4. fejezet

Vektoralgebra

Vektorok összeadása, kivonása és számmal szorzása

T 4.1 (**Háromszögegyenlőtlenség**) *Minden* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *vektorpárra*

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|\,.$$

T 4.2 (**Paralelogrammaszabály**) *Ha az* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *vektor különböző állású, akkor a két vektor összegét megadja az* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *vektorral, mint oldalakkal szerkesztett paralelogrammának az az átlóvektora, amely az összeadandók közös kezdőpontjából indul ki.*

Feladatok

1. Adott az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ nem kollineáris vektorpár. Szerkesszük meg a következő vektorokat:
a) $\mathbf{c} = \mathbf{a} - 2\mathbf{b}$; b) $\mathbf{d} = 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$; c) $\mathbf{e} = \mathbf{a}\sqrt{2} - \mathbf{b}\sqrt{3}$; d) $\mathbf{f} = \mathbf{a}\sqrt{5} - 2\mathbf{b}$.

2. Legyen $\mathbf{m} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ és $\mathbf{n} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$. Fejezzük ki az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorral a következő vektorokat:
a) $3\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$; b) $4\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$; c) $2\mathbf{m} - \frac{1}{2}\mathbf{n}$; d) $3\mathbf{m} + \frac{\sqrt{2}}{3}\mathbf{n}$.

3. Legyen $\mathbf{m} = 2\mathbf{a}+\mathbf{b}$ és $\mathbf{n} = \mathbf{a}+2\mathbf{b}$. Fejezzük ki az $\mathbf{m}$ és $\mathbf{n}$ vektorral a következő vektorokat:
a) $3\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$; b) $5\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$; c) $-\mathbf{a} + \frac{1}{10}\mathbf{b}$; d) $2\mathbf{a} - \sqrt{3}\mathbf{b}$.

4. Legyen a szabályos $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ hatszög köré írt kör középpontja O. Fejezzük ki az $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ $(i = 1,2,3,4,5)$, $\overrightarrow{A_6A_1}$ oldalvektorokat az $\overrightarrow{OA_1} = \mathbf{a}$ és $\overrightarrow{OA_2} = \mathbf{b}$ vektorokkal, és számítsuk ki az $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_6}$ összeget!

5. Tekintsük az $ABCD$ tetraédert. Határozzuk meg a következő összegeket:
a) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$; b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA}$.

6. Legyen $A_1, A_2, \cdots, A_n$ n számú (nem szükségképpen különböző) pont. Egyetlen vektorral adjuk meg az $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \cdots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n}$ összeget:

7.$^\triangleright$ Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok akkor és csak akkor lehetnek egy (esetleg szakasszá, vagy ponttá elfajuló) háromszög oldalvektorai, ha vagy $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, vagy ha valamelyikük előállítható a másik kettő összegeként!

8. Legyen $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ két, nem kollineáris vektor. Bizonyítsuk be, hogy van olyan háromszög, melynek oldalvektorai: $\mathbf{a}$, $\frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{b})$, $\frac{3}{2}\mathbf{a}-\frac{1}{2}\mathbf{b}$.

9. Legyen $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ két nem kollineáris vektor. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan háromszög, amelynek oldalvektorai a $2\mathbf{a}$, $\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$, $\frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{b})$ vektorok!

10. Legyen $\mathbf{a}$ ($\neq \mathbf{0}$) tetszőleges vektor. Írjuk fel azokat az egységvektorokat, amelyek $\mathbf{a}$-val egyező állásúak!

11. Az $\mathbf{a}$ ($\neq \mathbf{0}$) és $\mathbf{b}$ ($\neq \mathbf{0}$) vektorok merőlegesek egymásra. Írjuk fel azt az egységvektort, amely komplanáris az adott vektorokkal, és felezi azok szögét!

12. Igazoljuk, hogy ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ egyállású vektorok, akkor a következő egyenlőségek közül legalább az egyik igaz: $|\mathbf{a}|\mathbf{b}+|\mathbf{b}|\mathbf{a}=\mathbf{0}$; $|\mathbf{a}|\mathbf{b}-|\mathbf{b}|\mathbf{a}=\mathbf{0}$.

13. Az alábbi feladatokban az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektoroknak milyen feltételt kell kielégíteni, hogy teljesüljön a leírt kikötés?
a) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|>|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$, b) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|<|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$, c) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$,
d) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}|-|\mathbf{b}|$, e) $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|=|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$, f) $\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}=\dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$ ($\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$, $\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$),
g) Az $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ vektor felezze az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok szögét.

14.▷ Az $A_1A_2A_3A_4A_5$ szabályos ötszög köré írt kör középpontja legyen az O pont. Igazoljuk, hogy $\overrightarrow{OA}_1+\overrightarrow{OA}_2+\overrightarrow{OA}_3+\overrightarrow{OA}_4+\overrightarrow{OA}_5=\mathbf{0}$.

15. Az $A_1A_2A_3A_4\ldots A_{n-1}A_n$ szabályos n-szög köré írt kör középpontja legyen az O pont. Igazoljuk, hogy $\overrightarrow{OA}_1+\overrightarrow{OA}_2+\cdots+\overrightarrow{OA}_{n-1}+\overrightarrow{OA}_n=\mathbf{0}$.

16.▷ Egy háromszög oldalainak felezőpontjai adva vannak. A felezőpontoknak a háromszög síkjában felvett valamely O pontra vonatkozó helyvektorai segítségével fejezzük ki a háromszög egyik csúcsának helyvektorát, és ezt az összefüggést felhasználva szerkesszük meg a háromszöget!

17.▷ Az előző feladatban leírt módon dolgozzunk ki eljárást síkszög szerkesztésére, ha ismerjük oldalainak felezőpontjait!

18. Egy páratlan oldalszámú síksokszögben ismerjük az oldalak felezőpontjait. A **16.** feladatban leírt módon adjunk meg eljárást a sokszög megszerkesztésére!

19. Legyen az ABC háromszög két oldalvektora $\overrightarrow{AB}=\mathbf{c}$ és $\overrightarrow{AC}=\mathbf{b}$. Fejezzük ki $\mathbf{b}$-vel és $\mathbf{c}$-vel a háromszög súlyvonalvektorait!

A továbbiakban kitűzött bizonyításokat vektoralgebrai módszerekkel végezzük el.

20. Bizonyítsuk be, hogy bármely háromszög súlyvonalaival, mint oldalakkal, szerkeszthető háromszög!

21. Igazoljuk, hogy a háromszög súlyvonalaival szerkesztett háromszög súlyvonalai az eredeti háromszöghöz hasonló háromszöget határoznak meg!

22. Legyen $A_1A_2A_3A_4$ egy síknégyszög. Jelölje F_1 az A_1A_2, F_2 az A_2A_3, F_3 az A_3A_4 és F_4 az A_4A_1 oldal felezőpontját. Bizonyítsuk be, hogy az $F_1F_2F_3F_4$ négyszög paralelogramma!

23. Legyen A, B, C és D a tér négy pontja. Jelölje K az AD szakasz, L pedig a BC szakasz felezőpontját. Bizonyítsuk be, hogy $\overrightarrow{KL}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})$.

24.• A P pont az AB szakaszt $\left|\overrightarrow{AP}\right| : \left|\overrightarrow{PB}\right| = m : n$ arányban osztja. Legyen O a tér tetszőleges pontja. Fejezzük ki az $\overrightarrow{OP}$ vektort az $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ és $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ vektorok segítségével!

25.▷ Igazoljuk, hogy a háromszög súlyvonalai egy pontban, harmadolva metszik egymást!

26. Legyen O a tér tetszőleges pontja. Írjuk fel az ABC háromszög S súlypontjába mutató $\overrightarrow{OS}$ vektort az $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, és $\overrightarrow{OC}$ vektorokkal kifejezve!

27. Az ABC háromszög $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c}$ és $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$ oldalvektoraival fejezzük ki az S súlypontba mutató $\overrightarrow{AS}$, $\overrightarrow{BS}$ és $\overrightarrow{CS}$ vektorokat, és számítsuk ki ezek összegét!

28.▷ Igazoljuk, hogy az S pont akkor és csak akkor súlypontja az ABC háromszögnek, ha $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{CS} = \mathbf{0}$.

29.▷ Legyen ABC és $A_1B_1C_1$ egy sík két háromszöge. Súlypontjaikat jelölje rendre S, illetve S_1. Bizonyítsuk be, hogy $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = 3\overrightarrow{SS_1}$.

30.▷ Adjunk szükséges és elégséges feltételt arra, hogy két (nem szükségképpen ugyanabban a síkban fekvő) háromszög súlypontja közös legyen!

31.▷ Igazoljuk, hogy a tetraéder súlyvonalai egy ponton mennek át, és negyedelve metszik egymást!

32.▷ Igazoljuk, hogy ha $ABCD$ és $A_1B_1C_1D_1$ két, tetszőleges térbeli helyzetű paralelogramma, akkor az AA_1, BB_1, CC_1 és DD_1 szakaszok felezőpontjai szintén egy paralelogramma csúcsai!

33.▷ Adva van az $ABCD$ paralelogramma. A tér tetszőleges O pontjának a tükörképe az A pontra legyen O_1, ennek tükörképe a D-re pedig O_2. Tükrözzük az O pontot a B csúcsra is, majd ezt a tükörképet a C-re. Az így kapott tükörképek legyenek rendre O_3 és O_4. Bizonyítsuk be, hogy O_2 és O_4 egybeesik!

34.▷ Legyen A, B, C és D a tér négy pontja, és O egy tetszőleges pont. Tükrözzük az O pontot az A ponton, majd ezt az O_1 tükörképet a D-n. A másodszori tükörkép legyen O_2. Tükrözzük az O pontot a B ponton is, majd ezt a tükörképet a C-n. Az így kapott tükörképek legyenek rendre O_3 és O_4. Bizonyítsuk be, hogy az A, B, C és D pontok akkor és csak akkor csúcsai egy paralelogrammának, ha O_2 és O_4 egybeeesik!

Vektorok lineáris kombinációja, lineáris függetlensége; vektor koordinátái

D 4.3 *Valamely* $\mathbf{b}$ *vektorról akkor mondjuk, hogy előállítható az* $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,..., $\mathbf{a}_r$ *vektorok* **lineáris kombináció***jaként, ha találhatók olyan* k_1, k_2, ..., k_r *valós számok, hogy* $\mathbf{b} = k_1\mathbf{a}_1 +$
$+ k_2\mathbf{a}_2 + \cdots + k_r\mathbf{a}_r$.

D 4.4 *Az* $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r\}$ *vektorrendszert* **lineárisan független***nek nevezzük, ha a* $k_1\mathbf{a}_1 + +k_2\mathbf{a}_2 + \cdots + k_r\mathbf{a}_r = \mathbf{0}$ *egyenlőség csak a* $k_1 = k_2 = \ldots = k_r = 0$ *értékekkel teljesül.*

T 4.5 *Két vektor akkor és csak akkor egyező állású, ha legalább egyikük a másik számszorosa, mégpedig, ha* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *egyező állásúak és* $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$*, akkor van olyan* $k \in \mathbf{R}$*, hogy* $\mathbf{a} = k\mathbf{b}$*.*

T 4.6 *Ha két vektor nem kollineáris, akkor a velük komplanáris bármely vektor előállítható a két vektor lineáris kombinációjaként, és ez az előállítás egyértelmű.*

T 4.7 *Három vektor akkor és csak akkor komplanáris, ha van közöttük olyan, amelyik a másik kettőnek lineáris kombinációja.*

T 4.8 *Három, nem komplanáris vektor lineáris kombinációjaként a tér bármely vektora előállítható, és ez az előállítás egyértelmű.*

T 4.9 *Ha az* $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r\}$ *vektorrendszer lineárisan független, akkor bármely*
$$p_1\mathbf{a}_1 + p_2\mathbf{a}_2 + \ldots + p_r\mathbf{a}_r = q_1\mathbf{a}_1 + q_2\mathbf{a}_2 + \cdots + q_r\mathbf{a}_r$$
egyenlőség csak úgy teljesülhet, hogy $p_1 = q_1,\ p_2 = q_2,\ \ldots, p_r = q_r$*.*

T 4.10 *Legalább két vektorból álló rendszer akkor és csak akkor lineárisan független, ha a rendszer egyetlen eleme sem állítható elő a többiek lineáris kombinációjaként.*

D 4.11 *Vegyük fel, közös kezdőponttal, a páronként egymásra merőleges, egységnyi hosszúságú* $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ *kötött vektorokat úgy, hogy ebben a sorrendben jobbrendszert alkossanak. A* **T 4.8** *tétel értelmében a tér bármely* $\mathbf{v}$ *vektorához megadható egyetlen olyan* a, b, c *valós számhármas, hogy* $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$*. Az* a, b, c *számokat a* $\mathbf{v}$ *vektor (*$\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ *alapvektor-rendszerre vonatkozó)* **koordinátá***inak nevezzük. Azt, hogy* a, b, c *a* $\mathbf{v}$ *koordinátái, így jelöljük:*
$$\mathbf{v} = [a,\, b,\, c] \quad \textit{vagy} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

T 4.12 *Ha* $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$, $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]$ *és* k *adott szám, akkor*
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = [a_1 + b_1,\, a_2 + b_2,\, a_3 + b_3] \quad \textit{és} \quad k\mathbf{a} = [ka_1,\, ka_2,\, ka_3]\,.$$
Az $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *vektor akkor és csak akkor egyenlő, ha* $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$*.*
Megjegyzés: A vektor koordinátái függnek az alapvektorok megválasztásától. Az előbbi (és a később felírandó) minden koordinátás egyenlőség természetesen úgy értendő, hogy az egyenlőségben szereplő vektorok koordinátái ugyanarra az alapvektor-rendszerre vonatkoznak.

Feladatok

35. ▷ Tegyük fel, hogy az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ vektorrendszer lineárisan független. Legyen
$$\mathbf{v} = p_1\mathbf{a} + p_2\mathbf{b} + p_3\mathbf{c} \quad \text{és} \quad \mathbf{w} = q_1\mathbf{a} + q_2\mathbf{b} + q_3\mathbf{c}$$
az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok két olyan lineáris kombinációja, ahol $q_1 \neq 0$, $q_2 \neq 0$, $q_3 \neq 0$. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ akkor és csak akkor kollineáris (egyező állású), ha $\dfrac{p_1}{q_1} = \dfrac{p_2}{q_2} = \dfrac{p_3}{q_3}$.

36. Az alábbi feladatokban megadott $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ vektorok az α és β paraméterek mely értékeinél kollineárisak, ha az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ vektorrendszer lineárisan független?

a) $\mathbf{v}=2\mathbf{a}+3\mathbf{b}$, $\mathbf{w}=4\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}$,
b) $\mathbf{v}=\mathbf{a}+4\mathbf{b}$, $\mathbf{w}=2\mathbf{a}+8\mathbf{b}+\alpha\mathbf{c}$,
c) $\mathbf{v}=2\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{w}=4\mathbf{a}+2\alpha\mathbf{b}+2\mathbf{c}$,
d) $\mathbf{v}=-2\mathbf{a}+\mathbf{b}+\alpha\mathbf{c}$, $\mathbf{w}=\alpha\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}$,
e) $\mathbf{v}=\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}+\beta\mathbf{c}$, $\mathbf{w}=3\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\mathbf{c}$,
f) $\mathbf{v}=5\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}+3c$, $\mathbf{w}=\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\mathbf{c}$,
g) $\mathbf{v}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+2\mathbf{c}$, $\mathbf{w}=\beta\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}+\mathbf{c}$,
h) $\mathbf{v}=\alpha\mathbf{a}+2\alpha\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{w}=\beta\mathbf{a}+4\alpha\mathbf{b}+2\mathbf{c}$,
i) $\mathbf{v}=\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{w}=\beta\mathbf{a}+2\mathbf{b}+\beta\mathbf{c}$,
j) $\mathbf{v}=3\mathbf{a}-3\alpha\mathbf{b}+\beta\mathbf{c}$, $\mathbf{w}=\mathbf{a}-\alpha\mathbf{b}-\mathbf{c}$.

37.▷ Legyen az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ vektorrendszer lineárisan független. Döntsük el, hogy az $\{\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}\}$ vektorrendszer lineárisan független-e. Állításainkat igazoljuk!
a) $\mathbf{r}=3\mathbf{a}+2\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{s}=5\mathbf{a}-3\mathbf{b}-2\mathbf{c}$, $\mathbf{t}=\mathbf{0}$,
b) $\mathbf{r}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{s}=-2\mathbf{a}-2\mathbf{b}-2\mathbf{c}$, $\mathbf{t}=2\mathbf{a}-5\mathbf{b}+\mathbf{c}$,
c) $\mathbf{r}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{s}=\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{t}=\mathbf{a}+\mathbf{c}$,
d) $\mathbf{r}=\mathbf{c}$, $\mathbf{s}=\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}$, $\mathbf{t}=\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}$,
e) $\mathbf{r}=3\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}$, $\mathbf{s}=2\mathbf{a}+\mathbf{b}+2\mathbf{c}$, $\mathbf{t}=\mathbf{a}-2\mathbf{b}-3\mathbf{c}$,
f) $\mathbf{r}=\mathbf{a}$, $\mathbf{s}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{t}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$,
g) $\mathbf{r}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{s}=-\mathbf{a}+\mathbf{c}$, $\mathbf{t}=\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}$,
h) $\mathbf{r}=2\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{s}=3\mathbf{a}+2\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{t}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$.

38. Az ábrán egy $ABCDA_1B_1C_1D_1$ paralelepipedont adtunk meg. A F pont az BCC_1B_1 lap középpontját, a H a BD_1 testátló D_1-hez közelebbi negyedelő pontját és a K pont a C_1D_1 él felezőpontját jelöli. A koordinátáival adott $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}=[4,2,-3]$, $\overrightarrow{AD}=\mathbf{b}=[5,6,-2]$ és $\overrightarrow{AA_1}=\mathbf{c}=[1,4,-3]$ vektorok lineáris kombinációjaként adjuk meg, és ezt felhasználva koordinátáikkal is írjuk fel, a következő vektorokat: $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD_1}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{FH}$, $\overrightarrow{HK}$.

39. Az $ABCD$ tetraéder A csúcsából kiinduló három élvektor $\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}=[4,3,-2]$, $\overrightarrow{AC}=\mathbf{c}=[2,-1,5]$, $\overrightarrow{AD}=\mathbf{d}=[6,4,9]$. Állítsuk elő a B csúcsból kiinduló három élvektor lineáris kombinációjaként az ACD lap S_B súlypontjába, illetve a tetraéder S súlypontjába mutató $\overrightarrow{BS_B}$, illetve $\overrightarrow{BS}$ vektort. Írjuk fel ezeket a vektorokat koordinátás alakban is!

40.▷ Legyen O a tér adott pontja. Vegyük fel az A, B és C pontokat úgy, hogy azok egy egyenesre illeszkedjenek, és az A ne essék egybe a B ponttal. A következő feladatokban, a koordinátáikkal adott $\mathbf{a}=\overrightarrow{OA}$ és $\mathbf{b}=\overrightarrow{OB}$ vektorok lineáris kombinációjaként állítsuk elő a $\mathbf{c}=\overrightarrow{OC}$ vektort a megadott feltétel mellett. Számítsuk ki a $\mathbf{c}$ vektor koordinátáit is!
a) $\mathbf{a}=[3,4,2]$, $\mathbf{b}=[1,5,7]$ és $|\overrightarrow{AB}| : |\overrightarrow{BC}| = 3 : 2$,
b) $\mathbf{a}=[4,3,-2]$, $\mathbf{b}=[2,2,4]$ és $|\overrightarrow{AB}| : |\overrightarrow{BC}| = 2 : 1$,

c) $\mathbf{a} = [-3, 2, 5]$, $\mathbf{b} = [0, 4, 1]$ és $|\overrightarrow{AB}| : |\overrightarrow{BC}| = 3 : 1$,
d) $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$, $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]$ és $|\overrightarrow{AB}| : |\overrightarrow{BC}| = m : n$.

41. Az ABC háromszögben az AB, a BC és a CA oldal felezőpontját jelöljük rendre D-vel, E-vel és F-fel. Legyen O a tér tetszőleges pontja és S a háromszög súlypontja. Adva vannak a $\mathbf{d} = \overrightarrow{OD} = [4, 3, -2]$, $\mathbf{e} = \overrightarrow{OE} = [2, 1, -3]$ és $\mathbf{f} = \overrightarrow{OF} = [3, 2, -7]$ vektorok. Állítsuk elő a $\mathbf{d}$, $\mathbf{e}$ és $\mathbf{f}$ vektorok lineáris kombinációjaként az $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$ és $\mathbf{s} = \overrightarrow{OS}$ vektorokat! Számítsuk ki a koordinátákat is !

42. Az $ABCD$ tetraéderben az ABC, az ABD és az ACD lap súlypontját jelöljük rendre S_1-gyel, S_2-vel és S_3-mal. Az $\mathbf{s}_1 = \overrightarrow{AS_1} = [3, 1, 4]$, $\mathbf{s}_2 = \overrightarrow{AS_2} = [2, 2, -2]$ és $\mathbf{s}_3 = \overrightarrow{AS_3} = [1, 3, 4]$ vektorok lineáris kombinációjaként állítsuk elő a tetraéder S súlypontjába mutató $\overrightarrow{AS}$, a BCD lap S_4 súlypontjába mutató $\overrightarrow{AS_4}$ vektort, valamint az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$ és $\overrightarrow{CD}$ élvektorokat! Számítsuk ki a koordinátáikat is!

43. Az alábbi feladatokban szereplő $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ és $\mathbf{v}$ vektorokat (az $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ alapvektorrendszerre vonatkoztatott) koordinátáikkal adtuk meg. Fejezzük ki a $\mathbf{v}$ vektort az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok lineáris kombinációjaként, ha lehetséges!
a) $\mathbf{a} = [1, 1, 0]$, $\mathbf{b} = [1, -1, 0]$, $\mathbf{c} = [1, 1, -1]$, $\mathbf{v} = [3, 5, 7]$,
b) $\mathbf{a} = [1, 0, 0]$, $\mathbf{b} = [0, 1, 0]$, $\mathbf{c} = [1, 1, 0]$, $\mathbf{v} = [2, 1, 3]$,
c) $\mathbf{a} = [1, 0, 0]$, $\mathbf{b} = [1, 1, 1]$, $\mathbf{c} = [0, 0, 1]$, $\mathbf{v} = [3, 1, -2]$.

44.$^\bullet$ Legyenek $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ közös kezdőpontú komplanáris vektorok, de $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ ne legyen kollineáris. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok végpontjai akkor és csak akkor vannak egy egyenesen, ha a $\mathbf{c}$ vektornak $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ alakú előállításában az α és β konstansokra $\alpha + \beta = 1$ teljesül.

45. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ és $\mathbf{d}$ vektorok kezdőpontjai egybeesnek, továbbá $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ nem komplanárisak. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ és $\mathbf{d}$ vektorok végpontjai akkor és csak akkor vannak egy síkon, ha a $\mathbf{d}$ vektornak $\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$ alakú előállításában az α, β és γ konstansokra $\alpha + \beta + \gamma = 1$ teljesül.

46. Legyen $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ két, közös kezdőpontú, nem kollineáris vektor. Milyen esetben felezi az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorral közös kezdőpontú $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ vektor az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok szögét?

47.$^\triangleright$ Vektorok segítségével igazoljuk, hogy a háromszög bármelyik belső szögének felező egyenese a szöggel szemben fekvő oldalt a másik két oldal arányában osztja.

48.$^\triangleright$ Az ABC háromszög AC oldalát a B csúcsnál lévő belső szög felező egyenese a D pontban metszi. Állítsuk elő a $\overrightarrow{BD}$ szögfelező vektort a $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a}$ és $\overrightarrow{BA} = \mathbf{c}$ vektorok lineáris kombinációjaként!

49.$^\triangleright$ Az ABC derékszögű háromszög AB átfogóját a C csúcsból kiinduló magasságvonal a D pontban metszi. A $\overrightarrow{CD}$ magasságvektort állítsuk elő a $\overrightarrow{CB}$ és $\overrightarrow{CA}$ befogóvektorok lineáris kombinációjaként!

50.* Az $ABCD$ paralelogramma BC oldalának felezőpontja az E, a CD oldalé az F pont. Az AE és BF szakaszok metszéspontját jelöljük M-mel. Állítsuk elő az $\overrightarrow{AM}$ vektort az $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ és $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$ vektorok lineáris kombinációjaként!

Vektorok skaláris szorzata

D 4.13 *Az* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *vektorok skaláris szorzatát* $\mathbf{ab}$*-vel jelöljük, és azon a következő számot értjük:* $\mathbf{ab} := |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos(\mathbf{ab})\angle$ *. Egy* $\mathbf{a}$ *vektor önmagával képezett skaláris szorzatát az* $\mathbf{a}$ *vektor négyzetének is nevezzük, és ennek megfelelően* $\mathbf{a}^2$*-tel is jelöljük.*

T 4.14 *Ha* $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$ *és* $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]$*, akkor* $\mathbf{ab} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ *.*

T 4.15 *Tetszőleges* $\mathbf{a}$ *vektorra* $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}^2}$*. Ha* $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$*, akkor* $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ *.*

T 4.16 *Két vektor skaláris szorzata pontosan akkor zérus, ha a két vektor merőleges egymásra.*

T 4.17 *Ha* $\mathbf{e}$ *egységvektor, akkor az* $\mathbf{ea}$ *skaláris szorzat abszolút értéke egyenlő az* $\mathbf{a}$ *vektor* $\mathbf{e}$ *irányába eső merőleges vetületének hosszával. Ha az* $\mathbf{ea}$ *szorzat nem zérus, akkor előjele aszerint pozitív, illetve negatív, hogy az előbbi vetületi vektor iránya megegyező, vagy ellentétes az* $\mathbf{e}$ *irányával.*

Feladatok

51.$^{\triangleright}$ Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok szöge $\frac{\pi}{3}$, abszolút értékük: $|\mathbf{a}| = 3$ és $|\mathbf{b}| = 4$. Számítsuk ki az alábbi feladatokban megadott skaláris szorzatok értékét!
a) $\mathbf{ab}$. b) $\mathbf{a}^2$. c) $\mathbf{b}^2$. d) $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2$.
e) $(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2$. f) $(3\mathbf{a} - 2\mathbf{b})(\mathbf{a} + 2\mathbf{b})$. g) $(3\mathbf{a} + 2\mathbf{b})^2$.

52. Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok abszolút értéke rendre 3, 5 és 8. Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ merőleges egymásra, a $\mathbf{c}$ vektor pedig mindkettővel 120°-os szöget zár be. Számítsuk ki az alábbi feladatokban megadott skaláris szorzatokat:
a) $(3\mathbf{a} - 2\mathbf{b})(\mathbf{b} + 3\mathbf{c})$. b) $(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})^2$. c) $(\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 3\mathbf{c})^2$.

53.$^{\triangleright}$ Tegyük fel, hogy az $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ olyan egységvektorok, amelyekre $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$ teljesül. Számítsuk ki az $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ összeg értékét!

54. Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok abszolút értékei: $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 1$, $|\mathbf{c}| = 4$, továbbá $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$. Számítsuk ki az $\mathbf{ab} + \mathbf{ac} + \mathbf{bc}$ összeg értékét!

55. Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, és $\mathbf{c}$ vektorok páronkénti szöge 60°, abszolút értékeik: $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 2$ és $|\mathbf{c}| = 6$. Számítsuk ki az $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ vektor abszolút értékét!

56. Bizonyítsuk be a következő azonosságot: $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 + (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 = 2(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2)$. Mi ennek az azonosságnak a geometriai jelentése?

57. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokra $-|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \le \mathbf{ab} \le |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$. Milyen esetekben teljesül az egyenlőség?

58. Az $\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$ és $\mathbf{a} - \alpha\mathbf{b}$ $(\mathbf{b} \neq \mathbf{0})$ vektorok az α paraméter mely értékeinél merőlegesek egymásra?

59.$^{\triangleright}$ Mutassuk ki, hogy az $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{a}(\mathbf{ab})/\mathbf{a}^2$ $(\mathbf{a} \neq \mathbf{0})$ vektor merőleges az $\mathbf{a}$ vektorra!

60. Mutassuk ki, hogy az $\mathbf{r} = \mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \mathbf{c}(\mathbf{ab})$ vektor merőleges az $\mathbf{a}$ vektorra!

61.$^{\triangleright}$ Milyen feltételt kell az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektoroknak kielégíteni ahhoz, hogy az $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ és $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ vektorok merőlegesek legyenek egymásra?

62.$^{\triangleright}$ Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok szöge $30°$. Abszolút értékük: $|\mathbf{a}| = \sqrt{3}$ és $|\mathbf{b}| = 1$. Számítsuk ki az $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ és $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ vektorok szögét!

63. Legyen $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ két, a zérusvektortól különböző vektor. Határozzuk meg a két vektor szögének koszinuszát, ha
a) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|$; b) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.

64.$^{\triangleright}$ Ha az $\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ vektor merőleges a $7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$ vektorra, az $\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$ vektor pedig merőleges a $7\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ vektorra, akkor mekkora az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok szögének koszinusza?

65. Legyen $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 5$ és a két vektor szöge $120°$. A t paraméter mely értékeinél merőlegesek egymásra a $t\mathbf{a} + 17\mathbf{b}$ és a $3\mathbf{a} - \mathbf{b}$ vektorok?

66.$^{\triangleright}$ Mi jellemzi azokat az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ($\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$) vektorpárokat, amelyekre teljesül az, hogy az $\mathbf{a}$-nak a $\mathbf{b}$ irányába eső merőleges vetülete ugyanolyan hosszú, mint a $\mathbf{b}$-nek az $\mathbf{a}$ irányába eső merőleges vetülete?

67.$^{\bullet}$ Legyen O a tér adott pontja, $\mathbf{e} = \overrightarrow{OE}$ egységvektor és k egy pozitív konstans. Hol helyezkednek el azok a X pontok, amelyekkel $\mathbf{e} \cdot \overrightarrow{OX} = k$?

68. Számítsuk ki a megadott vektorok hajlásszögének koszinuszát!
a) $[3, 1, 3]$, $[1, -2, 2]$. b) $[2, 3, -1]$, $[-1, 1, 6]$. c) $[4, 2, -3]$, $[3, 6, 8]$.

69. Milyen z szám esetén merőleges a $\mathbf{b} = [6, -2, z]$ vektor az $\mathbf{a} = [2, -3, 1]$ vektorra?

70. A következő feladatokban megadott $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok valamelyik koordinátája egy t paraméterrel egyenlő. A két vektor szöge a t mely értékénél lesz az adott α szög?
a) $\mathbf{a} = [1, t, 1]$, $\mathbf{b} = [-1, 2, 1]$, $\alpha = 60°$,
b) $\mathbf{a} = [1, t, 1]$, $\mathbf{b} = [+1/2, 1, +1]$, $\alpha = 45°$,
c) $\mathbf{a} = [t, 1, 2]$, $\mathbf{b} = [0, -1, 1]$, $\alpha = 90°$.

71. Számítsuk ki annak az $\mathbf{x}$ vektornak a koordinátáit, amely kollineáris az $\mathbf{a} = [2, 1, -1]$ vektorral és kielégíti az $\mathbf{ax} = 3$ egyenletet!

72. Legyen $\mathbf{a} = [1, 0, -1]$ és $\mathbf{b} = [1, 1, -1]$. Határozzuk meg azokat az $\mathbf{e}$ egységvektorokat, amelyekre

$$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{e})_\angle = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{és} \quad \cos(\mathbf{b}, \mathbf{e})_\angle = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

73.$^{\bullet}$ Állítsuk elő az $\mathbf{a}$ vektort két olyan vektor összegeként, amelyek közül az egyik párhuzamos a $\mathbf{b}$ vektorral, a másik pedig merőleges $\mathbf{b}$-re! Számítsuk ki e két vektort, ha pl. $\mathbf{a} = [3, 2, 2]$ és $\mathbf{b} = [4, -2, 2]$!

74. Adva vannak az $\mathbf{a} = [1, 0, 1]$, $\mathbf{b} = [1, 2, 2]$ és $\mathbf{c} = [-1, 2, 1]$ vektorok. Merőlegesen vetítsük a $\mathbf{c}$ vektort mind az $\mathbf{a}$, mind a $\mathbf{b}$ vektor egyenesére. Határozzuk meg a két vetületvektor összegét!

75. Az alábbiakban megadott vektorpárok közül melyik lehet rombusznak és melyik lehet téglalapnak két szomszédos oldalvektora?
a) $\mathbf{a}=[3,5,-4]$, $\mathbf{b}=[2,-10,-11]$,
b) $\mathbf{a}=[1,-10,-7]$, $\mathbf{b}=[2,5,-11]$,
c) $\mathbf{a}=[3,1,-2]$, $\mathbf{b}=[2,1,1]$.

76. Számítsuk ki annak a 6 egységnyi hosszú $\mathbf{x}$ vektornak a koordinátáit, amely kollineáris a $[2,-1,2]$ vektorral és tompaszöget zár be a $[0,0,1]$ vektorral!

77. Számítsuk ki annak az $\mathbf{x}$ vektornak a koordinátáit, amely eleget tesz a következő feltételeknek:
1.) $\mathbf{x}$ merőleges az $\mathbf{a}=[1,1,-1]$ és $\mathbf{i}=[1,0,0]$ vektorokra;
2.) $\mathbf{x}$ abszolút értéke 2;
3.) $\mathbf{x}$ hegyesszöget zár be a $\mathbf{j}=[0,1,1]$ vektorral.

78. Számítsuk ki az $\mathbf{x}$ vektor koordinátáit, ha $\mathbf{x}$ merőleges a $[2,3,-1]$ és $[1,-2,3]$ vektorokra és kielégíti az $\mathbf{x}(2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})=-6$ egyenletet!

79.$^{\triangleright}$ Adva vannak az $\mathbf{a}=[7,-1,0]$, $\mathbf{b}=[3,-4,5]$ és $\mathbf{c}=[4,3,5]$ vektorok. Számítsuk ki azon $\mathbf{x}$ egységvektorok koordinátáit, melyek az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorokkal egyenlő szöget zárnak be! Határozzuk meg e szögek koszinuszait is!

80.$^{\triangleright}$ A $\mathbf{v}=[v_1,v_2]$ vektor merőleges vetületének hossza az $\mathbf{a}=[3,4]$ vektor egyenesén 1, a $\mathbf{b}=[1,1]$ vektorén $\sqrt{2}$. Számítsuk ki $\mathbf{v}$ koordinátáit!

81. A $\mathbf{v}$ vektor merőleges vetületének hossza az $[1,-1,1]$, $[2,0,1]$, $[1,1,2]$ vektorok egyenesein rendre $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$. Határozzuk meg a $\mathbf{v}$ vektort!

82. Az $\mathbf{e}$ egységvektor merőleges vetületének hossza mind az $[1,1,0]$, mind a $[0,1,1]$ vektor egyenesén $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Határozzuk meg az $\mathbf{e}$ vektort!

83. Az $\mathbf{m}$ vektor abszolút értéke $\sqrt{10}$ és $\mathbf{m}$ merőleges mind az $\mathbf{a}=[-1,3,1]$, mind a $\mathbf{k}=[0,0,1]$ vektorra. Határozzuk meg az $\mathbf{m}$ vektort!

84.$^{\bullet}$ Igazoljuk, hogy bármely $ABCD$ tetraéderre $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

85. Az előző feladat állítására támaszkodva igazoljuk, hogy ha egy tetraéder két kitérő élpárjának két-két egyenese merőleges egymásra, akkor a harmadik kitérő élpár egyenesei is merőlegesek egymásra.

86.$^{\triangleright}$ Vektoralgebrai módszerekkel bizonyítsuk be Thales tételét!

87.$^{\triangleright}$ Igazoljuk, hogy a paralelepipedon testátlóinak négyzetösszege egyenlő az éleinek négyzetösszegével!

88. Bizonyítsuk be, hogy ha a $\mathbf{v}$ vektor merőleges a nem komplanáris $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok mindegyikére, akkor $\mathbf{v}=\mathbf{0}$.

89.* Bizonyítsuk be, hogy a tetraéder magasságvonalai akkor és csak akkor tartalmaznak egy közös pontot (magasságpontot), ha a tetraéder szemközti élvektorai merőlegesek egymásra.

Vektorok vektori szorzása

D 4.18 *A háromdimenziós* **a** *és* **b** *vektorok* **vektori szorzatát** *így jelöljük:* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, *és ezen azt a vektort értjük, amelynek*
1.) abszolút értéke: $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| := |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle$,
2.) állása **a***-ra és* **b***-re merőleges,*
3.) iránya pedig olyan, hogy **a**, **b** *és* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, *ebben a sorrendben, jobbrendszert alkot.*

T 4.19 *Két vektor vektori szorzatának abszolút értéke a két vektor által meghatározott paralelogramma területének mérőszámával egyenlő. Skaláris szorzatokkal kifejezve:* $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 - (\mathbf{ab})^2}$.

T 4.20 *Két vektor vektori szorzata akkor és csak akkor zérusvektor, ha a két vektor egyező állású.*

T 4.21 *Az* $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$ *és* $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]$ *vektorok vektori szorzata determinánsokkal*

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

alakban írható fel.

T 4.22 **Kifejtési tétel**: *Tetszőleges* **a**, **b**, **c** *vektorokra* $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\mathbf{c}$.

T 4.23 *Tetszőleges* **a**, **b**, **c** *vektorokra és* k *valós számra*

$$\begin{array}{ll} (1) & \mathbf{b} \times \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) , \\ (2) & \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) , \\ (3) & (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{a} = (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) , \\ (4) & k(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = k\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times k\mathbf{b} . \end{array}$$

Feladatok

90.• Készítsük el az **0**, **i**, **j** és **k** vektorok vektori szorzatainak művelettábláját!

91. Végezzük el az alábbi feladatokban kijelölt vektori szorzásokat, majd hozzuk egyszerűbb alakra az így kapott kifejezéseket!
a) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b})$, b) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - 2\mathbf{b})$,
c) $(3\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} + 3\mathbf{a})$, d) $(\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$,
e) $(\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) \times (2\mathbf{a} + \mathbf{b}) + (\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) \times (2\mathbf{a} - \mathbf{b})$,
f) $(\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times (3\mathbf{a} + 10\mathbf{b} - 7\mathbf{c})$.

92. Számítsuk ki a következő kifejezések értékét:
a) $(\mathbf{i} \times \mathbf{j})^2$, b) $(2\mathbf{i} \times 3\mathbf{j})^2$, c) $[(3\mathbf{i} - \mathbf{j}) \times (\mathbf{i} \times 2\mathbf{j})]^2$.

93. Ha az **a** és **b** vektorok által meghatározott paralelogramma területe T, akkor mekkora a $2\mathbf{a}+3\mathbf{b}$ és a $4\mathbf{a}-2\mathbf{b}$ vektorok által meghatározott paralelogramma T' területe?

94.▷ Az $\mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ egyenlőségből következik-e, hogy $\mathbf{a} = \mathbf{b}$?

95.▷ Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$.

96.▷ Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem kollineáris vektorok, és $\mathbf{v}$ olyan vektor, amellyel $\mathbf{v} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{v} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ teljesül, akkor $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

97.▷ Igazoljuk, hogy ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ nem kollineáris vektorok és $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{b}\times\mathbf{c} = \mathbf{c}\times\mathbf{a}$, akkor $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$.

98.▷ Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{c}\times\mathbf{d}$ és $\mathbf{a}\times\mathbf{c} = \mathbf{b}\times\mathbf{d}$, akkor $\mathbf{a}-\mathbf{d}$ és $\mathbf{b}-\mathbf{c}$ egyállású vektorok.

99.▷ Tegyük fel, hogy az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok kezdőpontja közös. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) + (\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + (\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, akkor az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok végpontjai egy egyenesre illeszkednek.

100.▷ Bizonyítsuk be, hogy ha az $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}\times\mathbf{d}$ vektorok kollineárisak, de egyikük sem zérusvektor, akkor az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ vektorok komplanárisak.

101. Ha az $\mathbf{a}$ vektor merőleges a $\mathbf{b}$ vektorra, akkor mivel egyenlő az $\mathbf{a}\times\{\mathbf{a}\times[\mathbf{a}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})]\}$ szorzat?

102. Igazoljuk a következő azonosságokat:
a) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + \mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) + \mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{0}$.
b) $\mathbf{a}\times[\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})] = (\mathbf{bd})(\mathbf{a}\times\mathbf{c}) - (\mathbf{bc})(\mathbf{a}\times\mathbf{d})$.

103. Igazoljuk, hogy ha az $\mathbf{a}$ vektor merőleges a $\mathbf{b}-\mathbf{c}$ vektorra, de $\mathbf{a}$ nem merőleges $\mathbf{b}$-re, akkor az $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ és $\mathbf{b}-\mathbf{c}$ vektorok egyállású vektorok!

104.▷ Lehet-e az $\mathbf{a} = [6,2,-3]$ és a $\mathbf{b} = [-3,6,-2]$ vektor egy kocka egyik csúcsából kiinduló két élvektor? Ha lehet, akkor határozzuk meg az ugyanebből a csúcsból kiinduló harmadik élvektort!

105. Az ABC háromszögben $|\overrightarrow{AB}| = 8$, $|\overrightarrow{BC}| = 4$, $|\overrightarrow{CA}| = 6$. Számítsuk ki az $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ vektor abszolút értékét!

106. Az ABC háromszögben legyen $\overrightarrow{AB} = [2,-3,1]$ és $\overrightarrow{AC} = [1,4,6]$. Számítsuk ki az A csúcshoz tartozó m_a magasság hosszúságát!

107.• Legyen $\mathbf{e}$ egységvektor, $\mathbf{a}$ egy tetszőleges vektor. Mi az $|\mathbf{e}\times\mathbf{a}|$ szám és az $(\mathbf{e}\times\mathbf{a})\times\mathbf{e}$ vektor geometriai jelentése? Ennek ismeretében adjunk új megoldást a **73.** feladatra!

108.▷ Adva van három, közös kezdőpontú $\mathbf{a} = [1,1,0]$, $\mathbf{b} = [0,1,1]$ és $\mathbf{c} = [1,2,2]$ vektor. Bontsuk fel a $\mathbf{c}$ vektort két olyan vektor összegére, melyek közül az egyik az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ síkjában van, a másik e síkra merőleges!

109. Egy paralelogramma két, közös kezdőpontból kiinduló élvektora $\mathbf{a} = [3,-1,1]$ és $\mathbf{b} = [t,2,1]$. Számítsuk ki a t paraméter értékét, ha a paralelogramma területe $3\sqrt{6}$ egység.

110. Adva van az $ABCD$ négyszög három oldalvektora: $\overrightarrow{AB} = [2,-3]$, $\overrightarrow{BC} = [6,2]$ és $\overrightarrow{CD} = [1,3]$. Számítsuk ki az $ABCD$ négyszög területét!

111.▷ Adva van három vektor: $\mathbf{a} = [2,-1]$, $\mathbf{b} = [1,1]$ és $\mathbf{v} = [7,1]$. Számítsuk ki annak a paralelogrammának a területét, amelynek egyik átlója a $\mathbf{v}$ vektor és oldalai $\mathbf{a}$-val, illetve $\mathbf{b}$-vel párhuzamosak!

112. Legyen $\overrightarrow{OA} = [0,1,1]$, $\overrightarrow{OB} = [-1,1,2]$ és $\overrightarrow{OC} = [1,0,1]$. Határozzuk meg az $ABCO$ tetraédernek az O csúcshoz tartozó magasságát!

113. Adott $\mathbf{a}\,(\neq \mathbf{0})$ vektor esetén melyek azok a $\mathbf{b}\,(\neq \mathbf{0})$ vektorok, amelyekre $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = \mathbf{ab}$ teljesül?

Vektorok vegyes szorzata

D 4.24 *Az* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *és* $\mathbf{c}$ *vektorok* $\mathbf{abc}$*-vel jelölt* **vegyes szorzat***án az* $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c}$ *számot értjük.*

T 4.25 *Az* $\mathbf{abc}$ *vegyes szorzat abszolút értéke annak a paralelogramma alapú hasábnak a térfogatát adja, amelynek egy csúcsából kiinduló három élvektora éppen az* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *és* $\mathbf{c}$ *vektor.*
Az $\mathbf{abc}$ *előjele aszerint pozitív ill. negatív, hogy a három vektor jobb- ill. balsodrású vektorhár-*
mas-e? Az $\mathbf{abc}$ *értéke pontosan akkor 0, ha a három vektor komplanáris.*

T 4.26 *Tetszőleges* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *vektorok vegyes szorzatára teljesülnek a következő összefüggések:*

(1) $\mathbf{abc} = \mathbf{bca} = \mathbf{cab} = -\mathbf{bac} = -\mathbf{acb} = -\mathbf{cba}\,,$
(2) $\mathbf{abc} = \mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\,.$

T 4.27 *Az* $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$, $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]$ *és* $\mathbf{c} = [c_1, c_2, c_3]$ *vektorok vegyes szorzata a következő harmadrendű determinánssal egyenlő:*

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Feladatok

114. Fejezzük ki a következő vegyes szorzatokat az $\mathbf{abc}$ vegyes szorzattal:
a) $\mathbf{ab}(\mathbf{c} + \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{c})$, ahol λ és μ adott valós számok,
b) $\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}\dfrac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}\dfrac{\mathbf{c}+\mathbf{a}}{2}\,.$

115. Komplanárisak-e a $2\mathbf{a}+3\mathbf{b}$, $3\mathbf{b}-4\mathbf{c}$, $2\mathbf{a}+5\mathbf{c}$ vektorok, ha az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok nem komplanárisak?

116. Bizonyítsuk be, hogy ha az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok kielégítik az $(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) + (\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + (\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ feltételt, akkor komplanárisak.

117. Bizonyítsuk be, hogy bármely $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorhármas esetén $|\mathbf{abc}| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}||\mathbf{c}|$. Milyen esetben teljesül az egyenlőség?

118. Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok által meghatározott paralelepipedon térfogata V. Mennyi az $\mathbf{r} = 2\mathbf{a}+3\mathbf{b}+4\mathbf{c}$, $\mathbf{s} = \mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}$ és $\mathbf{t} = 2\mathbf{a}+4\mathbf{b}-\mathbf{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon V' térfogata?

119.▷ Az $\mathbf{a} = [2,-1,2]$, $\mathbf{b} = [3,1,5]$ és $\mathbf{c} = [\alpha, 2, -1]$ vektorok által meghatározott paralelepipedon térfogata α milyen értéke mellett lesz 10 egység?

120. A következő feladatokban megadott $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ vektorrendszer az α paraméter mely értékeinél lineárisan független, és mely értékeinél lineárisan függő?

a) $\mathbf{a}=[0,2,3]$, $\mathbf{b}=[\alpha,-1,2]$, $\mathbf{c}=[1,2,1]$,
b) $\mathbf{a}=[2,\alpha,4]$, $\mathbf{b}=[0,0,0]$, $\mathbf{c}=[3,-1,2]$,
c) $\mathbf{a}=[\alpha,1,2]$, $\mathbf{b}=[3,-1,0]$, $\mathbf{c}=[2,1,0]$,
d) $\mathbf{a}=[\alpha,2,1]$, $\mathbf{b}=[0,\alpha,2]$, $\mathbf{c}=[1,-1,3]$,
e) $\mathbf{a}=[\alpha,5,1]$, $\mathbf{b}=[3,0,3]$, $\mathbf{c}=[1,0,1]$,
f) $\mathbf{a}=[3,\alpha,0]$, $\mathbf{b}=[0,3,\alpha]$, $\mathbf{c}=[1,0,-1]$.

121. Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorhármas oly jobbrendszert alkot, amelynek elemei páronként merőlegesek egymásra. Számítsuk ki az $\mathbf{abc}$ vegyes szorzat értékét, ha $|\mathbf{a}|=4$, $|\mathbf{b}|=2$ és $|\mathbf{c}|=3$.

122. Mekkora az $ABCD$ tetraéder térfogata, ha $\overrightarrow{AB}=[2,-1,4]$, $\overrightarrow{BC}=[6,1,-4]$ és $\overrightarrow{CD}=[1,1,2]$?

123. A 8 egység térfogatú $ABCD$ tetraéder két élvektora: $\overrightarrow{AB}=[3,2,1]$ és $\overrightarrow{AC}=[1,0,1]$. Határozzuk meg az $\overrightarrow{AD}$ élvektort úgy, hogy az egyállású legyen a $\mathbf{d}=[-1,2,1]$ vektorral!

124. Legyenek a 4 egység térfogatú paralelepipedon, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ élvektorai $\overrightarrow{AB}=[3,1,0]$ és $\overrightarrow{AD}=[2,0,1]$ (l. a **38.** feladat melletti ábrát). Határozzuk meg az $\overrightarrow{AA_1}$ élvektort azzal a feltétellel, hogy az merőleges legyen az $\mathbf{r}=[2,-4,1]$ és $\mathbf{s}=[1,1,2]$ vektorokra! Számítsuk ki a paralelepipedonnak az $ABCD$ laphoz tartozó magasságát!

125.▷ Legyen $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ három adott vektor és $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ három tetszőleges lineáris kombinációjuk, azaz

$$\mathbf{u}=u_1\mathbf{a}+u_2\mathbf{b}+u_3\mathbf{c}\,,$$
$$\mathbf{v}=v_1\mathbf{a}+v_2\mathbf{b}+v_3\mathbf{c}\,,$$
$$\mathbf{w}=w_1\mathbf{a}+w_2\mathbf{b}+w_3\mathbf{c}$$

álljon fenn valamely u_i, v_i, w_i $(i=1,2,3)$ számokra. Bizonyítsuk be, hogy

$$\mathbf{uvw}=\mathbf{abc}\cdot\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}.$$

126.▷ Legyen $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ és $\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\}$ a tér két lineárisan független vektorrendszere. Ismeretes, hogy ekkor $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ és $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ kifejezhetők

$$\begin{aligned}\mathbf{u}&=u_1\mathbf{a}+u_2\mathbf{b}+u_3\mathbf{c} & & \mathbf{a}=a_1\mathbf{u}+a_2\mathbf{v}+a_3\mathbf{w}\,,\\ \mathbf{v}&=v_1\mathbf{a}+v_2\mathbf{b}+v_3\mathbf{c} & \text{illetve}\quad & \mathbf{b}=b_1\mathbf{u}+b_2\mathbf{v}+b_3\mathbf{w}\,,\\ \mathbf{w}&=w_1\mathbf{a}+w_2\mathbf{b}+w_3\mathbf{c} & & \mathbf{c}=c_1\mathbf{u}+c_2\mathbf{v}+c_3\mathbf{w}\end{aligned}$$

alakban, ahol u_i, v_i, w_i, a_i, b_i, c_i $(i=1,2,3)$ alkalmasan választott valós számok. Bizonyítsuk be, hogy

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}=1\,.$$