15 *Ha két görbe van adva, $r = r_1(\varphi)$ és $r = r_2(\varphi)$ poláregyenletével és $r_1(\varphi) \geq r_2(\varphi)$, ha $\varphi \in [\alpha, \beta]$, akkor a két görbe közti területet az*

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \left[r_1^2(\varphi) - r_2^2(\varphi)\right] d\varphi$$

képlettel számítjuk.Ha egy síkidom több, páronként közös belső pont nélküli szektorból áll, akkor a megfelelő részterületeket külön számítjuk ki, és összeadjuk.

P 13.16 *Számítsuk ki az $r = \sqrt{2\cos 2\varphi}$ egyenletű görbe (lemniszkáta) által határolt síkidomból az $r = 1$ egyenletű körön kívül eső rész területét.*
A lemniszkátát megkapjuk, ha φ befutja a $H = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ halmazba eső értékeket. A kör és a lemniszkáta metszéspontjaihoz tartozó φ értékeknek az $1 = \sqrt{2\cos 2\varphi}$ egyenletből származó $\cos 2\varphi = \frac{1}{2}$ egyenletet kell kielégíteniük. Négy ilyen, a H-ba tartozó φ érték van. $\varphi_1 = -\frac{\pi}{6}$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{6}$, $\varphi_3 = \frac{5\pi}{6}$, $\varphi_4 = \frac{7\pi}{6}$. Tehát a (12) képlet és a 4. megjegyzés alapján a keresett T terület:

$T = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (2\cos 2\varphi - 1)\, d\varphi + \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} (2\cos 2\varphi - 1)\, d\varphi\,.$

A szimmetria miatt T-t így is kiszámíthatjuk:

$T = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2\cos 2\varphi - 1)\, d\varphi = 2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)\,.$

T 13.17 *A* **szektor területe***, ha a határoló görbe az $x = x(t)$, $y = t(t)$ $(t_1 \leq t \leq t_2)$ paraméteres egyenletrendszerrel van megadva, akkor az*

$$\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} |x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)|\; dt$$

integrállal számítható ki (feltéve, hogy $\dot{x}$ és $\dot{y}$ létezik).

T 13.18 *A* **szektor területe***, ha a szektort határoló görbe egyenlete $y = f(x)$ $(a \leq x \leq b)$, akkor az előbbi területképlet szerint*

$$T = \frac{1}{2}\int_a^b \left|xf'(x) - f(x)\right|\, dx\,.$$

Feladatok

Számítsuk ki az alábbi függvények és intervallumok által meghatározott görbevonalú trapézok területét.

46.$^{\triangleright}$ $\dfrac{1}{2x+4}$, $[0,3]$,

47. x^2+x+1, $[2,3]$,

48.$^{\bullet}$ x^3-3, $[1,2]$,

49.$^{\triangleright}$ $\operatorname{sh}(x-1)$, $[0,2]$,

50. x^3-3, $[3,4]$,

51. $x-\dfrac{x^3}{3}+\sqrt{x}$, $[0,2]$,

52. $\dfrac{1}{1+x^2}$, $[0,1]$,

53. $\dfrac{5}{3x^2}+x$, $[1,3]$,

54.$^{\triangleright}$ $1-3^{x-2}$, $[0,4]$,

55. $\ln\dfrac{x}{2}$, $[1,e]$,

56. $\sqrt{9-x}$, $[0,8]$,

57. $\sqrt{\dfrac{x^3}{2}}$, $[0,2]$,

58. $\dfrac{10}{\sqrt{x+4}}$, $[0,5]$,

59. $\left(1-x^{1/3}\right)^3$, $[0,1]$,

60.* $1-\left(1-(1-x)^{2/3}\right)^{3/2}$, $\left[1-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3,\ 1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\right]$,

61.$^{\triangleright}$ $\lg\dfrac{4}{x}$, $[1,6]$,

62. $\cos\dfrac{x}{2}$, $[0,\pi]$,

63. $\operatorname{ch}2x$, $[0,3]$,

64. 5^xe^x-1, $[-1,1]$.

Ábrázoljuk az alábbi egyenletű görbék által határolt korlátos síkidomokat, és számítsuk ki a területüket:

65.$^{\triangleright}$ $y=2x^2-1$, $y=0$,

66. $y=\dfrac{x^2}{2}$, $y=x+\dfrac{1}{2}$, $x=0$,

67. $y=x^2$, $y=1-x^2$,

68. $y=\dfrac{4}{3x}$, $y=\dfrac{13}{3}-x$,

69.$^{\triangleright}$ $y=x^4$, $y=3x^2-2$,

70. $y=\dfrac{8}{x^2+4}$, $y=\dfrac{1}{4}x^2$,

71. $y=x^2$, $y=2x$,

72. $y=x^2$, $y=\dfrac{x^2}{2}$, $y=x$,

73. $y=\sqrt{x}$, $y=\dfrac{x}{2}$,

74. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$, $x+y=1$,

75.$^{\bullet}$ $y^2=x+3$, $y=\dfrac{1}{2}x$,

76.$^{\bullet}$ $y=x^2$, $y=\dfrac{1}{4}x^2$, $y=4$,

77. $x=y^2$, $x=\dfrac{3}{4}y^2+1$,

78. $y=x^3$, $y=2-x$, $y=0$,

79.$^{\triangleright}$ $y=\sqrt{a^2-x^2}$, $y=-\sqrt{a^2-x^2}$, ($a>0$ konstans),

80.$^{\triangleright}$ $y=b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$, $y=-b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$, ($b>0$ konstans),

81.$^\triangleright$ Számítsuk ki az $x^2+(y+2)^2=16$ egyenletű kör és az x-tengely által határolt kisebbik körszelet területét,

82.$^\triangleright$ Számítsuk ki annak a síkidomnak a területét, amelyet az $x^2+y^2\le 4$ körlapból az $x^2+(y-2)^2=4$ körön kívül eső pontok elhagyásával kapunk,

83. $x^{1/3}+y^{1/3}=1,\ x+y=1\,,$

84. $y=\sin x,\ y=x,\ x=\dfrac{\pi}{2}\,,$

85. $y=\cos x,\ y=4x^2-\pi^2\,,$

86. $y=e^x,\ y=e^{\sqrt{x}}\,,$

87. $y=xe^x,\ y=0,\ x=4\,,$

88. $y=x\cdot 4^x,\ y=16x\,,$

89. $y=2^x,\ y=2^{-2x},\ y=4\,,$

90. $y=4^x,\ y=4^{2-x},\ y=1\,,$

91. $y=3^x,\ y=5^{1-x}+2,\ x=0\,,$

92.$^\triangleright$ $y=1-2^{x-3},\ y=\ln\dfrac{x}{3},\ x=6\,,$

93. $y=\ln\dfrac{x}{2},\ x=2e^2,\ y=0\,,$

94. $y=\ln\dfrac{x}{2},\ y=\ln\dfrac{2}{x},\ x=4\,,$

95. $y=\ln x,\ y=2\ln\dfrac{x}{3},\ y=0\,,$

96. $y=\ln x,\ y=\ln^2 x\,,$

97.$^\triangleright$ $y=\ln x,\ y=\ln\dfrac{8-x}{3},\ y=0\,,$

98.$^\triangleright$ $y=\ln^2\dfrac{x}{3},\ y=\ln^2 3\,.$

Ábrázoljuk az alábbi paraméteresen megadott függvények és a kijelölt paraméter–intervallumok által meghatározott görbevonalú trapézokat, és számítsuk ki ezek területét (a és b pozitív konstansok).

99. $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ [0,2\pi]$ (ciklois),

100. $x=t^2,\ y=(1-t)^2,\ [0,1]\,,$

101. $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ [0,2\pi],$ (kör),

102. $x=\dfrac{4}{3}\cos t-\dfrac{2}{3},\ y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin t,\ [0,2\pi]$ (ellipszis),

103. $x=a\cos^3 t,\ y=b\sin^3 t,\ [0,\frac{\pi}{2}]$ (asztrois),

104. $x=a(\cos t+t\sin t),\ y=a(\sin t-t\cos t),\ [0,\pi/2]$ (kör evolvense),

105. $x=1-\cos^3 t,\ y=1-\sin^3 t,\ \left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right]\,,$

106. $x=a(2\cos t-\cos 2t),\ y=a(2\sin t-\sin 2t),\ [0,\pi/3]\,,$

107. $x=t+\cos t,\ y=t\sin t,\ [0,\pi]\,.$

108. $x=at,\ y=a(1-\cos t),\ [0,2\pi]\,.$

Számítsuk ki az alábbi, polárkoordinátásan megadott görbék és a feltüntetett intervallumok által meghatározott szektor területét (az a, b és φ_1 pozitív konstans):

109. $r=a,\ [0,2\pi]$ (kör),

110. $r=a\sqrt{\varphi},\ [0,\varphi_1]$ (parabolikus spirális $r^2=a^2\varphi$)$\,,$

111. $r=\dfrac{a}{\varphi},\ [1,\varphi_1],\ (\varphi_1>1)$ (hiperbolikus spirális),

112. $r=a\cos 2\varphi,\ \left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ (négyszirmú rózsa),

113. $r=a\sqrt{\cos 2\varphi},\ \left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ (lemniszkáta),

114. $r=a\cos\varphi+b,\ [0,\pi]\,,$

115.[⋆] $r = \dfrac{1}{1+\frac{1}{2}\cos\varphi}, \quad [0, 2\pi]$ (ellipszis),

116.[▷] $r = \dfrac{1}{1+\cos\varphi}, \quad \left[-\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$ (parabola),
(lásd **ábra**.)

117. $r = a\varphi, \quad [0, 2]$ (archimedeszi spirális),

118. $r = ae^{b\varphi}, \quad [0, \varphi_1]$ (logaritmikus spirális),

119. $r^2 = \dfrac{a^2b^2}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}, \quad [0, 2\pi]$ (ellipszis),

120. $r = 2a(1+\cos\varphi), \quad [0, \pi]$ (kardioid).

Számítsuk ki az alábbi, paraméteres egyenletrendszerekkel megadott függvények és a feltüntetett intervallumok által meghatározott szektorok területét.

121. $x = t^2, \quad y = (1-t)^2, \quad [0, 1]$,

122. $x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad [0, 2\pi]$ (kör),

123. $x = a(t-\sin t), \quad y = a(1-\cos t), \quad (a > 0), \quad [0, 2\pi]$ (ciklois),

124. $x = \cos t, \quad y = \sin 2t, \quad \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

125. $x = \cos 2t, \quad y = \cos t, \quad \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ (parabola),

126.[▷] $x = 1-\cos^3 t, \quad y = 1-\sin^3 t, \quad \left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}\right]$,

127. $x = \dfrac{4}{3}\cos t - \dfrac{2}{3}, \quad y = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin t, \quad [0, 2\pi]$ (ellipszis),

128. $x = \operatorname{ch} t, \quad y = \operatorname{sh} t, \quad [-t_1, t_1] \quad \left(0 \le t_1 < \dfrac{\pi}{4}\right)$ (hiperbola).

Számítsuk ki a derékszögű koordináta–rendszerben $y = f(x)$ alakú egyenlettel megadott görbék és a feltüntetett intervallumok által meghatározott szektorok területét.

129. $y = x^2, \quad [1, 2]$,

130. $y = \dfrac{1}{x}, \quad \left[\dfrac{1}{a}, a\right] \quad (a > 1)$,

131. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}, \quad \left[\dfrac{1}{a}, a\right] \quad (a > 1)$,

132. $y = \dfrac{1}{x^2}, \quad \left[\dfrac{1}{a}, a\right] \quad (a > 1)$,

133.[▷] $y = \left(1 - x^{1/3}\right)^3, \quad [0, 1]$,

134. $y = (1-\sqrt{x})^2, \quad \left[0, \dfrac{1}{4}\right]$,

135. $y = \ln x, \quad [1, e]$,

136. $y = e^x, \quad [1, \ln 4]$.

Ábrázoljuk az alábbi, polárkoordinátásan megadott görbék által határolt síkidomokat, és számítsuk ki a területüket.

137.[▷] $r = 2\cos\varphi, \quad r = \cos\varphi, \quad \varphi = 0, \quad \varphi = \dfrac{\pi}{4}$,

138.[▷] $r = 4\cos\varphi - \dfrac{1}{\cos\varphi}, \quad \varphi = 0, \quad \varphi = \dfrac{\pi}{4}$,

139.[▷] $r = \operatorname{tg} 2\varphi, \quad \varphi = 0, \quad \varphi = \dfrac{\pi}{8}$,

140.[▷] $r = e^{\varphi}, \quad r = \varphi, \quad \varphi = 0, \quad \varphi = \pi$,

141.▷ $r = e^{\varphi}, \quad r = e^{\varphi/2}, \quad \varphi = 0, \quad \varphi = \pi\,.$

142.▷ Számítsuk ki az $r = 4$ egyenletű kör és az $r = \dfrac{2}{\cos\varphi}$ egyenletű egyenes által határolt kisebbik (jobb oldali) körszelet területét. (Igazoljuk, hogy az előbbi egyenlet valóban egyenes egyenlete.)

143.▷ Számítsuk ki az $r = 4$ egyenletű kör, valamint az $r = \dfrac{2}{\cos\varphi}$ és a $\varphi^2 = (\pi/2)^2$ egyenletű egyenesek által határolt síkrész területét.

144.▷ Számítsuk ki az $r = 4\sin\varphi$ egyenletű körből az $r = 2$ egyenletű körön kívül eső rész területét.

Ívhossz

D 13.19 *Legyen $[t_n\,; n \in \mathbf{N}^+]$ a G görbe AB ívébe beírható töröttvonalak olyan sorozata, hogy az n növekedése közben a töröttvonalak oldalainak hosszúsága 0-hoz tart. Ha a t_n-ek hosszúsága minden ilyen sorozat esetén konvergál, akkor ugyanahhoz a számhoz konvergál, és ezt a számot az AB* **ív hosszúság***ának, az AB ívet pedig* **rektifikálható***nak nevezzük.*

T 13.20 *Ha az f függvény az $[a,b]$ intervallumon folytonosan differenciálható, akkor az $y = f(x)$ egyenletű görbének az $[a,b]$ intervallumhoz tartozó íve rektifikálható, és az ív hosszúsága:*

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx\,.$$

T 13.21 *Ha egy sima görbe paraméteres egyenletrendszere $x = x(t)$, $y = y(t)$, $(t_1 \le t \le t_2)$, akkor ívhosszúsága*

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\,dt\,.$$

T 13.22 *Síkbeli polárkoordináta-rendszerben $r = r(\varphi)$, $(\alpha \le \beta)$ alakú egyenlettel megadott görbeív hosszúsága*

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + \dot{r}^2(\varphi)}\,d\varphi\,.$$

Megjegyzés. Ezek a képletek akkor is érvényesek, ha konvergens improprius integrált jelentenek.

Feladatok

Számítsuk ki az alábbi egyenletű görbéknek a megadott intervallumhoz tartozó ívhosszát:

145.▷ $y = \dfrac{1}{2}(x^2 - 1),\ [-1, 1]\,,$

146. $y = 1 - \dfrac{x^2}{4}$, $[0, 2]$,

147. $y = x^{3/2}$, $[0, 4]$,

148. $y = \dfrac{x^2}{2p}$, $[0, a]$, ($p > 0$ konstans),

149. $9ay^2 = x(x - 3a)^2$, $[0, a]$, ($a > 0$ konstans),

150. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $[0, a]$, ($a > 0$ konstans) (asztrois),

151. $y = \ln x$, $[\sqrt{3}, \sqrt{8}]$,

152. $y = \ln(1 - x^2)$, $[0, 1/2]$,

153. $y = \ln \cos x$, $[0, \pi/6]$,

154. $y = \ln \dfrac{1}{\sin x}$, $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{2\pi}{3}\right]$,

155. $y = \dfrac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 - 1} - \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})\right]$, $[1, a + 1]$,

156.* $y^2 = \dfrac{x^3}{2a - x}$, $\left[0, \dfrac{5}{3}a\right]$, ($a > 0$ konstans) (cisszoid).

Számítsuk ki az alábbi, paraméteresen megadott görbeívek hosszát, (az a, t_1 és t_2 pozitív konstansok).

157. $x = t^2$, $y = 2t$, $[0, \sqrt{3}]$,

158. $x = \dfrac{1}{2}t^2$, $y = \dfrac{4}{3}(1 + t)^{3/2}$, $[0, 1]$,

159. $x = t^2$, $y = t^3$, $[0, t_1]$,

160. $x = t \sin t$, $y = t \cos t$, $[0, t_1]$,

161. $x = \cos t$, $y = \dfrac{\sqrt{2}}{8} \sin 2t$, $[0, 2\pi]$,

162. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $[0, 2\pi]$ (ciklois),

163. $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$, $[0, 2\pi]$ (kör evolvense),

164.* $x = a \cos^5 t$, $y = a \sin^5 t$, $[0, 2\pi]$,

165.$^\triangleright$ $x = \cos 2t$, $y = \sin t$, $[0, \pi/2]$,

166. $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$, $[0, \pi/2]$,

167. $x = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg} \dfrac{t}{2}\right)$, $y = a \sin t$, $\left[t_1, \dfrac{\pi}{2}\right]$ (traktrix),

168. $x = 1 + \operatorname{arctg} t$, $y = 1 - \ln \sqrt{1 + t^2}$, $[0, 1]$,

169. $x = \ln \cos 2t$, $y = 2t$, $[0, \pi/6]$,

170. $x = \operatorname{ch}^3 t$, $y = \operatorname{sh}^3 t$, $[0, t_1]$,

171. $x = \dfrac{1}{2} \operatorname{sh} t$, $y = 2\sqrt{2} \operatorname{sh} \dfrac{t}{2}$, $[0, \ln a]$,

172. $x = \operatorname{arch} t$, $y = \operatorname{arsh} t$, $[t_1, t_2]$,

173. $x = t - \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t$, $y = 2 \operatorname{ch} t$, $[0, t_1]$.

Számítsuk ki az alábbi, polárkoordinátásan megadott görbeívek hosszát (az a, p és φ_1 pozitív konstans):

174. $r = a$, $0 \le t < 2\pi$; (kör),

175. $r = a\varphi$, $\varphi \in [0, \varphi_1]$ (archimedeszi spirális),
(l. **ábra**),

176. $r = \dfrac{a}{\varphi}$, $\varphi \in [1, \varphi_1]$ (hiperbolikus spirális),

177. $r = \dfrac{2a}{\cos 2\varphi}$, $\varphi \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ (egyenes),

178. $r = \dfrac{4}{\sin \varphi}$, $\varphi \in \left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right]$ (egyenes),

179. $r = 1 - \cos\varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi]$ (kardioid),
(l. **ábra**),

180. $r = \dfrac{a}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}, \quad \varphi \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ (parabola),

181. $r = \dfrac{p}{1 + \cos\varphi}, \quad \varphi \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ (parabola),

182. $r = \dfrac{1}{1 - \cos\varphi}, \quad \varphi \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ (parabola),

183. $r = 2a(1 + \cos\varphi), \quad \varphi \in [0, \varphi_1]$ (kardioid),

184. $r = a \sin^3 \dfrac{\varphi}{3}, \quad [0, 3\pi]\,,$

185. $r = a \operatorname{th} \dfrac{\varphi}{2}, \quad \varphi \in [0, 2\pi]\,,$

186. $r = a\dfrac{e^\varphi - 1}{e^\varphi + 1}, \quad \varphi \in [0, \varphi_1]\,,$

187. $r = 1 - \varphi^2, \quad \varphi \in [-1, 1]\,.$

188. $r = e^{a\varphi}, \quad \varphi \in [0, \varphi_1]$ (φ_1 konstans), (logaritmikus spirális: $\ln r = a\varphi$),

Térfogat

D 13.23 *Legyen f az (a, b) intervallumon értelmezett valós értékű függvény (az $a = -\infty$ és $b = \infty$ esetet is megengedve). A f grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával előálló forgásfelület, valamint (véges a és b esetén) az $x = a$ és $x = b$ egyenletű sík által határolt* **forgástest térfogatán** *a*

$$\pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

határozott vagy improprius integrált értjük, feltéve, hogy ez az integrál létezik.

P 13.24 *Számítsuk ki a $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ egyenletű görbe x tengely körüli megforgatásával keletkező forgásfelület, és a görbe legkisebb abcisszájú pontjában az x tengelyre merőlegesen állított sík által határolt test térfogatát. Először megkeressük az integrálás határait. A $\sqrt{x}$ értelmezési tartománya miatt $0 \le x$. A $\sqrt{x} = 1 - \sqrt{y}$ miatt $\sqrt{x} \le 1$, tehát $x \le 1$, lásd az ábrát. A V térfogat:*

$$V = \pi \int_0^1 (1 - \sqrt{x})^4\, dx = \frac{\pi}{15}\,.$$

Feladatok

Számítsuk ki az alábbi egyenletű görbék x tengely körüli megforgatásával keletkező forgásfelület, valamint a megadott intervallumok végpontjaiban az x tengelyre merőlegesen állított síkok által határolt forgástestek térfogatát.

189. $y = x - \dfrac{1}{x},\ [1,3]$, **190.** $y = \sqrt{1+x^2},\ [0,3]$, **191.** $y = \cos^2 x,\ [0,\pi]$,

192. $y = \operatorname{ch} x,\ [-1,1]$, **193.** $y = e^{-x},\ [0,\infty)$, **194.** $y = \ln x,\ [1,3]$,

195. $y = xe^x,\ (-\infty, 0]$,

196. $y = \sqrt{a^2 - x^2},\ [-a,a]$, (gömbtérfogat).

Számítsuk ki az alábbi egyenletű görbék x tengely körüli megforgatásával keletkező zárt forgásfelületek térfogatát.

197. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, (gömbtérfogat), **198.** $y = 1 - x^2$,

199. $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$,

200. $y = b\sqrt{1 - \left(\dfrac{x}{a}\right)^2},\ a > 0,\ b > 0$ (forgási ellipszoid).

Felszín

D 13.25 *Legyen f az (a,b) intervallumon értelmezett valós értékű függvény (az $a = -\infty$ és $b = \infty$ esetet is megengedve). Az f grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával előálló* **forgásfelület felszínén** *a*

$$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$$

határozott vagy improprius integrált értjük, feltéve, hogy ez az integrál létezik.

T 13.26 *Ha egy sima görbe $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \le t \le t_2$ alakú paraméteres egyenletrendszerrel van megadva, akkor az x tengely körüli megforgatásával előálló* **forgásfelület felszíne**

$$s = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\, dt\,.$$

Feladatok

Számítsuk ki az alábbi egyenletű görbeívek x tengely körüli megforgatásával keletkező forgásfelületek felszínét.

201. $y = \sqrt{x}, \ \ x \in [0,1]\,,$ **202.**$^{\triangleright}$ $y = \sin x, \ \ x \in [0,\pi]\,,$

203.$^{\triangleright}$ $y = \operatorname{tg} x, \ \ x \in [0,\pi/4]\,,$

204. $y = a \operatorname{ch} \dfrac{x}{a}, \ \ x \in [-a,a]$ (katenoid, láncfelület),

205.$^{\triangleright}$ $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, \ \ x \in [0,a], \ \ (a > 0$ konstans).

Számítsuk ki az alábbi görbék x tengely körüli megforgatásával keletkező zárt forgásfelületek felszínét.

206. $y = \sqrt{a^2 - x^2},$ (gömbfelszín),

207.$^{\triangleright}$ $y = b\sqrt{1-(x/a)^2}, \ \ (a > 0$ konstans) (ellipszoid),

208.$^{\triangleright}$ $y = \operatorname{ch} 2 - \operatorname{ch} x\,,$ **209.**$^{\triangleright}$ $y = 1 - x^2\,.$

Számítsuk ki az alábbi, paraméteresen adott görbék x tengely körüli megforgatásával keletkező forgásfelületek felszínét ($a > 0$ konstans).

210. $x = a\cos t, \ \ y = a \sin t, \ \ t \in [0,\pi],$ (gömbfelszín),

211.$^{\triangleright}$ $x = a\cos^3 t, \ \ y = a\sin^3 t, \ \ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\,,$

212.$^{\triangleright}$ $x = a(t - \sin t), \ \ y = a(1-\cos t), \ \ t \in [0, 2\pi],$ (ciklois),

213.$^{\triangleright}$ $x = a(2\cos t - \cos 2t), \ \ y = a(2\sin t - \sin 2t), \ \ t \in [0,\pi]\,,$

214.$^{\triangleright}$ $x = e^t \sin t, \ \ y = e^t \cos t, \ \ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\,.$

Tömegközéppont

D 13.27 *Az f függvény és az (a,b) intervallum által meghatározott görbevonalú trapéz $P(x_s, y_s)$* **tömegkközéppont***jának* **koordinátái** *az*

$$x_s = \frac{M_y(a,b)}{T(a,b)}, \quad y_s = \frac{M_x(a,b)}{T(a,b)}$$

képletekkel számolt értékek, ahol
$T(a,b) = \int_a^b f(x)\,dx$ (a görbevonalú trapéz területe),
$M_y(a,b) = \int_a^b x \cdot f(x)\,dx, \ \ M_y(a,b) = \int_a^b f^2(x)\,dx$ **(statikai nyomatékok)**.

T 13.28 *Ha egy görbe sima és paraméteres alakban van megadva ($x = x(t), \ y = y(t),$ $t_1 \le t \le t_2$), akkor a görbéhez és az $(x(t_1), x(t_2))$ intervallumhoz tartozó görbevonalú trapéz tömegközéppontjának koordinátáit is $x_s = M_y/T, \ y_s = M_x/T$ határozza meg, ahol*

$$T = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\dot{x}(t)\,dt\,, \quad M_x = \int_{t_1}^{t_2} x(t)\dot{x}(t)\,dt\,, \quad M_y = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} y^2(t)\dot{x}(t)\,dt\,.$$

T 13.29 *Síkbeli polárkoordináta-rendszerben $r = r(\varphi)$, $(\alpha \le \varphi \le \beta)$ alakú egyenlettel megadott görbe és a polártengely közé eső görbevonalú trapéz tömegközéppontjának koordinátái: $x_s = M_y/T$, $y_s = M_x/T$,ahol az $x(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi$ és $y(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi$ függvényekre vonatkozóan*

$$T = \int_\alpha^\beta y(\varphi)x'(\varphi)\,d\varphi\,, \quad M_x = \int_\alpha^\beta x(\varphi)x'(\varphi)\,d\varphi\,, \quad M_y = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta y^2(\varphi)x'(\varphi)\,d\varphi\,.$$

Feladatok

Ábrázoljuk az alábbi egyenletű görbék és egyenesek által határolt síkidomot, és határozzuk meg tömegközéppontjának koordinátáit.

215. $y = x^3, \quad y = 0, \quad x = 1\,,$

216. $y = \dfrac{1}{x}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 4\,,$

217. $y = \dfrac{1}{x^2}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 3\,,$

218. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $(a > 0$ konstans$)$, $\quad y = 0\,,$

219. $y = b\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}$, $(a$ és b pozitív konstansok$)$, $\quad y = 0\,.$

Határozzuk meg az alábbi, paraméteresen megadott görbék és az x tengely által határolt síkidomok tömegközéppontjának koordinátáit (a és b pozitív konstansok).

220. $x = a\cos t, \;\; y = a\sin t, \;\; (0 \le t \le \pi)\,,$

221. $x = a\cos t, \;\; y = b\sin t, \;\; (0 \le t \le \pi)\,,$

222. $x = a(t - \sin t), \;\; y = a(1 - \cos t), \;\; (0 \le t \le 2\pi)\,,$

223. $x = a\cos^3 t, \;\; y = a\sin^3 t, \;\; t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\,.$

Határozzuk meg az alábbi, polárkoordinátás egyenletű görbék által határolt szektorok tömegközéppontjának koordinátáit abban a derékszögű koordináta–rendszer ben, amelynek origója a pólussal, pozitív x féltengelye pedig a polártengellyel esik egybe (az a pozitív konstans).

224. $r = a, \;\; \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\,,$

225. $r = a\varphi, \;\; \varphi \in [0, \pi]\,,$

226. $r = 2a(1 + \cos\varphi), \;\; \varphi \in [0, \pi]\,,$

227. $r = ae^{\varphi}, \;\; \varphi \in [0, \pi]\,.$

Határozott integrál kiszámítása közelítő módszerekkel

T 13.30 *Legyen f az $[a,b]$ intervallumon értelmezett és integrálható valós függvény. Osszuk fel az $[a,b]$ intervallumot az $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ pontokkal n egyenlő részre. Legyen*

$$h = \frac{b-a}{n} \quad \text{és} \quad t_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2} \quad (i = 1,\, 2,\, \cdots n)\,.$$

*Minden egyes $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2\cdots, n)$ részintervallumon az $y = f(x)$ egyenletű görbének a $P_{i-1}(x_{i-1}\,, f(x_{i-1}))$ és $P_i(x_i\,, f(x_i))$ pontját összekötő íve helyett az $y = f(t_i)$ egyenletű szakaszt véve (**téglalapmódszer**)*

$$\int_a^b f(x)\,dx \;\approx\; h\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,;$$

a pontos érték és a közelítő érték közötti D_n eltérésre

$$D_n \;\le\; \frac{(b-a)^3}{24n^2}\sup\{|f''|\}\;; x \in [a,b]\}\,,$$

ha f az $[a,b]$ intervallumon kétszer folytonosan differenciálható.

*Ha pedig az előbbi beosztás után minden egyes $P_{i-1}P_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ ív helyett a $P_{i-1}P_i$ húrt vesszük (**trapézmódszer**), akkor*

$$\int_a^b f(x)\,dx \;\approx\; h\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]$$

és

$$D_n \;\le\; \frac{(b-a)^3}{12n^2}\sup\{|f''|\}\;; x \in [a,b]\}\,,$$

ha f az $[a,b]$ intervallumon kétszer folytonosan differenciálható.

*A **parabola** vagy **Simpson módszer**nél az intervallumot páros számú $(2n)$ részre osztjuk, és az $y = f(x)$ grafikonjának az $x_{2i-2}\,, x_{2i-1}\,, x_{2i}$*
$(i = 1, 2, \cdots, n)$ abcisszájú pontjain átmenő görbeívét az ugyanezen a pontokon átmenő parabolaívekkel (vagy, ha ezek a pontok kollineárisak, akkor összekötő szakaszukkal) helyettesítjük. Ekkor

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1})\right]$$

és

$$D_{2n} \;\le\; \frac{(b-a)^5}{2880n^4}\sup\{|f^{(4)}|\}\;; x \in [a,b]\}\,,$$

ha az f az $[a,b]$ intervallumon négyszer folytonosan differenciálható.

Feladatok

Számítsuk ki közelítőleg az alábbi integrálokat téglalap-, trapéz-, ill. parabola-módszerrel (az intervallumokat a zárójelben feltüntetett számú részre osztva). Amennyiben a függvény valamelyik integrálási határán nincs értelmezve, tekintsük függvényértéknek az ott felvett határértékét. Amely feladatokban trigonometrikus függvény fordul elő, ott a határok radiánban értendők, és ezért radiánban kell számolni.

228.^{k} $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4+x^3}}$, (4),

229.^{k} $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{1+x^3}\,dx$, (4),

230.^{k} $\displaystyle\int_1^5 \sqrt{126-x^3}\,dx$, (4),

231.^{k} $\displaystyle\int_0^8 \frac{x}{\sqrt[3]{4+x^2}}\,dx$, (6),

232.^{k} $\displaystyle\int_0^{10} \sqrt[3]{125-x^2}\,dx$, (6),

233.^{k} $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^3}\,dx$, (10),

234.^{k} $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx$, (10),

235.^{k} $\displaystyle\int_2^5 \frac{dx}{\ln x}$, (6),

236.^{k} $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\cos x}\,dx$, (10),

237.^{k} $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{x}\,dx$, (10),

238.^{k} $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$, (10),

239.^{k} $\displaystyle\int_0^9 \sqrt{x}\,dx$, (4),

240.^{k} $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{3+\cos x}\,dx$, (6),

241.^{k} $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\ln(1+x)}\,dx$, (6),

242.^{k} $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$, (8),

243.^{k} $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 x}\,dx$, (6),

244.^{k} $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$, (12).