2. Halmazelmélet (megoldások)

1. A pozitív háromjegyű páros számok halmaza.

2. Az olyan, 3-mal osztható egész számok halmaza, amelyek (-100)-nál nagyobbak és 100-nál kisebbek.

3. Az olyan pozitív egész számok halmaza, amelyeknek 3-mal való osztási maradéka 1.

4. $\{-1\}$. **5.** $\{-\sqrt{2}\,,\ \sqrt{2}\}$.

6. Az üres halmaz, mert az $x^2-2=0$ egyenletnek nincs gyöke az egész számok halmazában. (**D 2.1**)

7. Az üres halmaz, mert az $x^2+1=0$ egyenletnek nincs gyöke a valós számok halmazában. (**D 2.1**)

8. Az x bármilyen valós szám lehet.

9. A pozitív valós számok halmaza. **10.** $\emptyset$ (**D 2.1**).

11. Az $O(0,0)$ középpontú, $r=1$ sugarú körvonal.

12. Az $O(0,0)$ középpontú, $r=1$ sugarú körlap a határoló körvonallal együtt.

13. Az egész xy koordinátasík.

14. Az $O(0,0)$, $A(1,1)$ és $B(-1,1)$ pontok által meghatározott háromszög (lap), melyből elhagyjuk az OA és OB szakaszok pontjait.

15. Az $O(1,2)$ középpontú, $r=3$ sugarú körvonal.

16. Az $O(0,0)$ középpontú, $r=2$ sugarú körvonalnak az a része, amely az x tengely fölött és az x tengelyen van.

17. Mivel a $3x+4y=22$ egyenletű egyenes az $x=6$ (illetve az $y=4$) egyenletű egyenest az $y=1$ ordinátájú (illetve az $x=2$ abszcisszájú) pontban metszi, ezért a megadott halmaz annak az ötszögnek a belső és határoló pontjaiból áll, melynek csúcsai: $(0,0)$, $(6,0)$, $(6,1)$, $(2,4)$, $(0,4)$.

18. Annak a trapéznak belső és határoló pontjai, melynek csúcsai: $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,4)$, $(0,2)$.

19. Az x tengely $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{2^3}, \cdots$ abszcisszájú pontjai.

20. Belátható, hogy $y_n = x_n^2$. Ebből következik, hogy ez a halmaz az $y=x^2$ parabola következő pontjaiból áll: $P_1(1,1)$, $P_2(\frac{1}{2},\frac{1}{2^2})$, $\cdots$, $P_n(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2})$, $\cdots$.

21. Az $x=t^2$ és $y=3t^2$ feltételek miatt x és y nem lehet negatív. Helyettesítés után kapjuk, hogy $y=3x$. Ezért a megadott halmaz az $y=3x$ egyenletű egyenesnek az a része, mely az első síknegyedben halad.

22. Az $y=3x$ egyenletű egyenesnek az a szakasza (a végpontokkal együtt), melynek végpontjai: $A(-1,-3)$, $B(8,24)$.

23. Az $O(0,0)$ középpontú, $r=1$ sugarú körvonal.

24. a) $M\cap F$. b) $A\cap N$. c) $A\cup N$. d) $(A\cup N)\cap F$.
e) E mondat — a szövegkörnyezettől függően — kétféleképpen is értelmezhető:

egyik értelme azonos a c)-belivel, a másik szerint azokról van szó, akik „vagy angolul, vagy németül tudnak, de nem mind a két nyelven", ekkor a halmaz: $A \ominus N$.
f) $M - F$, vagy $M \cap \overline{F}_H$, ahol H az első évfolyamosok halmaza, vagy egyszerűen csak $M \cap \overline{F}$ (l. **T 2.8**).
g) Az f) feladathoz hasonlóan: $N - F = N \cap \overline{F}$.
h) Ide azok tartoznak, akik „nem tudnak németül és második tankörösök és nem fiúk", azaz a halmaz $\overline{N} \cap M \cap \overline{F}$ (l. **T 2.6** asszociativitás). Másik megoldás f) és g) alapján: a második tankörös lányok közül elhagyjuk a németül tudó lányokat, így az $(M - F) - (N - F)$ halmazt kapjuk. (**T 2.8** segítségével bizonyítható, hogy e két halmaz azonos.)

25. a) $M \subset N$ akkor és csak akkor teljesül, ha n osztója m-nek, de $n \neq m$.
b) $M \subseteq N$ akkor és csak akkor, ha n osztója m-nek.
c) $M \cap N = \{t, 2t, 3t, \ldots\}$, ahol t az m és n legkisebb közös többszöröse. Ennek bizonyításához használjuk fel az m, az n és a legkisebb közös többszörösük törzstényezős alakját. A két halmaz uniója az olyan pozitív egész számok halmaza, amelyek m-mel, vagy n-nel oszthatók.

26. A **D 2.4** szerint a jobb oldal: $A \ominus B$.

27. a) 1. megoldás: A különbség (**D 2.4**) definíciója miatt

$$(A \cup B) - B = \{x ; \quad x \in A \cup B\,, \quad \text{de} \quad x \notin B\}\,.$$

Ez az egyesítés definíciója miatt mindazon A-beli elemek halmaza, amelyek nem tartoznak B-hez, vagyis éppen az $A - B$ halmaz. Az $A - B = A - (A \cap B)$ egyenlőség hasonlóan bizonyítható.
2. megoldás: A bizonyítandó azonosság komplementerekkel kifejezve (**T 2.8**):

$$A \cap \overline{B} = (A \cup B) \cap \overline{B} = A \cap (\overline{A} \cap B)\,.$$

Ez pedig igaz, mert (a **T 2.6** és a **T 2.9** tételek alapján): $(A \cup B) \cap \overline{B} = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{B}) = (A \cap \overline{B}) \cup \emptyset = A \cap \overline{B}$, és
$A \cap (\overline{A} \cap B) = A \cap (\overline{A} \cup \overline{B})(A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) = \emptyset \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap \overline{B}$.
b) Igaz. Vegyük figyelembe a **D 2.2** definíciót és azt, hogy az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza.
c) és d) hamis, mert az üres halmaznak nincs valódi része. (Még önmaga sem.)

28. Először azt mutatjuk meg, hogy ha $A - B \subseteq C$, akkor $A \subseteq B \cup C$. A **D 2.4** definíció miatt $A \subseteq B \cup (A - B)$, ha tehát $A - B \subseteq C$, akkor $B \cup (A - B) \subseteq B \cup C$. Ekkor viszont a tartalmazás tranzitivitása miatt (**T 2.3**) $A \subseteq B \cup C$. Másodszor azt bizonyítjuk be, hogy ha $A \subseteq B \cup C$, akkor $A - B \subseteq C$. A **T 2.5** szerint, ha $A \subseteq B \cup C$, akkor $A \cap \overline{B} \subseteq (B \cup C) \cap \overline{B}$, de a disztributivitási azonosságot felhasználva
$(B \cup C) \cap \overline{B} = (B \cap \overline{B}) \cup (C \cap \overline{B}) = (C \cap \overline{B}) = C - B \subseteq C$ miatt $A \cap \overline{B} \subseteq C$, azaz $A - B \subseteq C$.

29. A három állítás páronkénti ekvivalenciájához elegendő bizonyítani, hogy A-ból következik

B, B-ből következik C és C-ből következik A. Ezt a következő ábra szemlélteti:
Könnyen belátható, hogy ekkor a fordított irányítású „következtetések” is teljesülnek. Pl. B-ből következik A, mert B-ből következik C és C-ből következik A.
A-ból következik a B:
A **T 2.5** tétel szerint $L \subseteq M$-ből következik, hogy $L \cap L \subseteq M \cap L$, azaz $L \cap M \supseteq L$. A **T 2.5** szerint viszont tetszőleges L és M halmazokra $L \cap M \subseteq L$. A $L \cap M \supseteq L$ és a $L \cap M \subseteq L$ egyszerre csak $L \cap M = L$ esetén teljesülhet.
B-ből következik C:
Az $L = L \cap M$ feltevésből $L \cup M = (L \cap M) \cup M$ adódik, s e kifejezés jobb oldala az egyik elnyelési tulajdonság (**T 2.6**) szerint M-mel egyenlő.
C-ből következik A:
Ha $L \cup M = M$, akkor $(L \cup M) - M = M - M = \emptyset$ is teljesül. A bal oldal a különbség definíciója szerint $L - M$-mel egyenlő, tehát $L - M = \emptyset$. Ez azt jelenti, hogy L-nek nincs olyan eleme, amely nincs benne a M halmazban, vagyis $L \subseteq M$.

30. A **T 2.8** tétel szerint $B - C = B \cap \overline{C}$. Ez utóbbit, a **T 2.8** és **T 2.9** tételeket, valamint a disztributivitást alkalmazva

$$\begin{aligned} B - (B - C) &= B \cap \overline{(B - C)} = B \cap \overline{B \cap \overline{C}} = B \cap (\overline{B} \cup C) \\ &= (B \cap \overline{B}) \cup (B \cap C) = B \cap C\,. \end{aligned}$$

Ezt figyelembe véve, az előbbihez hasonló átalakítással kapjuk, hogy

$$D = A - (A - (B - (B - C))) = A \cap B \cap C\,.$$

Ez utóbbi kifejezés az üres halmazzal egyenlő, ha az A, B, C halmazok közül legalább kettő metszete üres. Ezért az a) és b) esetekben $D = \emptyset$, a c) esetben pedig $D = A \cap B \cap C$.

31. Mindkét oldalra alkalmazzuk a disztributív tulajdonságok egyikét (**T 2.10**).

$$\begin{aligned} (M \cup K) \cap L &= (M \cap L) \cup (K \cap L)\,, \\ (M \cup L) \cap K &= (M \cap K) \cup (L \cap K)\,. \end{aligned}$$

Ezekből leolvasható, hogy ha pl. $M \cap L = K \cap L = \emptyset$, de $M \cap K \neq \emptyset$, akkor a feladatbeli egyenlet bal oldalán álló halmaz üres, a jobb oldalon lévő pedig nem üres. Tehát az állítás nem igaz tetszőleges három halmazra.

32. a) A **D 2.4** definíció alapján: $(K \cup L) - L = K - L \subseteq K$.
Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $K \cap L = \emptyset$.
b) A **D 2.4** definícióból $(K \cap L) - L = \emptyset$ következik. A **D 2.7** definíciót követő megjegyzés alapján viszont $\emptyset \subseteq M$ teljesül minden M halmazra. Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $M = \emptyset$.

33. Ha $A \subseteq C$, akkor az egyik disztributív tulajdonság (**T 2.6**) és a **T 2.5** tétel miatt $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) = A \cup (B \cap C)$. Tegyük fel, hogy $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$. Ha $A \subseteq C$ nem teljesülne, akkor lenne olyan t, melyre $t \in A$ és $t \notin C$. Ebből viszont az következnék, hogy $t \notin (A \cup B) \cap C$. De $t \in A$ miatt $t \in A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ lenne, ami ellentmondás.

34. Ha $A = B$, akkor $A - B = \emptyset$ és $B - A = \emptyset$. Tehát $A - B = B - A$. Másrészt, az $A \neq B$ feltételből következik, hogy létezik olyan t, melyre $t \in A$, de $t \notin B$. Ekkor viszont $t \in A - B$, de $t \notin B - A$.

35. A **D 2.4** és **D 2.4** definíciókból következik, hogy $A - B$ és $A \cap B$ diszjunkt halmazok. Ezért az egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha mindkét oldalon az üres halmaz áll. De ha $A \cap B = \emptyset$, akkor $A - B = A$, és így a jelen esetben $A = \emptyset$ kell legyen (B tetszőleges). Ez elegendő is, mert $\emptyset - B = \emptyset$ és $\emptyset \cap B = \emptyset$.

36. Képezzük mindkét oldal metszetét a B halmazzal:

$$(A - B) \cap B = (A \cup B) \cap B\,.$$

A jobb oldal az egyik elnyelési azonosság (**T 2.6**) miatt B-vel egyenlő. Kaptuk, hogy $(A - B) \cap B = B$. Ez csak úgy teljesülhet (**D 2.4**-ből következően), ha $B = \emptyset$. (Az A tetszőleges halmaz lehet.) Ez elegendő feltétel is, mert ha A tetszőleges halmaz és $B = \emptyset$, akkor $A - \emptyset = A$ és $A \cup \emptyset = A$.

37. A **T 2.8**, **T 2.9** és **T 2.6** tételek alapján:
$K - (K - L) = K \cap (\overline{K \cap \overline{L}}) = K \cap (\overline{K} \cup L) = (K \cap \overline{K}) \cup (K \cap L) = K \cap L$.
Ugyanúgy kapjuk, hogy $L - (L - K) = L \cap K$. E kettő együtt, a metszés kommutatív tulajdonsága miatt, az azonosság teljesülését jelenti.

38. $K - (L - M) =$
$(K \cap (\overline{L \cap \overline{M}}) =$
$K \cap (\overline{L} \cup M) =$
$(K \cap \overline{L}) \cup (K \cap M) =$
$(K - L) \cup (K \cap M)$.

40. $(K - L) - M = (K \cap \overline{L}) \cap \overline{M} = K \cap \overline{L} \cap \overline{M}$, másrészt
$(K - M) - (L - M) = (K \cap \overline{M}) \cap (\overline{L \cap \overline{M}}) = (K \cap \overline{M}) \cap (\overline{L} \cup M) =$
$= (K \cap \overline{M} \cap \overline{L}) \cup (K \cap \overline{M} \cap M) = (K \cap \overline{M} \cap \overline{L}) \cup \emptyset = K \cap \overline{L} \cap \overline{M}$.

41. $K = K \cup \emptyset = K \cup (L \cap \overline{L}) = (K \cup L) \cap (K \cup \overline{L})$.

42. $K = K \cap H = K \cap (L \cup \overline{L}) = (K \cap L) \cup (K \cap \overline{L})$, ahol H az alaphalmaz.

43. Az előző feladathoz hasonlóan, az $A = A \cap H$ azonosság és a disztributivitás felhasználásával:
$K = K \cap H = K \cap (L \cup \overline{L}) = (K \cap L) \cup (K \cap \overline{L})$
$= (K \cap L \cap H) \cup (K \cap \overline{L} \cap H) = (K \cap L \cap (M \cup \overline{M})) \cup (K \cap \overline{L} \cap (M \cup \overline{M}))$

$= (K \cap L \cap M) \cup (K \cap L \cap \overline{M}) \cup (K \cap \overline{L} \cap M) \cup (K \cap \overline{L} \cap \overline{M})$.
A bizonyítás elvégezhető fordított sorrendben is. E feladat megoldásának módszere felhasználható bonyolultabb összefüggések bizonyításában (lásd a következő két feladatot). Igaz ugyanis a következő állítás, melyet a mellékelt bal oldali ábra is szemléltet: minden halmaz, amelyet a K, L és M halmazokkal és halmazműveletekkel írunk fel, felbontható $\widetilde{K} \cap \widetilde{L} \cap \widetilde{M}$ alakú tagok uniójaként, ahol $\widetilde{K}$ a K és a $\overline{K}$ halmazok valamelyikét jelenti. $\widetilde{K} \cap \widetilde{L} \cap \widetilde{M}$ alakú tagból nyolc féle van, melyet különböző satírozásokkal jelöltünk. E feladatban épp a K halmazt bontottuk fel ilyen tagok uniójaként, melyet a jobb oldali ábra mintázata szemléltet.

44. 1. megoldás: Az előző feladat eredményét és módszerét felhasználva:
$K = (K \cap L \cap M) \cup (K \cap L \cap \overline{M}) \cup (K \cap \overline{L} \cap M) \cup (K \cap \overline{L} \cap \overline{M})$,
$L = (K \cap L \cap M) \cup (K \cap L \cap \overline{M}) \cup (\overline{K} \cap L \cap M) \cup (\overline{K} \cap L \cap \overline{M})$,
$M = (K \cap L \cap M) \cup (K \cap \overline{L} \cap M) \cup (\overline{K} \cap L \cap M) \cup (\overline{K} \cap \overline{L} \cap M)$,
$K - L = (K \cap \overline{L}) = (K \cap \overline{L} \cap (M \cup \overline{M})) = (K \cap \overline{L} \cap M) \cup (K \cap \overline{L} \cap \overline{M})$,
$L - M = (K \cap L \cap \overline{M}) \cup (\overline{K} \cap L \cap \overline{M})$, $M - K = (\overline{K} \cap L \cap M) \cup (\overline{K} \cap \overline{L} \cap M)$.
Behelyettesítés után látható, hogy az egyenlőség fennáll. A fenti bal oldali Venn-diagrammon is kövessük és ellenőrizzük a felbontás és az egyenlőség két oldalán lévő halmazok összehasonlításának lépéseit.
2. megoldás: A bizonyítást a műveletek definíciói és az antiszimmetria tulajdonság (**T 2.3**) alkalmazásával végezzük. Ha x a bal oldal egy tetszőleges eleme, akkor a **D 2.4** definíció szerint a következő négy eset valamelyike teljesül: $x \in K - L$, $x \in L - M$, $x \in M - K$, $x \in K \cap L \cap M$. Ezért x a K, L, M halmazok közül legalább egynek eleme, vagyis benne van a jobb oldali halmazban. Legyen y a jobb oldal egy tetszőleges eleme. Ha y a K, L, M halmazok közül pontosan egynek, vagy pontosan kettőnek eleme, akkor (**D 2.4** miatt) vagy $y \in K - L$, vagy $y \in L - M$, vagy $y \in M - K$. Ha pedig mindhárom halmaz tartalmazza y-t, akkor metszetüknek is eleme. Tehát y minden esetben eleme a bal oldali halmaznak. Ebből (**T 2.3** miatt) az állítás helyessége következik.

46. a) Ha $A - B = A$, akkor (a **D 2.4** definíció miatt) A és B diszjunkt halmazok. Ekkor viszont $B - A = B$. A másik irányú állítás ugyanígy bizonyítható.

47. Legyen x az $A \ominus B$ halmaznak tetszőleges eleme. Ekkor a szimmetrikus különbség definíciója szerint $x \in A$, vagy $x \in B$, de $x \notin A \cap B$.
Ha $x \in A$ és $x \in C$, akkor $x \in B \ominus C$. Ha pedig $x \in A$ és $x \notin C$, akkor $x \in A \ominus C$. Az $x \in B$ eset hasonlóan vizsgálható.

48. Ha A és B diszjunkt halmazok, akkor $A \cap B = \emptyset$, ezért a **D 2.4** definícióból $A \ominus B = A \cup B$ közvetlenül adódik.
Tegyük fel, hogy $A \ominus B = A \cup B$. A **D 2.4** definíció alapján

$$(A \ominus B) \cap (A \cap B) = \emptyset\,.$$

Ezért a feltevés miatt $(A \cup B) \cap (A \cap B) = \emptyset$ is teljesül. Másrészt azonban $A \cap B \subseteq A \cup B$, így $(A \cup B) \cap (A \cap B) = A \cap B$. Tehát $A \cap B = \emptyset$, azaz A és B diszjunkt halmazpár.

49. A **T 2.8** tétel alapján a bal oldal $(A \cap \overline{B}) \ominus (\overline{A} \cap B) = (A - B) \ominus (B - A)$. Mivel $A - B$ és $B - A$ diszjunkt halmazok, ezért az előző feladat megoldásából következik, hogy $(A - B) \ominus (B - A) = (A - B) \cup (B - A)$. A jobb oldal pedig a **D 2.4** definíció alapján az $A \ominus B$ halmazzal egyenlő.

50. Alkalmazzuk a halmazműveletek disztributív tulajdonságait, a **T 2.8** tételt és az előző feladat megoldását.

51. Könnyen belátható, hogy a $K \ominus L = M \ominus N$ egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha nincs olyan x elem, mely a K, L, M és N halmazok közül páratlan soknak volna az eleme. De ugyanez mondható el a $K \ominus M = L \ominus N$ egyenlőségről is, tehát e két egyenlőség ekvivalens egymással, vagyis egyszerre igazak, vagy hamisak.

52. A feladatbeli egyenlet a **D 2.4** definíció szerint pontosan akkor teljesül, ha
(*) $\qquad A \cap (B - X) = \emptyset.$
Az X-nek tehát tartalmaznia kell B minden olyan elemét, amely A-nak is eleme; azaz szükséges, hogy $X \supseteq A \cap B$ legyen. De ez elegendő is, mert ha $X \supseteq A \cap B$, akkor teljesül a (*) egyenlőség.

53. Ha van ilyen X, akkor $A - X \subseteq X$, ami csak $A - X = \emptyset$ esetén lehetséges (lásd **D 2.4**, és **D 2.2**). Ezt visszahelyettesítve az egyenletbe $B = X$ adódik. Ezek szerint megoldás csak $A - B = \emptyset$, vagyis $A \subseteq B$ esetén lehetséges. Ha viszont $A \subseteq B$, akkor $X = B$ valóban megoldás (és ez az egyetlen).

54. A tartalmazás tranzitív tulajdonságát, továbbá a **D 2.4** definíciót alkalmazzuk. Ha van olyan X halmaz, amely kielégíti a feladatbeli egyenletet, akkor $A \subseteq B - X \subseteq B$. Tehát csak $A \subseteq B$ esetén lehet megoldás. Ekkor $A - X \subseteq B - X$ is teljesül és ezért az egyenlet így módosul: $A - X = A$. Ezt az egyenletet minden olyan X halmaz kielégíti, amelyre $A \cap X = \emptyset$.

55. A **D 2.4** definíciót, a disztributív tulajdonságokat és az egyik elnyelési tulajdonságot (**T 2.6**) alkalmazzuk. A feltételi egyenletből $B \subseteq X$ következik. Másrészt az egyenletet átalakítva:

$$(A \cup B) \cap (X \cup B) = X\,,$$

amiből $X \subseteq A \cup B$. Ezek szerint $B \subseteq X \subseteq A \cup B$, azaz $X = B \cup Y$, ahol $Y \subseteq A$. Minden ilyen X megoldás, mert ezzel
$(A \cap X) \cup B = (A \cap (B \cup Y)) \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap Y) \cup B = B \cup (A \cap B) \cup (A \cap Y) = = X$.

56. Az egyenletet az egyik disztributív tulajdonság figyelembevételével átírva:

$$(A \cup X) \cap (B \cup X) = B \cup X\,.$$

Ez azzal egyenértékű, hogy $B \cup X \subseteq A \cup X$. Mivel minden A és B halmazra $B = (B - A) \cup (A \cap B)$, ezért

$$(B - A) \cup (A \cap B) \cup X \subseteq A \cup X\,.$$

Ha egy x elem eleme a bal oldali halmaznak, akkor $x \in (B - A)$ vagy $x \in (A \cap B)$ vagy $x \in X$. Az utóbbi két esetben x nyilván eleme a jobb oldali halmaznak is, ha azonban $x \in (B - A)$, akkor $x \notin A$, tehát a fenti tartalmazás pontosan akkor áll fenn, ha $B \setminus A \subseteq X$. Tehát minden olyan X halmaz jó, melyre $B \setminus A \subseteq X$. (Ellenőrzésképpen: ha $B \setminus A \not\subseteq X$, akkor van olyan $y \in B \setminus A$ elem, melyre $y \notin X$. Ekkor $y \in B$ és $y \notin A \cap B$. Tehát a feladatbeli egyenlőség nem teljesülhet.)

57. Ha $t \in A - X$, akkor $t \in A$ és $t \notin X$. Az egyenlőség miatt $t \in X - A$ is teljesül. Ebből viszont $t \in X$ és $t \notin A$ következik. Tehát a két oldalon álló A és X halmaznak nincs közös eleme, így egyenlőség csak úgy állhat fenn, hogy mindkét oldal üres. De, ha $A - X = \emptyset$, akkor $A \subseteq X$. Az $X - A = \emptyset$ egyenlőségből viszont $X \subseteq A$ következik, azaz kell, hogy $X = A$ legyen.

58. A **D 2.7** definíció és az azt követő megjegyzés alapján:

$$P(H) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, H\}\,.$$

59. A **D 2.1** és **D 2.7** definíció és ez utóbbit követő megjegyzés alapján:

$$P(P(P(\emptyset))) = P(P(\{\emptyset\})) = P(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\,.$$

60. Ha valamely X halmazra $X \in P(A \cap B)$, akkor $X \subseteq A \cap B$, ami azt jelenti, hogy $X \subseteq A$ és $X \subseteq B$ és ezért $X \in P(A)$ és $X \in P(B)$ (**D 2.7**, **D 2.4**). Ezekből $P(A \cap B) \subseteq P(A) \cap P(B)$ következik.
Ha viszont Y olyan halmaz, amelyre $Y \in P(A) \cap P(B)$, akkor $Y \in P(A)$ és $Y \in P(B)$, ami azt jelenti, hogy $Y \subseteq A$ és $Y \subseteq B$. Így $Y \subseteq A \cap B$, azaz $Y \in P(A \cap B)$. Tehát $P(A) \cap P(B) \subseteq P(A \cap B)$. A két tartalmazás antiszimmetriájából a feladatbeli állítás helyessége következik.

61. Legyen X tetszőleges olyan halmaz, melyre $X \in P(A) \cup P(B)$. Ekkor $X \in P(A)$ vagy $X \in P(B)$, azaz $X \subseteq A$ vagy $X \subseteq B$. Ekkor azonban $X \subseteq A \cup B$, ami azt jelenti, hogy $X \in P(A \cup B)$. Ezekből (**D 2.2** miatt) az állítás helyessége következik.
Megjegyzés: A $P(A \cup B) \subseteq P(A) \cup P(B)$ tartalmazás általában nem igaz. Ha pl. $A = \{a\}$ és $B = \{b, c\}$, akkor pl. $\{a,b\} \in P(A \cup B)$, de $\{a,b\} \notin P(A) \cup P(B)$.

62. Legyen pl. $B \subseteq A$. Ekkor a **D 2.4** és **D 2.7** definíciók alapján $P(A \cup B) = P(A)$ és $P(A) \cup P(B) = P(A)$.

Legyen A és B két olyan halmaz, amelyekre $B \not\subseteq A$ és $A \not\subseteq B$. Ez azt jelenti, hogy van olyan $a \in A$ és $b \in B$ elem, amelyekre $a \notin B$ és $b \notin A$. Ekkor $\{a,b\} \in P(A \cup B)$, de $\{a,b\} \notin P(A)$ és $\{a,b\} \notin P(B)$. Ezekből $\{a,b\} \notin P(A) \cup P(B)$ következik. Mivel $\{a,b\} \in P(A \cup B)$, ezért azt kapjuk, hogy $P(A \cup B) \neq P(A) \cup P(B)$.

66. Megszámlálva külön A és B elemeit, a közös részben lévőket nyilván kétszer számoljuk, így ezek számát levonva, az egyesítés elemeinek számát kapjuk.

67. Az előző feladat eredményét kétszer alkalmazva: $|(A \cup B) \cup C| =$
$|A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| =$
$|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

68. Megoldása hasonló az előző feladathoz.

69. A **67.** feladatbeli egyenlőséget felhasználva: mindenki beszél legalább egy idegen nyelvet, és pontosan egy nyelvet beszél 26 diák.

70. $1000-((1000-250)+(1000-900)+(1000-950)+(1000-990)) = 90$, tehát legalább 90 házban van mind a négy eszköz.

71. 1. megoldás: Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy $|P(A_n)| = 2^n$. Könnyen látható, hogy $|P(A_0)| = 1$, $|P(A_1)| = 2$. Tegyük fel, hogy $|P(A_{n-1})| = 2^{n-1}$. Legyen $A_n = A_{n-1} \cup \{x\}$, vagyis legyen x az A_n halmaz n-edik eleme. A_n minden részhalmazát megkapjuk, ha vesszük A_{n-1} minden részhalmazát, és vesszük A_{n-1} minden részhalmazának $\{x\}$-szel való egyesítettjét. Tehát $|P(A_n)| = 2 \cdot |P(A_{n-1})|$, azaz $|P(A_n)| = 2^n$.
2. megoldás: Legyen $A_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Az egyes részhalmazokat a következő módszerrel is kiválaszthatjuk: a halmaz elemeinek jele alá rendre a 0 vagy 1 számot írjuk, ahol a 0 azt jelöli, hogy a felette álló elemet nem választjuk be a részhalmaz elemei közé, az 1 pedig azt hogy beválasztjuk. Ekkor az A halmaznak annyi különböző részhalmazát tudjuk kiválasztani, ahány módon az elemek alá 0-kból és 1-esekből álló különböző sorozatot tudunk írni. Minden helyen két lehetőségünk van a választásra, ez összesen 2^n lehetőség.

72. (Ha A véges, akkor az előző feladat szerint az állítás nyilvánvaló, hisz $n < 2^n$). Legyen A tetszőleges halmaz, és tegyük fel, hogy $\varphi : A \to P(A)$ kölcsönösen egyértelmű leképezés. Mivel φ kölcsönösen egyértelmű, ezért az

$$X := \{y \in A\,;\ y \notin \varphi(y)\}$$

halmazhoz van olyan x elem A-ban, hogy $\varphi(x) = X$. Vajon x eleme-e X-nek? Ha $x \in X$, akkor X definíciója szerint $x \notin \varphi(x)$. Ha viszont $x \notin \varphi(x)$, akkor viszont megint csak X definíciója szerint x bele kell tartozzék az X halmazba, vagyis $x \in X$. Azt kaptuk tehát, hogy $x \in X$ pontosan akkor, ha $x \notin X$, ami ellentmondás. Tehát ilyen φ leképezés nem létezhet.

73. Az $(1,3)$, $(1,4)$, $(5,3)$ és $(5,4)$ pontok által határolt zárt téglalap.

74. $A \times B \times C = \{(a,x,1),(a,x,2),(a,x,3),(a,y,1),(a,y,2),(a,y,3)\}$,
$A^3 = \{(a,a,a)\}$,
$B^3 = \{(x,x,x),(x,x,y),(x,y,x),(x,y,y),(y,x,x),(y,x,y),(y,y,x),(y,y,y)\}$.

75. a) mn, b) k^2, c) $(m+n-k)^3$, d) $(m-k)^2$, e) $(m+n-2k)^4$, f) m^2n.