3. Matematikai logika (megoldások)

1. Hamis, ugyanis P, Q és R logikai értékét behelyettesítve kapjuk: $(P \wedge Q) \wedge R = (1 \wedge 0) \wedge 0 = 0 \wedge 0 = 0$. (Ebben és a további feladatok megoldásában alkalmazzuk a **D 3.1** definícióit. A megoldást célszerű a zárójelben lévő összetett ítéletek logikai értékének meghatározásával kezdeni. Több zárójel esetén a legbelsőtől haladjunk kifelé.)

2. Hamis. **3.** Igaz. **4.** Igaz. **5.** Hamis.
6. Igaz. **7.** Igaz. **8.** Igaz. **9.** Igaz.
10. Hamis.

11. A **D 3.1** definíciót használjuk: $\neg P \vee S$ összetett ítélet logikai értéke igaz, hisz $0 \vee 1 = 1$, ezért a $P \Rightarrow (\neg P \vee S)$ ítélet logikai értéke is igaz, hisz $1 \Rightarrow 1 = 1$. Mivel $1 \Leftrightarrow 1 = 1$, ezért azt kapjuk, hogy a feladatbeli ítélet igaz logikai értékű.

12. $R \vee \neg S$ hamis, $P \Rightarrow (R \vee \neg S)$ hamis, $Q \wedge S$ hamis, ezért a feladatbeli ítélet igaz.

13. P implikálja Q-t. P maga után vonja Q-t. A Q szükséges feltétele P-nek. Ahhoz, hogy P teljesüljön, szükséges, hogy Q fennálljon. P elégséges feltétele Q-nak. Ahhoz, hogy Q teljesüljön, elegendő, hogy P fennálljon. A P csak akkor teljesül, ha Q is teljesül. Ha P, akkor Q.

14. 2^n. (Lásd még a **2.71**-es feladatot!)

15. p, q és r összes különböző értékhármasára vizsgáljuk meg a kifejezések logikai értékét! A **14.** feladat szerint egy $2^3 = 8$ sorból álló táblázatra lesz szükségünk:

$p\ q\ r$	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$
1 1 1	1	1	1	1
1 1 0	1	1	1	1
1 0 1	1	1	0	1
1 0 0	0	0	0	0
0 1 1	1	0	0	1
0 1 0	1	0	0	0
0 0 1	1	0	0	1
0 0 0	0	0	0	0

A két kifejezés nem azonosan egyenlő, mert a $p = 0$, $q = 1$, $r = 1$ és a $p = 0$, $q = 0$, $r = 1$ esetben $p \wedge (q \vee r) = 0$ és $(p \wedge q) \vee r = 1$.

16. A táblázatban vastag számokkal jelezzük a kifejezések logikai értékét. Ezekből kiolvasható, hogy a két kifejezés azonosan egyenlő.

$\neg$	$(p$	$\Rightarrow$	$q)$	$\equiv$	p	$\wedge$	$\neg$	q
0	1	1	1		1	**0**	0	1
1	1	0	0		1	**1**	1	0
0	0	1	1		0	**0**	0	1
0	0	1	0		0	**0**	1	0

17. A disztributivitás (**T 3.4** (5)) és a **T 3.4** (6) és (7) felhasználásával:
$p \wedge (\neg p \vee q) \equiv (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q) \equiv 0 \vee (p \wedge q) \equiv p \wedge q$.

18. Alkalmazzuk a **T 3.4** (5), (6) és (7) azonosságait!

19.

p q	$p \Leftrightarrow q$	$(p \wedge q)$	$\vee$	$(\neg p \wedge \neg q)$
1 1	1	1	1	0
1 0	0	0	0	0
0 1	0	0	0	0
0 0	1	0	1	1

Tehát mind a négy esetben $p \Leftrightarrow q = (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$, vagyis az azonosság fennáll.

20. A **T 3.4** (11) és (8) azonosságok felhasználásával, vagy az előző feladathoz hasonlóan táblázattal.

29. A **T 3.4** (9) és (8) azonosságok felhasználásával:
$(p \wedge q \wedge r) \Rightarrow s \equiv \neg(p \wedge q \wedge r) \vee s \equiv \neg p \vee \neg q \vee \neg r \vee s$,
továbbá **T 3.4** (9) többszöri alkalmazásával:
$p \Rightarrow [q \Rightarrow (r \Rightarrow s)] \equiv \neg p \vee [q \Rightarrow (r \Rightarrow s)] \equiv \neg p \vee \neg q \vee (r \Rightarrow s) \equiv \neg p \vee \neg q \vee \neg r \vee s$.

32. $\neg$(Márta szőke).

33. $\neg(\neg$(Mátyás elég virtuóz)). Ez ekvivalens azzal, hogy „Mátyás elég virtuóz".

34. (esik az eső) $\wedge$ (meleg van) $\wedge$ (a nap elbújt) $\wedge$ (későre jár az idő).
A hétköznapi beszédben az „és", „de", „is... is", „bár", „noha",... szavak is alkalmasak lehetnek a konjunkció kifejezésére, bár e szavaknak a logika nyelvén ki nem fejezhető egyéb tartalmuk is lehet. Ha megvizsgáljuk, hogy egy mondatban szereplő elemi ítéletek igazságértékétől hogyan függ az egész mondat igazságértéke, eldönthetjük, hogy milyen műveletekről van szó. Például az e feladatbeli mondat csak akkor igaz, ha a benne szereplő négy elemi ítélet mindegyike igaz, tehát valóban konjunkciókról van szó.

35. (Éva ott volt) $\vee$ (Pista ott volt).

36. $\neg$(a hegy megy Mohamedhez) $\Rightarrow$ (Mohamed megy a hegyhez).

37. Használjuk az alábbi jelöléseket: E: esik az eső, F: fúj a szél, K: elmegyünk kirándulni. E jelölésekkel: $(\neg E \wedge \neg F) \Rightarrow K$. Ez **T 3.4** (9) és (8) felhasználásával átalakítható az alábbi módon: $(\neg E \wedge \neg F) \Rightarrow K \equiv \neg(\neg E \wedge \neg F) \vee K \equiv E \vee F \vee K$. Eszerint a mondat ekvivalens a következővel: „esik az eső vagy fúj a szél vagy elmegyünk kirándulni."

38. M: matekból elsőre átmegyek, F: fizikából elsőre átmegyek. E jelölésekkel: $\neg(\neg M \wedge \neg F)) \equiv M \vee F$, ami hétköznapi nyelven így szól: „matekból vagy fizikából elsőre átmegyek".

39. S: a szemtanú megbízható, U: az ujjlenyomatok a tettestől származnak, T: téved az írásszakértő. E jelölésekkel:
$(S \wedge U) \Rightarrow T \equiv \neg S \vee \neg U \vee T \equiv \neg(S \wedge U \wedge \neg T)$.
Azaz az ekvivalens alakok hétköznapi nyelven: „A szemtanú nem megbízható, vagy az ujjlenyomatok nem a tettestől származnak, vagy téved az írásszakértő", illetve „Az nem lehet, hogy a szemtanú is megbízható, az ujjlenyomatok is a tettestől származnak, és az írásszakértő sem téved".

40. (szivárvány van) $\Rightarrow$ [(esik az eső) $\wedge$ (süt a Nap) $\wedge$ $\neg$(dél van)].

41.

n páros	n páratlan	n vagy páros, vagy páratlan egész
1	1	nincs értelmezve (lehetetlen)
1	0	1
0	1	1
0	0	nincs értelmezve (lehetetlen)

42.

kirándulni megyünk	strandolni megyünk	vagy kirándulni megyünk vagy strandolni
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

(Ezt a műveletet nevezik „kizáró vagy”nak.)

43.

Ecser következik	Maglód következik	Vagy Ecser vagy Maglód következik
1	1	nincs értelmezve
1	0	1
0	1	1
0	0	0

44. Igaz, mert a 7 prímszám.

45. Igaz, mert a 2 prímszám és páros.

46. Igaz, mert van olyan pozitív egész szám, amelyik prímszám.

47. Igaz, mert minden pozitív egész y-hoz megadható olyan pozitív egész x szám, mely osztója y-nak.

48. Igaz, mert létezik olyan pozitív egész szám, amely prímszám és páros.

49. Ez hamis állítás, mert nem minden pozitív egész szám prímszám.

50. Igaz, mert ha y osztható 2-vel, akkor páros.

51. Ez hamis, mert ha x osztója y-nak, akkor $y \geq x$.

52. Ez igaz állítás.

53. Az ítélet szavakba foglalva: van olyan pozitív egész szám, amely ha 6-tal osztható, akkor prímszám. Ha különösnek is tűnik, ennek az összetett ítéletnek a logikai értéke igaz. Vegyük például az $(S(6,5) \Rightarrow T(5))$ vagy az $(S(6,8) \Rightarrow T(8))$ ítéleteket. Az előtag mindkettőben hamis, ezért az implikáció igaz.

54. Ha egy négyszög húrnégyszög, akkor téglalap. Az állítás hamis.

55. Ha egy négyszög téglalap, akkor húrnégyszög is egyben. Az állítás igaz.

56. Egy négyszög akkor és csak akkor húrnégyszög, ha téglalap. Az állítás hamis.

57. Egy négyszög akkor és csak akkor húrnégyszög, ha szemközti szögeinek összege 180°. Az állítás igaz, mert $p(x) \Rightarrow r(x)$ és $r(x) \Rightarrow p(x)$ is igaz (**T 3.4.** (11)).

58. Ha egy négyszög téglalap, akkor átlói felezik egymást. Az állítás igaz.

59. Ha egy négyszög átlói nem felezik egymást, akkor a négyszög nem téglalap. Mivel a $q(x) \Rightarrow s(x)$ ítélet igaz minden x-re, ezért a $\neg s(x) \Rightarrow \neg q(x)$ állítás is igaz a kontrapozíciós azonosság (**T 3.4** (10)) miatt.

3.3

60. Ha egy négyszög húrnégyszög, de nem téglalap, akkor a négyszög átlói felezik egymást. Az állítás hamis.

61. Jelölje A az ajtók, K a kilincsek halmazát, és $R(x, y)$ azt az ítéletet, hogy y rajta van x-en. E jelölésekkel formalizálva: $(\forall x \in A)(\exists y \in K)R(x, y)$, aminek tagadása **T 3.4** (12) szerint $(\exists x \in A)(\forall y \in K)\,\neg R(x, y)$, szavakban: „van olyan ajtó, amin nincs kilincs".

62. $S(x)$: x szekercét fog hóna alá, $M(x)$: x molnár. E jelölésekkel a közmondás formalizált alakja: $\neg\forall x\,[S(x) \Rightarrow M(x)]$. Ez **T 3.4** (12) és (9) szerint ekvivalens az alábbiakkal: $\exists x\,\neg[S(x) \Rightarrow M(x)] \equiv \exists x\,[S(x) \wedge \neg M(x)]$, ami szavakban: „van olyan, ki szekercét fog hóna alá, de nem molnár". Az eredeti állítás tagadása: $\forall x\,[S(x) \Rightarrow M(x)]$, azaz szavakban: „mind molnár, ki szekercét fog hóna alá".

63. A $b(x)$: (x nem szólt, csak bégetett), $d(x)$: (x dicséretet kapott) jelölésekkel: $\forall x\,(b(x) \Rightarrow d(x))$. Tagadása **T 3.4** (12) és (9) felhasználásával: $\neg\forall x\,(b(x) \Rightarrow d(x)) \equiv \exists x\,\neg(b(x) \Rightarrow d(x)) \equiv \exists x\,(b(x) \wedge \neg d(x))$. Ez utóbbi hétköznapi szavakkal: „volt olyan, ki nem szólt, csak bégetett, de még dicséretet sem kapott".

64. $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x)(A \Rightarrow B)$, ahol $A : |x - a| < \delta$, $B : |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Tagadása **T 3.4** (12) és (9) felhasználásával: $\neg[(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x)(A \Rightarrow B)] \equiv (\exists\varepsilon > 0)(\forall\delta > 0)(\exists x)\,\neg(A \Rightarrow B) \equiv (\exists\varepsilon > 0)(\forall\delta > 0)(\exists x)(A \wedge \neg B)$. Szavakban: „Létezik olyan pozitív ε szám, hogy bármely δ pozitív számhoz található olyan x szám, hogy $|x - a| < \delta$, de $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$."

65. Átfogalmazva: „minden időpillanatban, amikor fúj a szél, fázom". Formalizálva: $\forall x$((az x pillanatban fúj a szél) $\Rightarrow$ (az x pillanatban fázom)). Tagadása: $\exists x$((az x pillanatban fúj a szél) $\wedge\ \neg$(az x pillanatban fázom)), azaz, „van, hogy fúj a szél, de nem fázom."

66. Mivel $p(x) \Rightarrow q(x) \equiv \neg p(x) \vee q(x)$,
így a neki megfelelő halmaz $\overline{P} \cup Q$.
Bővebben kifejtve:
$p(x) \Rightarrow q(x) \equiv (x \in P) \Rightarrow (x \in Q) \equiv$
$(x \notin P) \vee (x \in Q) \equiv (x \in \overline{P} \cup Q)$.
(lásd az ábrát)

67. $(\overline{P} \cup Q) \cap (P \cup \overline{Q})$,
ami másképpen felírva $\overline{P \ominus Q}$.

68. $P \cup \overline{Q \cap R} \equiv P \cup \overline{Q} \cup \overline{R}$.

69. $P \cup (Q \cap R) \equiv (P \cup Q) \cap (P \cup R)$. **70.** $\overline{P} \cup \emptyset \equiv \overline{P}$.

71. $[(P \cup Q) \cap (P \cup \overline{Q})] \cup [(\overline{P} \cup Q) \cap (\overline{P} \cup \overline{Q}) \equiv H$.

72. $P = H$. **73.** $P = \emptyset$. **74.** $P \neq \emptyset$.

75. $P = Q$.

76. $\forall x\,(p(x) \Rightarrow q(x)) \equiv \forall x\,((x \in P) \Rightarrow (x \in Q))$, ami azt jelenti, hogy „ha valami eleme P-nek, akkor eleme Q-nak is", azaz „P minden eleme eleme a Q halmaznak is", azaz $P \subseteq Q$. (Egy másik igazolás az implikáció kiküszöbölésével: $\forall x\,(p(x) \Rightarrow q(x)) \equiv \forall x\,(\neg p(x) \vee q(x)) \equiv \neg\exists x\,\neg(\neg p(x) \vee q(x)) \equiv \neg\exists x\,(p(x) \wedge$

$\neg q(x))$. Az utolsó formulából kiolvasható, hogy P-nek nincs $\overline{Q}$-vel közös eleme, azaz $P \subseteq Q$.)

77. P és Q diszjunktak.

78. Azonosság. A bal oldal halmazelméleti megfogalmazásban: $P \cap Q = H$, a jobb oldal: $P = H$ és $Q = H$, ezek pedig ekvivalens állítások.

79. Nem azonosság. A bal oldal halmazelméleti megfogalmazásban: $P \cup Q = H$, a jobb oldal: $P = H$ vagy $Q = H$, ezek pedig nem ekvivalens állítások.

80. $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$.
Táblázatot készítve:

p	q	r	$(p \vee q)\wedge$	$(p \vee r)\wedge$	$(q \vee r)$	bal o.	$(p \wedge q)\vee$	$(p \wedge r)\vee$	$(q \wedge r)$	jobb o.
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

81. $p \wedge \neg(q \wedge r) \equiv (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r)$.

85. Ha $E(x)$ jelöli az „x pillanatban esik az eső", $F(x)$ az „x pillanatban fúj a szél" ítéleteket, akkor a feladatbeli ítélet formalizálva:

$$(\forall x)(E(x) \Rightarrow F(x)) \vee (\forall x)(F(x) \Rightarrow E(x)),$$

ami valóban nem igaz, ellentétben a

$$(\forall x)[(E(x) \Rightarrow F(x)) \vee (F(x) \Rightarrow E(x))]$$

ítélettel.

86. Ha $n \leq 24$ és $m \leq 24$, akkor $n + m \leq 48$, ami — mivel n és m pozitív egészek — a kontrapozíció (**T 3.4** (9)) szerint pontosan azt jelenti, hogy ha $n + m \geq 49$, akkor $n \geq 25$, vagy $m \geq 25$. (E bizonyítás formalizálásához vezessük be a következő ítéleteket: $p:\ n + m \geq 49$, $q:\ n \geq 25$, $r:\ m \geq 25$. Azt szeretnénk bizonyítani, hogy $p \Rightarrow (q \vee r)$ igaz. Helyette a logikailag ekvivalens $\neg(q \vee r) \Rightarrow \neg p$ kontrapozíciós alak helyességét fogjuk belátni. A De Morgan azonosságok révén $\neg(q \vee r) \equiv \neg q \wedge \neg r$ adódik, vagyis $n \leq 24$ és $m \leq 24$. Utóbbiból $n + m \leq 48$ adódik, ami éppen $\neg p$. Ezzel megmutattuk, hogy $\neg(q \vee r) \Rightarrow \neg p$ igaz, következésképpen bizonyítottuk, hogy $p \Rightarrow (q \vee r)$ érvényes.)

87. (1) minden nap, (2) kedd kivételével minden nap.

88. „Ha egy természetes szám osztható a-val is és b-vel is, akkor osztható ab-vel is” — nem igaz.

89. „Két négyszög egybevágó, ha a megfelelő oldalaik egyenlők egymással” — nem igaz.

90. „Ha egy háromszögben két oldal négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal négyzetével, akkor a háromszög derékszögű" — igaz.

91. A soros kapcsolású áramkör pontosan akkor vezeti az áramot, ha A és B is be van kapcsolva, azaz ha a és b is igaz. Ennek alapján a soros kapcsolásnak az $a \wedge b$ ítélet felel meg. A párhuzamos kapcsolású áramkör pontosan akkor vezeti az áramot, ha A vagy B be van kapcsolva, azaz ha a vagy b igaz. Ennek alapján a párhuzamos kapcsolásnak az $a \vee b$ ítélet felel meg.

92. $a \Rightarrow b \equiv \neg a \vee b$,
ezért az áramkör:

93. $a \Leftrightarrow b \equiv (\neg a \vee b) \wedge (a \vee \neg b)$, vagy $a \Leftrightarrow b \equiv (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$. Az ezeknek megfelelő két áramkör:

94. $a \wedge b \wedge c \wedge \neg(a \wedge b) \equiv$
$a \wedge b \wedge c \wedge (\neg a \vee \neg b)$, így:

95. $[(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)] \Rightarrow (a \Rightarrow c)$
$\equiv (a \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg c) \vee (c \wedge \neg a)$, így:

96. $(y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge z) \vee \equiv z.$

97. $(x \vee y \vee z \vee u) \wedge (x \vee y \vee u) \wedge (x \vee z) \equiv x \vee [(y \vee u) \wedge z].$

98. Legyen x az elnöki kapcsolóhoz, y, z és u a további három kapcsolóhoz rendelt logikai változó. A kapcsoló áramkör vezeti az áramot, ha x és még egy változó igaz, vagy ha y, z és u is igaz; formulával: $[x \wedge (y \vee z \vee u)] \vee (y \wedge z \wedge u)$. Így az áramkör: