2. fejezet

Halmazelmélet

D 2.1 *Két halmazt akkor és csak akkor tekintünk* **egyenlőnek**, *ha elemeik ugyanazok. A halmazt, melynek nincs eleme,* **üres halmaz***nak nevezzük. Jele:* $\emptyset$.

D 2.2 *Az A halmazt a B halmaz* **részhalmaz***ának nevezzük ($A \subseteq B$), ha az A minden eleme B-nek is eleme. A* **valódi rész***e B-nek ($A \subset B$), ha $A \subseteq B$, de $A \neq B$.*

T 2.3 *A halmazok közötti tartalmazásra teljesül a következő három tulajdonság:*
Reflexivitás: minden A-ra $A \subseteq A$.
Antiszimmetria: ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$, akkor $A = B$.
Tranzitivitás: ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq C$, akkor $A \subseteq C$.

D 2.4 **Halmazműveletek:** *Az A és B halmaz $A \cap B$* **metszetén** *(közös részén) azoknak az elemeknek a halmazát értjük, amelyek mindkét halmazban benne vannak; $A \cup B$* **egyesített***jén (unióján) azoknak a halmazát, amelyek a két halmaz közül legalább az egyikben benne vannak. Az A és B halmaz $A - B$* **különbségén** *értjük az A összes olyan elemeinek halmazát, amelyek nincsenek benne B-ben; $A \ominus B$* **szimmetrikus különbség***én azoknak a halmazát, amelyek a két halmaz közül pontosan az egyikben vannak benne; $A \times B$* **szorzat***án az (a, b) alakú rendezett pároknak a halmazát, ahol $a \in A$, $b \in B$. A H halmaz valamely A részhalmazának H-ra vonatkozó* **komplementer***én a $H - A$ halmazt értjük. Jele $\overline{A}_H$. Halmazokról mindig csak mint egy adott* **alaphalmaz** *részhalmazairól beszélünk, még ha ezt az alaphalmazt nem is nevezzük meg. Ilyenkor az alaphalmazra vonatkozó komplementert egyszerűen $\overline{A}$ jelöli.*

T 2.5 $\subseteq$ **tulajdonságai:** *Tetszőleges A, B, C halmazokra igazak az alábbiak:*
- ha $A \subseteq B$, akkor $A \cap C \subseteq B \cap C$ és $A \cup C \subseteq B \cup C$;
- $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ és $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$;
- ha $A \subseteq B$, akkor $A \cap B = A$, és $A \cup B = B$.

T 2.6 *Bármely A, B, C halmazra fennállnak az alábbi* **azonosságok:**
Asszociativitás: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)\,, \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)\,;$
Kommutativitás: $A \cap B = B \cap A\,, \quad A \cup B = B \cup A\,;$
Idempotencia: $A \cap A = A\,, \quad A \cup A = A\,;$
Elnyelési tulajdonságok: $A \cap (A \cup B) = A\,, \quad A \cup (A \cap B) = A\,;$
Disztributivitás: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)\,, \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)\,.$

D 2.7 *Egy H halmaz összes részhalmazainak halmazát a H halmaz* **hatványhalmaz***ának nevezzük. Jele: $P(H)$. (Megjegyzés: Az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza, így az üres halmaz minden halmaz hatványhalmazának eleme.)*

T 2.8 *Ha A és B olyan halmazok, melyekre A, $B \subseteq H$ teljesül, akkor $A - B = A \cap \overline{B}_H$.*

T 2.9 De Morgan-képletek: *bármely* A, B *halmazra:* $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ és $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Feladatok

Mik az elemei az alábbi halmazoknak?

1. $\{x \in \mathbf{N}^+\,;\ 2|x \text{ és } 100 \le x < 1000\}$,

2. $\{x \in \mathbf{Z}\,;\ 3|x \ \text{ és } \ |x| < 100\}$,

3. $\{k \in \mathbf{N}^+\,;\ x = 3k + 1\}$,

4. $\{x \in \mathbf{R}\,;\ x^2 + 2x + 1 = 0\}$,

5. $\{x \in \mathbf{R}\,;\ x^2 - 2 = 0\}$,

6. $\{x \in \mathbf{Z}\,;\ x^2 - 2 = 0\}$,

7. $\{x \in \mathbf{R}\,;\ x^2 + 1 = 0\}$,

8. $\{x \in \mathbf{R}\,;\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1\}$,

9. $\{x \in \mathbf{R}\,;\ 2 \lg x = \lg x^2\}$,

10. $\{x \in \mathbf{R}\,;\ \lg x = \lg(-x)\}$.

Az (x, y), illetve az (x_n, y_n) számpárokat az xy koordinátasík pontjainak tekintve, milyen geometriai alakzatokat alkotnak az alábbi halmazok?

11. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2\,;\ \ x^2 + y^2 = 1\}$,

12. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2\,;\ \ x^2 + y^2 \le 1\}$,

13. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2\,;\ \ xy = yx\}$,

14. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2\,;\ \ |x| < y \le 1\}$,

15. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2\,;\ \ x^2 + y^2 - 2x - 4y = 4\}$,

16. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2\,;\ \ x^2 + y^2 = 4 \ \text{ és } \ y \ge 0\}$,

17.$^\triangleright$ $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2\,;\ \ 0 \le y \le 4\,,\ \ 0 \le x \le 6 \ \text{ és } \ 3x + 4y \le 22\}$,

18. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2\,;\ \ 0 \le x \le 2\,,\ \text{és}\ \ 0 \le y \le x + 2\}$,

19. $\{(x_n, y_n)\,;\ \ n \in \mathbf{N}^+\,,\ \ x_n = 2^{-n} \ \text{ és } \ y_n = 0\}$,

20. $\{(x_n, y_n)\,;\ \ n \in \mathbf{N}^+\,,\ \ x_n = \frac{1}{n} \ \text{ és } \ y_n = \frac{1}{n^2}\}$,

21.$^\triangleright$ $\{(x, y)\,;\ \ x = t^2\,,\ \ y = 3t^2\,,\ \ t \in \mathbf{R}\}$,

22. $\{(x, y)\,;\ \ x = t^3\,,\ \ y = 3t^3\,,\ \ -1 \le t \le 2\}$,

23. $\{(x, y)\,;\ \ x = \cos t\,,\ \ y = \sin t\,,\ \ 0 < t \le 2\pi\}$.

24. Az első évfolyamos hallgatók közül jelöljük M-mel a második tanköröseket, F-fel a fiúkat, A-val az angolul, N-nel a németül tudó (nyelvvizsgával rendelkező) diákokat. Az előbbi halmazok segítségével (a **D 2.4**-ben definiált halmazműveleteket felhasználva) fejezzük ki a következő halmazokat:
a) A második tankörös fiúk. b) Az angolul és németül tudók.
c) Az angolul vagy németül tudók. d) Az angolul vagy németül tudó fiúk.
e) A vagy angolul vagy németül tudók. f) A második tankörös lányok.
g) A németül tudó lányok. h) A németül nem tudó, második tankörös lányok.

25. Legyen $M = \{m, 2m, 3m, \ldots\}$ és $N = \{n, 2n, 3n, \ldots\}$, ahol m és n adott pozitív egész számok.
a) Milyen m és n esetén valódi része az M halmaz az N halmaznak?
b) Milyen m és n esetén része az M az N-nek?
c) Képezzük a két halmaz közös részét és egyesítését!

26. A következő egyenlőség jobb oldalát egészítsük ki a megfelelő halmazműveleti jellel úgy, hogy fennálljon az egyenlőség:
$$\{x;\quad x \in (A-B) \cup (B-A)\} = A \quad B\,.$$

27.▷ Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak. Válaszunkat igazoljuk!
a) Minden A, B halmazpárra $A-B=(A\cup B)-B=A-(A\cap B)$.
b) Minden A halmazra $A\subseteq A$.
c) Minden A halmazra $\emptyset\subset A$.
d) Van olyan A halmaz, hogy $A\subset\emptyset$.

28.▷ Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges A, B és C halmazok esetén
$$A-B\subseteq C \quad \text{és} \quad A\subseteq B\cup C$$
ekvivalens állítások (vagyis bármelyik teljesülése esetén a másik is fennáll).

29.• Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges L és M halmazok esetén az alábbi A, B, C állítások ekvivalensek:
$A:\quad L\subseteq M;$
$B:\quad L\cap M=L;$
$C:\quad L\cup M=M.$

30.▷ Legyen A, B és C három halmaz. Fejezzük ki a
$$D:=A-(A-(B-(B-C)))$$
halmazt az A, B, C halmazokkal, valamint a metszés és egyesítés jelével! Ennek alapján döntsük el, mivel egyenlő D a következő esetekben:
a) Az A, B és C halmazok páronként közös elem nélküliek (diszjunktak).
b) Pontosan két diszjunkt halmaz van közöttük.
c) Nincs közöttük diszjunkt halmazpár.

31.▷ A következő egyenlőség igaz-e tetszőleges K, L és M halmazokra:
$$(M\cup K)\cap L=(M\cup L)\cap K\,.$$
Ha igaz, akkor bizonyítsuk be, ha nem, akkor adjunk meg három olyan halmazt, melyekre nem teljesül az előbbi egyenlőség.

32.▷ Bizonyítsuk be, hogy az alábbi állítások tetszőleges K, L és M halmazok esetén teljesülnek:
$$\text{a) } (K\cup L)-L\subseteq K, \qquad \text{b) } (K\cap L)-L\subseteq M.$$

33.• Bizonyítsuk be, hogy az A, B, C halmazokra $(A\cup B)\cap C=A\cup(B\cap C)$ akkor és csak akkor teljesül, ha $A\subseteq C$.

34.▷ Igazoljuk, hogy az A és B halmazokra $A-B=B-A$ akkor és csak akkor teljesül, ha $A=B$.

35.▷ Mely A, B halmazpárokra igaz az, hogy $A-B=A\cap B$?

36.▷ Mely A, B halmazpárokra igaz az, hogy $A-B=A\cup B$?

Bizonyítsuk be, hogy az alábbi feladatokban adott összefüggések tetszőleges K, L és M halmazok esetén teljesülnek! Ábrázoljuk Venn-diagrammokkal az egyenlőség mindkét oldalán álló kifejezéseket.

37.$^{\triangleright}$ $K - (K - L) = L - (L - K)$,

38.$^{\bullet}$ $K - (L - M) = (K - L) \cup (K \cap M)$,

39. $(K \cap L) - (K - M) = K \cap L \cap M$,

40. $(K - L) - M = (K - M) - (L - M)$,

41.$^{\triangleright}$ $K = (K \cup L) \cap (K \cup \overline{L})$,

42.$^{\triangleright}$ $K = (K \cap L) \cup (K \cap \overline{L})$,

43.$^{\bullet}$ $K = (K \cap L \cap M) \cup (K \cap L \cap \overline{M}) \cup (K \cap \overline{L} \cap M) \cup (K \cap \overline{L} \cap \overline{M})$,

44.$^{\bullet}$ $(K - L) \cup (L - M) \cup (M - K) \cup (K \cap L \cap M) = K \cup L \cup M$,

45. $(K \cup L) \cap (L \cup M) \cap (K \cup M) = (K \cap L) \cup (L \cap M) \cup (K \cap M)$.

46.$^{\triangleright}$ Mutassuk meg, hogy az A és B halmazokra $A - B = A$ pontosan akkor teljesül, ha $B - A = B$.

47.$^{\triangleright}$ Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges A, B és C halmazok esetén

$$A \ominus B \subseteq (A \ominus C) \cup (B \ominus C).$$

48.$^{\triangleright}$ Bizonyítsuk be, hogy $A \ominus B = A \cup B$ akkor és csak akkor teljesül, ha A és B diszjunkt halmazok!

Igazoljuk, hogy tetszőleges A, B halmazokra fennállnak az alábbi azonosságok:

49.$^{\triangleright}$ $(A \cap \overline{B}) \ominus (\overline{A} \cap B) = A \ominus B$,

50. $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = A \ominus B$.

51.$^{\triangleright}$ Bizonyítsuk be, hogy a K, L, M és N halmazokra az alábbi egyenlőségek ekvivalensek, azaz vagy mindkettő fennáll, vagy egyik sem:

$$K \ominus L = M \ominus N \qquad K \ominus M = L \ominus N.$$

Adott A és B halmazokhoz határozzuk meg az összes olyan X halmazt, amelyre az alábbi egyenlet teljesül:

52.$^{\triangleright}$ $A - (B - X) = A$,

53.$^{\triangleright}$ $(A - X) \cup B = X$,

54.$^{\triangleright}$ $(A - X) \cap (B - X) = A$,

55.$^{\triangleright}$ $(A \cap X) \cup B = X$,

56.$^{\triangleright}$ $(A \cap B) \cup X = B \cup X$,

57.$^{\triangleright}$ $A - X = X - A$.

58. Írjuk fel a $H = \{a, b, c\}$ halmaz hatványhalmazát!

59.$^{\triangleright}$ Adjuk meg a $P(P(P(\emptyset)))$ halmaz elemeit!

Igazoljuk, hogy bármely A és B halmaz esetén

60.$^{\triangleright}$ $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$,

61.$^{\triangleright}$ $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$,

62.$^{\triangleright}$ $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$ akkor és csak akkor, ha $B \subseteq A$ vagy $A \subseteq B$.

Az alábbi feladatokban lévő halmazok mindegyikének véges sok eleme van. Jelölje $|M|$ az M halmaz elemeinek számát! Bizonyítsuk be az alábbi állítások helyességét:

63. $|A| \le |B|$, ha $A \subseteq B$,

64. $|A \cup B| \le |A| + |B|$,

65. $|A \cap B| \le \min\{|A|, |B|\}$,

66. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$,

67.$^{\bullet}$ $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$,

68. $$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = \sum_{i=1}^{4} |A_i| - \sum_{i \ne j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i \ne j \ne k \ne i} |A_i \cap A_j \cap A_k| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|.$$

69. Egy 33 fős tankörben háromféle idegen nyelvet tudnak: 20 diák tud angolul, 16 németül és 6 franciául, 5 diák tud pontosan két nyelven és 2 diák tud mindhárom nyelven beszélni. Hányan nem tudnak egy idegen nyelvet sem, és hányan tudnak pontosan egy idegen nyelven beszélni?

70. Egy faluban 1000 ház van. Ezek közül 250-ben van autó, 900-ban hűtőszekrény, 950-ben televízió és 990-ben rádió. Legalább hány házban van mind a négy eszköz?

71.• Hány eleme van egy n elemű A_n halmaz hatványhalmazának?

72.⋆ Mutassuk meg, hogy nincs olyan A halmaz, amelyhez létezne A és $P(A)$ elemei között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés. (Útmutatás: tegyük fel, hogy van egy ilyen kölcsönösen egyértelmű $\varphi : A \to P(A)$ leképezés, és vizsgáljuk meg az $X := \{y \in A\,;\ y \notin \varphi(y)\}$ halmazt.)

73. Legyen $A = \{x \in \mathbf{R}\,; 1 \leq x \leq 5\}$ és $B = \{y \in \mathbf{R}\,; 3 \leq y \leq 4\}$. Az (x, y) számpárokat a sík pontjainak tekintve ábrázoljuk az $A \times B$ halmazt!

74. Legyen $A = \{a\}$, $B = \{x, y\}$, $C = \{1, 2, 3\}$. Soroljuk fel az $A \times B \times C$, az A^3 és a B^3 halmazok elemeit!

75. Az m elemű A halmaz és az n elemű B halmaz metszete egy k elemű halmaz. Hány eleme van az alábbi halmazoknak?
a) $A \times B$, b) $(A \cap B)^2$, c) $(A \cup B)^3$, d) $(A \setminus B)^2$, e) $(A \ominus B)^4$, f) $A \times B \times A$.