4. Vektoralgebra (megoldások)

1.

2. a) $3\mathbf{m} - 3\mathbf{n} = 3(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - 3(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 6\mathbf{b}$ b) $4\mathbf{m} + 4\mathbf{n} = 8\mathbf{a}$;
c) $2\mathbf{m} - \frac{1}{2}\mathbf{n} = \frac{3}{2}\mathbf{a} + \frac{5}{2}\mathbf{b}$; d) $3\mathbf{m} + \frac{\sqrt{2}}{3}\mathbf{n} = \frac{9+\sqrt{2}}{3}\mathbf{a} + \frac{9-\sqrt{2}}{3}\mathbf{b}$.

3. a) $3\mathbf{a} - 4\mathbf{b} = \frac{10}{3}\mathbf{m} - \frac{11}{3}\mathbf{n}$; b) $5\mathbf{a} + 2\mathbf{b} = \frac{8}{3}\mathbf{m} - \frac{1}{3}\mathbf{n}$;
c) $-\mathbf{a} + \frac{1}{10}\mathbf{b} = -\frac{7}{10}\mathbf{m} + \frac{2}{5}\mathbf{n}$; d) $2\mathbf{a} - \mathbf{b}\sqrt{3} = \frac{4+\sqrt{3}}{3}\mathbf{m} - \frac{2+2\sqrt{3}}{3}\mathbf{n}$.

4. A szabályos hatszög geometriai tulajdonságaiból következik, hogy
$\overrightarrow{A_1A_2} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, $\overrightarrow{A_2A_3} = -\mathbf{a}$, $\overrightarrow{A_3A_4} = -\mathbf{b}$, $\overrightarrow{A_4A_5} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\overrightarrow{A_5A_6} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{A_6A_1} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{A_1A_3} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} = \mathbf{b} - 2\mathbf{a}$, $\overrightarrow{A_1A_4} = -2\mathbf{a}$, $\overrightarrow{A_1A_5} = -(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.
$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_6} = \mathbf{0}$.

5. a) $\overrightarrow{BA}$. b) $\mathbf{0}$. **6.** $\overrightarrow{A_1A_n}$.

7. I. „akkor": Tegyük fel először, hogy $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$. Rendezés után alkalmazzuk a **T 4.1** tételt:

$$|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| \geq |\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |-\mathbf{c}| = |\mathbf{c}|.$$

Ugyanígy kapjuk, hogy $|\mathbf{a}| + |\mathbf{c}| \geq |\mathbf{b}|$ és $|\mathbf{b}| + |\mathbf{c}| \geq |\mathbf{a}|$. Ha „$\geq$" helyett „$=$" jel van, akkor a háromszög szakasszá, esetleg ponttá fajul.) Ezekből következik, hogy az $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$ és $|\mathbf{c}|$ szakaszokkal szerkeszthető háromszög.

Abban az esetben, amikor valamelyik (pl. **c**) előállítható a másik két vektor (pl. **a** és **b**) összegeként, az előbbihez hasonlóan járunk el!

II. „csak akkor": Ha **a**, **b** és **c** egy háromszög oldalvektorai, akkor a vektorok elhelyezkedésére az ábrán vázolt esetek lehetnek.

Az a) esetben: $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{0}$, a b) esetben a vektorok jelölésétől függően, $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c}$, vagy $\mathbf{a}+\mathbf{c}=\mathbf{b}$, vagy $\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{a}$.

8. Mivel $\mathbf{a}+\dfrac{\mathbf{a}-\mathbf{b}}{2}-\dfrac{3\mathbf{a}-\mathbf{b}}{2}=\mathbf{0}$, ezért az előző feladat miatt van ilyen háromszög.

9. A három vektor összege nem nullvektor. Ugyanakkor a három vektor közül semelyik kettőnek az összege sem egyenlő a harmadikkal, mivel **a** és **b** nem kollineárisak. Ezért a **7.** feladat miatt nincs ilyen háromszög.

10. $\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ és $-\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ $(\mathbf{a}\neq\mathbf{0})$.

11. Mivel **a** és **b** merőleges vektorok és $\left|\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\right|=\left|\dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}\right|=1$, ezért a keresett vektor $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}+\dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}\right)$.

12. Az $|\mathbf{a}|\mathbf{b}$ és $|\mathbf{b}|\mathbf{a}$ vektorok hossza egyenlő. Ezért, ha **a** és **b** ellentétes irányúak, akkor az első, ha pedig egyező irányúak, akkor a második állítás igaz.

13. A **T 4.1** és **T 4.2** tételeket alkalmazzuk.
a) Akkor és csak akkor teljesül, ha a két vektor α szögére $0\leq\alpha<\frac{\pi}{2}$.
b) Akkor és csak akkor teljesül, ha a két vektor szögére $\frac{\pi}{2}<\alpha\leq\pi$.
c) Ha a két vektor szöge $\frac{\pi}{2}$.
d) Akkor és csak akkor teljesül, ha **a** és **b** ellentétes irányú és $|\mathbf{a}|\geq|\mathbf{b}|$.
e) Akkor és csak akkor teljesül, ha a két vektor ellentétes irányú.
f) Akkor és csak akkor teljesül, ha a két vektor egyező irányú.
g) Akkor és csak akkor teljesül, ha $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|$.

14. Az $\overrightarrow{OA}_i$ $(i=1,2,3,\ldots,5)$ vektorokat forgassuk el az O pont körül $72°$-kal. Ekkor az $\overrightarrow{OA}_i$ vektorok **a** összege az elforgatott vektorok **b** összegével $72°$-os szöget zár be. Az ötszög szabályossága miatt azonban $\mathbf{a}=\mathbf{b}$. Ez csak úgy lehet, ha a vektorösszeg $\mathbf{0}$.

15. Az $\overrightarrow{OA}_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ vektorokat forgassuk el az O pont körül $\frac{2\pi}{n}$ szöggel. A továbbiakban a **14.** feladat megoldásához hasonlóan járunk el.

16. Legyen a keresett $A_1A_2A_3$ háromszögben F_1 az A_1A_2, F_2 az A_2A_3 és F_3 az A_2A_1 oldal felezőpontja, és O tetszőleges pontja. A **T 4.2** tétel alapján: $\overrightarrow{OF}_1=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}_1+\overrightarrow{OA}_2)$, $\overrightarrow{OF}_2=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}_2+\overrightarrow{OA}_3)$, $\overrightarrow{OF}_3=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}_3+\overrightarrow{OA}_1)$.
Ezekből $\overrightarrow{OF}_1-\overrightarrow{OF}_2+\overrightarrow{OF}_3=\overrightarrow{OA}_1$. Ez alapján az A_1 csúcs megszerkeszthető; ebből pedig a másik kettő is.

17. A keresett ötszög: $A_1A_2A_3A_4A_5$. Legyen F_i $(i=1,2,3,4)$ az A_iA_{i+1} $(i=1,2,3,4)$ oldal, F_5 az A_5A_1 oldal felezőpontja, az O pedig egy tetszőleges pont az ötszög síkjában. A **T 4.2** tétel alapján $\overrightarrow{OF}_i=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}_i+\overrightarrow{OA}_{i+1})$ $(i=1,2,3,4)$ és $\overrightarrow{OF}_5=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}_5+\overrightarrow{OA}_1)$. Ezekből $\overrightarrow{OF}_1-\overrightarrow{OF}_2+\overrightarrow{OF}_3-\overrightarrow{OF}_4+\overrightarrow{OF}_5=\overrightarrow{OA}_1$. Ez alapján az A_1 (és ebből a többi) csúcs megszerkeszthető.

18. A keresett sokszög: $A_1A_2\dots A_{2n+1}$. Legyen F_i $(i=1,2,\dots,2n)$ az A_iA_{i+1} $(i=1,2,\dots,2n)$ oldal, F_{2n+1} az $A_{2n+1}A_1$ oldal felezőpontja, az O pedig egy tetszőleges pont a sokszög síkjában. Az előző feladat megoldásához hasonlóan eljárva, $\overrightarrow{OF}_1-\overrightarrow{OF}_2+\overrightarrow{OF}_3-\dots-\overrightarrow{OF}_{2n}+\overrightarrow{OF}_{2n+1}=\overrightarrow{OA}_1$ adódik.

19. Jelölje F_1 a BC, F_2 az AC és F_3 az AB oldal felezőpontját. A **T 4.2** tétel és a vektorösszeadás definíciója alapján:
$\overrightarrow{AF}_1=\frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c})$, $\overrightarrow{BF}_2=\frac{1}{2}\mathbf{b}-\mathbf{c}$, $\overrightarrow{CF}_3=\frac{1}{2}\mathbf{c}-\mathbf{b}$.

20. Az előző feladat jelöléseit alkalmazva, a három súlyvonalvektor összege $\overrightarrow{AF}_1+\overrightarrow{BF}_2+\overrightarrow{CF}_3=\mathbf{0}$. A **7.** feladat alapján ez azt jelenti, hogy a három súlyvonallal, mint oldalakkal, szerkeszthető háromszög.

21. Az ábra szerinti ABC háromszög oldalvektorainak irányítása legyen olyan, hogy $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{0}$ teljesüljön; súlyvonalvektorai pedig $\mathbf{s}_a$, $\mathbf{s}_b$ és $\mathbf{s}_c$. Jelöljük $A'B'C'$-vel az előbbi vektorok hosszával szerkesztett háromszöget, melynél az oldalvektorok irányítása olyan, mint az előbb, vagyis $\mathbf{s}_a+\mathbf{s}_b+\mathbf{s}_c=\mathbf{0}$. Az $A'B'C'$ háromszög $\mathbf{s}'_a$, $\mathbf{s}'_b$ és $\mathbf{s}'_c$ súlyvonalvektorainak hosszával szerkesztett háromszög legyen $A''B''C''$. (Ezek a szerkesztések az előző feladat alapján elvégezhetők.)
A vektorösszeadás definíciója alapján egyrészt (az ABC háromszögből)
$\mathbf{s}_a=\frac{1}{2}\mathbf{a}+\mathbf{c}$, $\mathbf{s}_b=\frac{1}{2}\mathbf{b}+\mathbf{a}$, $\mathbf{s}_c=\frac{1}{2}\mathbf{c}+\mathbf{b}$, másrészt (az $A'B'C'$ háromszögből)
$\mathbf{s}'_a=\frac{1}{2}\mathbf{s}_a+\mathbf{s}_c$, $\mathbf{s}'_b=\frac{1}{2}\mathbf{s}_b+\mathbf{s}_a$, $\mathbf{s}'_c=\frac{1}{2}\mathbf{s}_c+\mathbf{s}_b$. Behelyettesítés után
$\mathbf{s}'_a=\frac{1}{4}\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{c}+\frac{1}{2}\mathbf{c}+\mathbf{b}=-\frac{3}{4}\mathbf{a}+(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$.
Mivel $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{0}$, ezért $\mathbf{s}'_a=-\frac{3}{4}\mathbf{a}$. Hasonlóan: $\mathbf{s}'_b=-\frac{3}{4}\mathbf{b}$ és $\mathbf{s}'_c=-\frac{3}{4}\mathbf{c}$.
Ezekből az ABC és $A''B''C''$ háromszögek hasonlósága következik.

22. Jelöljön O egy tetszőlegesen felvett pontot. (L. ábra.) $\overrightarrow{OF}_1 = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{OA}_2)$, $\overrightarrow{OF}_2 = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}_2 + \overrightarrow{OA}_3)$, $\overrightarrow{OF}_3 = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}_3 + \overrightarrow{OA}_4)$, $\overrightarrow{OF}_4 = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}_4 + \overrightarrow{OA}_1)$.
Az első két egyenletből $\overrightarrow{F_2F}_1 = \overrightarrow{OF}_1 - \overrightarrow{OF}_2 = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}_1 - \overrightarrow{OA}_3)$, a harmadikból és a negyedikből pedig $\overrightarrow{F_3F}_4 = \overrightarrow{OF}_4 - \overrightarrow{OF_3} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}_1 - \overrightarrow{OA}_3)$ következik. Kaptuk, hogy $\overrightarrow{F_2F}_1 = \overrightarrow{F_3F}_4$ ezért az $F_1F_2F_3F_4$ négyszög paralelogramma.

23. $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BL}$, másrészt $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CL}$. (L. ábra.) Ezt a két egyenletet összeadva és figyelembe véve, hogy $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KD} = \overrightarrow{BL} + \overrightarrow{CL} = \mathbf{0}$, a bizonyítandó állítást kapjuk.

24. $\overrightarrow{AP} = \frac{m}{m+n}(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ (l. ábra). Ezért $\overrightarrow{OP} = \mathbf{a} + \overrightarrow{AP} = \frac{n}{m+n}\mathbf{a} + \frac{m}{m+n}\mathbf{b}$.

25. Legyen F_a az ABC háromszög A csúccsal szemközti oldalának felezőpontja, és S_a az AF_a súlyvonalnak az F_a végponthoz közelebbi harmadoló pontja. Hasonló a jelentésük az S_b és S_c pontoknak. Legyen $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$ és $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c}$. A **24.** feladatot alkalmazva az $m = 1$, $n = 2$ esetre

$$\overrightarrow{AS}_b = \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{b} + \mathbf{c}}{2+1} = \frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{AS}_c = \frac{1}{3}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) .$$

Ugyanakkor a **T 4.2** tételből következik, hogy $\overrightarrow{AS}_a = \frac{1}{3}(\mathbf{b}+\mathbf{c})$. Így az S_a, S_b és S_c pontok egybeesnek, és a súlyvonalak harmadolva metszik egymást.

26. $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$.

27. Az előző két feladat bármelyike alapján $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{3}(\mathbf{b} + \mathbf{c})$, $\overrightarrow{BS} = \frac{1}{3}(\mathbf{b} - 2\mathbf{c})$, $\overrightarrow{CS} = \frac{1}{3}(\mathbf{c} - 2\mathbf{b})$. Ezekből $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{CS} = \mathbf{0}$.

28. I. rész: „csak akkor". Ha S a súlypontja az ABC háromszögnek, akkor az előző feladat eredménye szerint $\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{BS}+\overrightarrow{CS}=\mathbf{0}$.
II. rész: „akkor". Kontrapozíciós bizonyítást végzünk. Azt mutatjuk meg, hogy ha valamely P pont nem súlypontja az ABC háromszögnek (azaz $P\neq S$), akkor $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}\neq\mathbf{0}$.
Tekintsük a következő vektorösszegeket: $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{PS}$, $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BS}=\overrightarrow{PS}$, $\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CS}=\overrightarrow{PS}$. Ezeket összeadva és figyelembe véve az S súlypontra vonatkozó $\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{BS}+\overrightarrow{CS}=\mathbf{0}$ egyenlőséget, $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=3\overrightarrow{PS}\neq\mathbf{0}$.

29. Alkalmazzuk a **26.** feladat eredményét az $O=S$ pontra és az $A_1B_1C_1$ háromszögre. Ekkor $3\overrightarrow{SS_1}=\overrightarrow{SA_1}+\overrightarrow{SB_1}+\overrightarrow{SC_1}$. A **28.** feladat alapján $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=\mathbf{0}$. E két utóbbi összefüggésből, valamint az $\overrightarrow{SA_1}-\overrightarrow{SA}=\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{SB_1}-\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{SC_1}-\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{CC_1}$ egyenlőségekből a bizonyítandó állítás adódik.

30. Az előző feladat megoldása és az azt követő 2. megjegyzés alapján az ABC, illetve az $A_1B_1C_1$ háromszög S, illetve S_1 súlypontja akkor és csak akkor közös, ha $\overrightarrow{AA}_1+\overrightarrow{BB}_1+\overrightarrow{CC}_1=\mathbf{0}$.
Megjegyzés: Mivel a háromszögek csúcsainak jelölése tetszőleges, ezért ez az egyenlőség az alábbiak bármelyikével helyettesíthető:

$$\overrightarrow{AA}_1+\overrightarrow{BC}_1+\overrightarrow{CB}_1=\mathbf{0}, \qquad \overrightarrow{AC}_1+\overrightarrow{BA}_1+\overrightarrow{CB}_1=\mathbf{0},$$

$$\overrightarrow{AB}_1+\overrightarrow{BA}_1+\overrightarrow{CC}_1=\mathbf{0}, \qquad \overrightarrow{AC}_1+\overrightarrow{BB}_1+\overrightarrow{CA}_1=\mathbf{0}.$$

$$\overrightarrow{AB}_1+\overrightarrow{BC}_1+\overrightarrow{CB}_1=\mathbf{0},$$

A **7.** feladatból következik, hogy az előbbi vektorhármasok egy-egy háromszög oldalvektorai lehetnek, ezért három ilyen vektor komplanáris még akkor is, ha az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögek síkjai különböznek.

31. Legyen az $ABCD$ tetraéder ABC lapjának súlypontja S_D, az O pedig a tér tetszőleges pontja. Az előző feladat szerint $\overrightarrow{OS_D}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$. Ha S jelöli a DS_D szakasznak az S_D ponthoz közelebbi negyedelő pontját, akkor a **24.** szerint (az $m=3$, $n=1$ esetre alkalmazva) $\overrightarrow{OS}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OD}+3\overrightarrow{OS_D}\right)$.
Ezekből $\overrightarrow{OS}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$ következik. Ha más lap súlypontjából indulunk ki, akkor is ugyanezt az eredményt kapjuk. Ezek szerint az S pont mind a négy súlyvonalon rajta van, és negyedeli azokat.

32. Legyen F_A az AA_1, F_B a BB_1, F_C a CC_1 és F_D a DD_1 szakasz felezőpontja. A **23.** feladat alapján $\overrightarrow{F_AF_D}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{A_1D_1})$ és $\overrightarrow{F_BF_C}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{B_1C_1})$. Mivel paralelogrammákról van szó, ezért $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ és $\overrightarrow{A_1D_1}=\overrightarrow{B_1C_1}$. Ezekből $\overrightarrow{F_AF_D}=\overrightarrow{F_BF_C}$ következik. Tehát az $F_AF_BF_CF_D$ négyszög paralelogramma.

33. Legyen $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$ és $\overrightarrow{OD}=\mathbf{d}$ (l. ábra). A tükrözés miatt egyrészt $\overrightarrow{OO}_1=2\mathbf{a}$ és $\overrightarrow{OO}_2=2(\mathbf{d}-\mathbf{a})$, másrészt $\overrightarrow{OO}_3=2\mathbf{b}$ és $\overrightarrow{OO}_4=2(\mathbf{c}-\mathbf{b})$. Mivel az $ABCD$ négyszög paralelogramma, ezért $\mathbf{d}-\mathbf{a}=\mathbf{c}-\mathbf{b}$. Ebből

$\overrightarrow{OO_2} = \overrightarrow{OO_4}$ következik. Tehát O_2 és O_4 egybeesik.

34. I. A feltétel szükséges. Valóban, ha A, B, C és D egy paralelogramma csúcsai, akkor az előbbi feladat szerint rendre O_2 és O_4 egybeesik.

II. A feltétel elegendő. Ha O_2 és O_4 egybeesik, akkor az ábra szerinti O_1, O_2, O_3, O_4 pontnégyes olyan, hogy az A az O_1O, a B az OO_3, a C az $O_3O_4 = (O_3O_2)$ és D az $O_2O_1 (= O_4O_1)$ szakasz felezőpontja. A **22.** feladat megoldásához hasonló gondolatmenetet követve kapjuk, hogy az $O_1O_2O_3O_4$ négyszög oldalfelező pontjai egy paralelogramma csúcsai.

35. I. Ha $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ kollineárisak, akkor a **T 4.5** tétel alapján valamely k számra $\mathbf{v} = k\mathbf{w}$, azaz $p_1\mathbf{a} + p_2\mathbf{b} + p_3\mathbf{c} = kq_1\mathbf{a} + kq_2\mathbf{b} + kq_3\mathbf{c}$. Ebből a **T 4.9** tétel alapján kapjuk, hogy $p_1 = kq_1$, $p_2 = kq_2$, $p_3 = kq_3$. Azaz $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_3}{q_3}$.

II. Ha pedig $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_3}{q_3} (= k)$, akkor a $p_1 = kq_1$, $p_2 = kq_2$, $p_3 = kq_3$ értékekkel kapjuk, hogy

$\mathbf{v} = p_1\mathbf{a} + p_2\mathbf{b} + p_3\mathbf{c} = kq_1\mathbf{a} + kq_2\mathbf{b} + kq_3\mathbf{c} = k(q_1\mathbf{a} + q_2\mathbf{b} + q_3\mathbf{c}) = k\mathbf{w}$. Ez a **T 4.5** tétel miatt azt jelenti, hogy $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ kollineárisak.

36. A **T 4.5** tételt és a **35.** feladatot alkalmazzuk.

a) $\alpha = 6$. b) $\alpha = 0$. c) Minden valós α-ra kollineárisak.

d) Nincs olyan α, amelyre kollineárisak.

e) Csak az $\alpha = \frac{1}{9}$, $\beta = \frac{1}{3}$ esetben kollineárisak.

f) Nincs olyan α és β, amelyekre kollineárisak.

g) Csak az $\alpha = \beta = 0$ esetben kollineárisak.

h) Akkor és csak akkor kollineárisak, ha $1\alpha = \beta$.

i) Akkor és csak akkor kollineárisak, ha $\alpha\beta = 2$.

j) Akkor és csak akkor kollineárisak, ha $\beta = -3$. Az α bármilyen valós szám lehet.

37. A **D 4.4** definíciót alkalmazzuk.

a) Az $\{\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}\}$ vektorrendszer lineárisan függő, mert zérusvektort tartalmaz.

b) Az $\{\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}\}$ vektorrendszer lineárisan függő, mert az $\mathbf{s}$ vektor az $\mathbf{r}$ vektornak számszorosa (-2-szerese).

c) Azt kell eldöntenünk, hogy $k_1\mathbf{r} + k_2\mathbf{s} + k_3\mathbf{t} = \mathbf{0}$ teljesülhet-e úgy is, hogy a k_1, k_2, k_3 számok között van zérustól különböző.

Az $\mathbf{r}$, $\mathbf{s}$ és $\mathbf{t}$ értékeit beírva az előbbi egyenletbe, majd rendezve: $(k_1 + k_3)\mathbf{a} + (k_1 + k_2)\mathbf{b} + (k_1 + k_2 + k_3)\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ vektorrendszer lineáris függetlensége miatt ez csak úgy állhat fenn, hogy

$$\begin{cases} k_1 + k_3 = 0, \\ k_1 + k_2 = 0, \\ k_1 + k_2 + k_3 = 0. \end{cases}$$

Ennek az egyenletrendszernek csak a $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, $k_3 = 0$ számhármas a megoldása. Ezért az $\{\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}\}$ vektorrendszer lineárisan független.

d) A $k_1\mathbf{r} + k_2\mathbf{s} + k_3\mathbf{t} = \mathbf{0}$ egyenletből a c) részhez hasonlóan kapjuk, hogy $(k_2 + k_3)\mathbf{a} - (k_2 + k_3)\mathbf{b} + (k_1 - k_2 + k_3)\mathbf{c} = \mathbf{0}$, azaz

$$\begin{cases} k_2 + k_3 = 0\,, \\ k_2 + k_3 = 0\,, \\ k_1 - k_2 + k_3 = 0\,. \end{cases}$$

Ezekből $k_1 = -2k_3$ és $k_2 = -k_3$ következik. Ezért például a $k_3 = 1$, $k_2 = -1$, $k_1 = 2$ értékekkel $-2\mathbf{r} - \mathbf{s} + \mathbf{t} = \mathbf{0}$. Tehát az $\{\mathbf{r},\ \mathbf{s},\ \mathbf{t}\}$ vektorrendszer lineárisan függő.

e) Lineárisan függő. f) Lineárisan független.

g) Lineárisan függő. h) Lineárisan függő.

38. $\overrightarrow{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = [9, 8, -5]$, $\overrightarrow{AC}_1 = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = [10, 12, -8]$,
$\overrightarrow{AD}_1 = \mathbf{b} + \mathbf{c} = [6, 10, -5]$, $\overrightarrow{AF} = \mathbf{a} + \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = [7, 7, -\frac{11}{2}]$,
$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{4}(\mathbf{a} + 3\mathbf{b} + 3\mathbf{c}) = \frac{1}{2}[11, 16, -9]$, $\overrightarrow{AK} = \mathbf{b} + \mathbf{c} + \frac{1}{2}\mathbf{a} = [8, 11, -\frac{13}{2}]$,
$\overrightarrow{FH} = \frac{1}{4}(-3\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = [-\frac{3}{2}, 1, 1]$, $\overrightarrow{HK} = \frac{1}{4}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = [\frac{5}{2}, 3, -2]$.

39. A **30.**, illetve a **31.** feladat alapján
$\overrightarrow{BS_B} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) = \frac{1}{3}(\mathbf{b} + \mathbf{c} - 3\mathbf{a}) = \frac{1}{3}[-4, -6, 20]$,
$\overrightarrow{BS} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) = \frac{1}{4}[-4, -6, 20]$.

40. a) Ha az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{BC}$ vektorok egyező irányúak, akkor az aránypárból $\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ következik; ellentétes irány esetén pedig $\overrightarrow{BC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. Vegyük figyelembe, hogy $\overrightarrow{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$ és $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$. Ezeket az előbbi egyenletekbe helyettesítve kapjuk, hogy az első esetben $\mathbf{c} = \frac{5}{3}\mathbf{b} - \frac{2}{3}\mathbf{a} = \frac{1}{3}[-1, 17, 31]$, a második esetben pedig $\mathbf{c} = \frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b} = \frac{1}{3}[7, 13, 11]$.
A b) és c) és d) feladatok megoldását az előbbihez hasonlóan végezzük.
b) $\mathbf{c} = [1, \frac{3}{2}, 7]$ vagy $\mathbf{c} = [3, \frac{5}{2}, 1]$.
c) $\mathbf{c} = \frac{1}{3}[3, 14, -1]$ vagy $\mathbf{c} = \frac{1}{3}[-3, 10, 7]$.
d) Ha $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{BC}$ egyirányúak, akkor
$\mathbf{c} = \frac{m+n}{m}\mathbf{b} - \frac{n}{m}\mathbf{a} = \frac{1}{m}\left[(m+n)b_1 - na_1, (m+n)b_2 - na_2, (m+n)b_3 - na_3\right]$.
Ha különböző irányúak, akkor
$\mathbf{c} = \frac{m-n}{m}\mathbf{b} + \frac{n}{m}\mathbf{a} = \frac{1}{m}\left[(m-n)b_1 + na_1, (m-n)b_2 + na_2, (m-n)b_3 + na_3\right]$.

41. A **T 4.2** tétel alapján: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = 2\mathbf{d}$, $\mathbf{b} + \mathbf{c} = 2\mathbf{e}$, $\mathbf{a} + \mathbf{c} = 2\mathbf{f}$. Ezekből $\mathbf{a} = \mathbf{d} - \mathbf{e} + \mathbf{f} = [5, 4, -6]$, $\mathbf{b} = \mathbf{d} + \mathbf{e} - \mathbf{f} = [3, 2, 2]$ és $\mathbf{c} = -\mathbf{d} + \mathbf{e} + \mathbf{f} = [1, 0, -8]$ következik. A **30.** megoldást alkalmazva
$\mathbf{s} = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \frac{1}{3}(\mathbf{d} + \mathbf{e} + \mathbf{f}) = [3, 2, -6]$.

42. A **25.** és **31.** feladatok megoldása alapján:
$\overrightarrow{AS} = \frac{3}{8}(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_3) = \frac{9}{4}[1, 1, 1]$, $\overrightarrow{AS}_4 = \frac{1}{2}(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_3) = [3, 3, 3]$,
$\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_3) = [6, 0, -3]$, $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_3) = [3, 3, 15]$,
$\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}(-\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_3) = [0, 6, -3]$, $\overrightarrow{BC} = 3(\mathbf{s}_3 - \mathbf{s}_2) = [-3, 3, 18]$,
$\overrightarrow{BD} = 3(\mathbf{s}_3 - \mathbf{s}_1) = [-6, 6, 0]$, $\overrightarrow{CD} = 3(\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1) = [-3, 3, -18]$.

43. a) Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok nem komplanárisak; ezért, a **T 4.8** tétel alapján, $\mathbf{v}$ előállítható az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ lineáris kombinációjaként, és ez az előállítás

egyértelmű. Az $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$, $\mathbf{b}=\mathbf{i}-\mathbf{j}$, $\mathbf{c}=\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ egyenletrendszerből: $\mathbf{i}=\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$, $\mathbf{j}=\frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{b})$, $\mathbf{k}=\mathbf{a}-\mathbf{c}$. Ezeket a $\mathbf{v}=3\mathbf{i}+5\mathbf{j}+7\mathbf{k}$ egyenletbe írva kapjuk, hogy $\mathbf{v}=11\mathbf{a}-\mathbf{b}-7\mathbf{c}$.
b) Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorhármas komplanáris, és a $\mathbf{v}$ vektor nincs a síkjukban. Ezért a $\mathbf{v}$ nem fejezhető ki az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok lineáris kombinációjaként.
c) Az a) részhez hasonlóan járunk el. $\mathbf{v}=2\mathbf{a}+\mathbf{b}-3\mathbf{c}$.

44. Első megoldás. A **T 4.6** tétel alapján $\mathbf{c}$-nek

(1) $$\mathbf{c}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}$$

alakú előállítása lehetséges és egyértelmű.
I. A feltétel szükséges. Tegyük fel, hogy a vektorok végpontjai egy egyenesen vannak. (**L. ábra!**) Ekkor, valamely λ számmal $\lambda(\mathbf{c}-\mathbf{a})=\mathbf{b}-\mathbf{c}$. Ebből

(2) $$\mathbf{c}=\frac{\lambda}{\lambda+1}\mathbf{a}+\frac{1}{\lambda+1}\mathbf{b}$$

következik, ha $\lambda\neq-1$. (A $\lambda=-1$ esetben $\mathbf{a}=\mathbf{b}$, ami ellentmond feltevésünknek.) A (2)-ből és (1)-ből a **T 4.6** és **T 4.9** tételek alapján $\alpha=\frac{\lambda}{\lambda+1}$ és $\beta=\frac{1}{\lambda+1}$ adódik. Tehát $\alpha+\beta=1$.
II. A feltétel elegendő. Tegyük fel, hogy $\alpha+\beta=1$. Ekkor (1) miatt $\mathbf{c}=\alpha\mathbf{a}+(1-\alpha)\mathbf{b}$. Ebből egyrészt $\mathbf{c}-\mathbf{a}=(\alpha-1)\mathbf{a}+(1-\alpha)\mathbf{b}$, másrészt $\mathbf{b}-\mathbf{c}=-\alpha\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}$ következik. E két utóbbiból $\alpha\neq0$ esetén $\mathbf{c}-\mathbf{a}=\frac{1-\alpha}{\alpha}(\mathbf{b}-\mathbf{c})$ adódik, az $\alpha=0$ esetben pedig $\mathbf{b}-\mathbf{c}=0$. Tehát (mindkét esetben) $\mathbf{c}-\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}-\mathbf{c}$ kollineáris vektorok. Ezért $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ végpontjai egy egyenesen vannak.
Második megoldás. Az (1) egyenlőség mindkét oldalából vonjuk ki az $\mathbf{a}$ vektort, majd az így kapott kifejezést alakítsuk át: $\mathbf{c}-\mathbf{a}=\beta(\mathbf{b}-\mathbf{a})+(\alpha+\beta-1)\mathbf{a}$. Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok végpontjaira illeszkedő egyenes tartalmazza a $\mathbf{b}-\mathbf{a}$ vektort. Ahhoz, hogy tartalmazza a $\mathbf{c}-\mathbf{a}$ vektort is, szükséges és elégséges, hogy $\alpha+\beta-1=0$ teljesüljön.

45. A feladatbeli vektoregyenlet alapján: $\mathbf{d}-\mathbf{a}=\beta(\mathbf{b}-\mathbf{a})+\gamma(\mathbf{c}-\mathbf{a})+$ $+(\alpha+\beta+\gamma-1)\mathbf{a}$. A továbbiakban az előző feladat második megoldásához hasonló gondolatmenetet követünk.

46. Akkor és csakis akkor, ha $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|$.

47. Az ABC háromszögben legyen $\overrightarrow{BC}=\mathbf{a}$ és $\overrightarrow{BA}=\mathbf{c}$ (**l. ábra**). Messe a B-ből induló szögfelező az AC oldalt a D pontban. Az előző feladat megoldása alapján a $\overrightarrow{BD}$ szögfelező vektorral egyező irányú az $\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}+\dfrac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|}$ vektor. Ezért valamely λ-val

(1) $$\overrightarrow{BD}=\lambda\left(\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}+\frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|}\right).$$

Másrészt,

(2) $$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\mathbf{c}+\frac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{AC}|}(\mathbf{a}-\mathbf{c})=\frac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{AC}|}\mathbf{a}+\left(1-\frac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{AC}|}\right)\mathbf{c}.$$

Mivel $\mathbf{a}$ és $\mathbf{c}$ nem kollineáris, ezért (1), (2) és a **T 4.9** tétel alapján $\dfrac{\lambda}{|\mathbf{a}|}=\dfrac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{AC}|}$

és $\dfrac{\lambda}{|\mathbf{c}|} = 1 - \dfrac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{|\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AC}|}$. Ezek hányadosát véve kapjuk, hogy $\dfrac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{c}|} = \dfrac{|\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AD}|}$.

48. Az előző feladat szerint $|\overrightarrow{CD}| : |\overrightarrow{AD}| = |\mathbf{a}| : |\mathbf{c}|$. Alkalmazva a **24.** feladatot az $m = |\mathbf{a}|$, $n = |\mathbf{c}|$ esetre: $\overrightarrow{BD} = \dfrac{|\mathbf{c}|}{|\mathbf{a}| + |\mathbf{c}|}\mathbf{a} + \dfrac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{a}| + |\mathbf{c}|}\mathbf{c}$.

49. Ismeretes, hogy minden derékszögű háromszögben, az ábra jelölései szerint $a^2 = m_2 c$ és $b^2 = m_1 c$. Ezekből $m_1 : m_2 = b^2 : a^2$ következik. Alkalmazva a **24.** feladatot az $m = b^2$, $n = a^2$ esetre: $\overrightarrow{CD} = \frac{b^2}{c^2}\overrightarrow{CB} + \frac{a^2}{c^2}\overrightarrow{CA}$.

50. Legyen k_1 és k_2 az a két szám, amelyekre

(1) $\qquad \overrightarrow{AM} = k_1\overrightarrow{AE}$, illetve $\overrightarrow{BM} = k_2\overrightarrow{BF}$.

Erre a két számra az $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{AE} = \mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}$ és $\overrightarrow{BF} = \mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{a}$ egyenlőségek alapján $\left(k_1 + \frac{k_2}{2} - 1\right)\mathbf{a} + \left(\frac{k_1}{2} - k_2\right)\mathbf{b} = \mathbf{0}$ adódik. Mivel $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ lineárisan függetlenek, ezért $k_1 + \frac{k_2}{2} - 1 = 0$ és $\frac{k_1}{2} - k_2 = 0$, és ebből az egyenletrendszerből $k_1 = \frac{4}{5}$. Az (1)-be helyettesítve: $\overrightarrow{AM} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AE} = \frac{4}{5}\mathbf{a} + \frac{2}{5}\mathbf{b}$.

51. A **D 4.13** definíciót alkalmazzuk.

a) 6. b) 9. c) 16.

d) Mivel a skaláris szorzás kommutatív és a vektorösszeadásra nézve disztributív, $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{b}^2 = 9 + 2 \cdot 6 + 16 = 37$.

e) 13. f) -13. g) 217.

52. a) -62. b) 34. c) 997.

53. Vegyük figyelembe, hogy $(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)^2 = 0$ és $|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = |\mathbf{e}_3| = 1$. $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = -\frac{3}{2}$.

54. $\mathbf{ab} + \mathbf{ac} + \mathbf{bc} = -13$.

55. $|\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}| = \sqrt{(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})^2} = 10$.

56. A bal oldalon végezzük el a négyzetre emelést, majd vonjunk össze. Geometriai jelentés: a paralelogramma átlóinak négyzetösszege az oldalak négyzetösszegével egyenlő.

57. Az állítás helyessége a **D 4.13** definícióból következik. Az $\mathbf{ab} = -|\mathbf{a}||\mathbf{b}|$ (illetve, az $\mathbf{ab} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$) egyenlőség akkor teljesül, ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ ellentétes (ill. egyező) irányúak.

58. A **T 4.16** tétel alapján pontosan akkor, ha $\mathbf{a}^2 - \alpha^2\mathbf{b}^2 = 0$; így $\alpha = \dfrac{\pm|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|}$.

59. Skalárisan megszorozva mindkét oldalt az $\mathbf{a}$ vektorral, majd egyszerűsítve az $\mathbf{a}^2$ ($\neq 0$) számmal, a **T 4.16** tétel alapján az állítás helyessége adódik.

60. Az előző feladat megoldásához hasonlóan járunk el.

61. A **T 4.16** tétel alapján $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$.

62. Legyen a két vektor szöge α. A **D 4.13** definíció alapján

$$\cos\alpha = \frac{(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}-\mathbf{b})}{|\mathbf{a}+\mathbf{b}||\mathbf{a}-\mathbf{b}|} .$$

A nevező kiszámításához az $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2 = (|\mathbf{a}+\mathbf{b}||\mathbf{a}-\mathbf{b}|)^2$ összefüggést vegyük figyelembe. $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{7}}$.

63. a) Négyzetre emelve mindkét oldalt, $\mathbf{a}^2+2\mathbf{ab}+\mathbf{b}^2=\mathbf{a}^2$; így $\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})\angle = -\dfrac{|\mathbf{b}|}{2|\mathbf{a}|}$.

b) $\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})\angle = 0$.

64. Az $(\mathbf{a}+3\mathbf{b})(7\mathbf{a}-5\mathbf{b}) = 0$ és $(\mathbf{a}-4\mathbf{b})(7\mathbf{a}-2\mathbf{b}) = 0$ egyenletekből

$$\mathbf{ab} = \tfrac{1}{16}\left(15\mathbf{b}^2 - 7\mathbf{a}^2\right) \quad \text{és} \quad \mathbf{ab} = \tfrac{1}{30}\left(7\mathbf{a}^2 + 8\mathbf{b}^2\right) .$$

Ebből az egyenletrendszerből $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2$, majd ezt felhasználva $\mathbf{ab} = \frac{1}{2}\mathbf{a}^2$ és $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ következik. Ha $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{0}$, akkor szögük tetszőleges lehet, ha pedig $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, akkor $\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})\angle = \frac{1}{2}$.

65. A **D 4.13** definíciót és a **T 4.16** tételt alkalmazva $t = 40$ adódik.

66. A **T 4.17** tétel és feltevésünk alapján

$$\left|\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}\mathbf{a}\right| = \left|\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\mathbf{b}\right| \qquad (\mathbf{a} \neq \mathbf{0}\,,\ \mathbf{b} \neq \mathbf{0}) .$$

Ez $\mathbf{ba} = \mathbf{ab}$ miatt ekvivalens azzal, hogy $|\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|$, vagy $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ merőlegesek egymásra.

67. A **T 4.17** tétel alapján ezek az X pontok annak a síknak a pontjai, amely merőleges az $\mathbf{e}$ vektorra és az O ponttól k távolságra halad, mégpedig úgy, hogy metszi az O-ból induló és E-n átmenő félegyenest. (Más ilyen tulajdonságú pont nincs (L. ábra).)

68. A **D 4.13** definíciót és a **T 4.14**, **T 4.15** tételeket alkalmazzuk.

a) $\frac{7}{3\sqrt{19}}$. b) $-\frac{5}{\sqrt{14}\sqrt{38}}$. c) 0.

69. A **T 4.14** és a **T 4.16** tételeket alkalmazzuk. $z = -18$.

70. a) Az $\dfrac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \cos\alpha$ képletbe helyettesítve: $\dfrac{2t}{\sqrt{t^2+2}\sqrt{6}} = \dfrac{1}{2}$ egyenlethez jutunk; ebből $t = \sqrt{\frac{6}{5}}$.

b) $t = 0$. c) Nincs ilyen t .

71. Mivel $\mathbf{a}$ és $\mathbf{x}$ kollineáris, ezért valamely valós t-re $\mathbf{x} = [2t, t, -t]$. Az $\mathbf{ax} = 3$ egyenletből $t = \frac{1}{2}$, ezért $\mathbf{x} = [1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$.

72. Legyen $\mathbf{e} = [e_1, e_2, e_3]$; ekkor $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$. A **D 4.13**, **T 4.14** és **T 4.15** alkalmazásával, az $\mathbf{ae}$ és $\mathbf{be}$ szorzatokból két újabb egyenletet kapunk az e_1, e_2, e_3 ismeretlenekre: $e_1 - e_3 = 1$ és $e_1 + e_2 - e_3 = 1$.
Két ilyen egységvektor van: $[1, 0, 0]$ és $[0, 0, -1]$.

73. Jelöljük a két meghatározandó vektort $\mathbf{a}_p$-vel, illetve $\mathbf{a}_m$-mel, és alkalmazzuk a **T 4.17** tételt!

$$\mathbf{a}_p = \left|\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}\mathbf{a}\right| \cdot \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = [2, -1, 2], \qquad \mathbf{a}_m = \mathbf{a} - \mathbf{a}_p = [1, 3, 1].$$

74. $\mathbf{ac} = 0$. A vetületvektorok összege: $\frac{5}{9}[1, 2, 2]$.

75. a) Téglalap két szomszédos oldalvektora.
b) Rombusz két szomszédos oldalvektora.
c) Egyiknek sem lehet két szomszédos oldalvektora.

76. $\mathbf{x} = [-4, 2, -4]$. **77.** $\mathbf{x} = [0, \sqrt{2}, \sqrt{2}]$. **78.** $\mathbf{x} = [-3, 3, 3]$.

79. Legyen $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]$. Az $\mathbf{x}$ egységvektor, ezért

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1. \tag{1}$$

A feltevés miatt $(\mathbf{a}, \mathbf{x})_\angle = (\mathbf{b}, \mathbf{x})_\angle = (\mathbf{c}, \mathbf{x})_\angle = \alpha$, ezért

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{ax}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{bx}}{|\mathbf{b}|} = \frac{\mathbf{cx}}{|\mathbf{c}|}.$$

Ezekből az

$$7x_1 - x_2 = 3x_1 - 4x_2 + 5x_3, \tag{2}$$

$$7x_1 - x_2 = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \tag{3}$$

egyenleteket kapjuk. Az (1), (2), (3) egyenletrendszer megoldásával adódik, hogy két ilyen egységvektor van: $\frac{1}{5\sqrt{3}}[7, -1, 5]$ és $-\frac{1}{5\sqrt{3}}[7, -1, 5]$.
A szögek koszinuszai: $\sqrt{\frac{2}{3}}$ és $-\sqrt{\frac{2}{3}}$.

80. Az

$$\left|\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\mathbf{v}\right| = 1, \quad \left|\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}\mathbf{v}\right| = \sqrt{2}$$

egyenletrendszerből a $\mathbf{v}$ vektorra a következő megoldásokat kapjuk

$$[3, -1], \ [-3, 1], \ [13, -11], \ [-13, 11].$$

81. Az előző feladat megoldásához hasonlóan, a $\mathbf{v}$ vektorra a következő nyolc megoldást kapjuk: $[\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2]$, $[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -2]$, $[\frac{9}{2}, -\frac{5}{2}, -4]$, $[-\frac{9}{2}, \frac{5}{2}, 4]$, $[-6, -2, 7]$, $[6, 2, -7]$, $[3, 5, -1]$, $[-3, -5, 1]$.

82. Négy ilyen $\mathbf{e}$ vektor van: $[0, 1, 0]$, $\left[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, $[0, -1, 0]$, $\left[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right]$.

83. Két ilyen vektor van: $[3, 1, 0]$ és $[-3, -1, 0]$.

84. Az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{AD}$ vektorok lineáris kombinációjaként állítsuk elő a másik három élvektort: $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. Ezeket a feladatbeli kifejezés jobb oldalába helyettesítve, majd elvégezve a szorzást és az összevonást, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ adódik.

85. Ha pl. az AB és CD, illetve az AD és BC merőleges élpárok, akkor $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ és $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. Ekkor az előző feladat alapján $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$, azaz $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{DB}$ is merőleges élpár.

86. Az O középpontú kör egy átmérőjének végpontjai A és B. Legyen P a kör (A-tól és B-től különböző) tetszőleges pontja. Ha $\overrightarrow{OB} = \mathbf{a}$ és $\overrightarrow{OP} = \mathbf{b}$, akkor $\overrightarrow{PB} = \mathbf{a}-\mathbf{b}$ és $\overrightarrow{AP} = \mathbf{a}+\mathbf{b}$. Mivel $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, ezért $(\mathbf{a}-\mathbf{b})(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{a}^2-\mathbf{b}^2 = 0$.

87. Használjuk az ábra jelöléseit. A négy testátló-vektor: $\overrightarrow{AC_1} = \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\overrightarrow{BD_1} = \mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{a}$, $\overrightarrow{CA_1} = \mathbf{c}-\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $\overrightarrow{DB_1} = \mathbf{a}+\mathbf{c}-\mathbf{b}$. Ezekből: $(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})^2 + (\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{a})^2 + (\mathbf{c}-\mathbf{a}-\mathbf{b})^2 + (\mathbf{a}+\mathbf{c}-\mathbf{b})^2 = 4(\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2)$.

88. A **T 4.8** tétel szerint a $\mathbf{v}$ vektor előállítható valamely k_1, k_2, k_3 számokkal $\mathbf{v} = k_1\mathbf{a}+k_2\mathbf{b}+k_3\mathbf{c}$ alakban. Az egyenlet mindkét oldalát (skalárisan) megszorozva $\mathbf{v}$-vel, majd figyelembe véve a feltételekből következő $\mathbf{av} = \mathbf{bv} = \mathbf{cv} = 0$ egyenlőségeket, $\mathbf{v}^2 = 0$ adódik, ami csak úgy teljesülhet, hogy $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

89. Jelölje O az $ABCD$ tetraéder köré írt gömb középpontját, r a gömb sugarát; továbbá legyen $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$ és $\overrightarrow{OD} = \mathbf{d}$. Nyilvánvaló, hogy $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = |\mathbf{d}| = r$.

I. „csak akkor”: Tegyük fel, hogy a tetraéder magasságvonalai egy közös M ponton haladnak át. Kimutatjuk, hogy a szemközti élvektorok merőlegesek egymásra. Az M magasságpont rajta van mind a négy magasságvonalon, ezért

(1) $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{CB}$ és $\overrightarrow{DM}\perp\overrightarrow{CB}$,

(2) $\overrightarrow{BM}\perp\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{DM}\perp\overrightarrow{AC}$,

(3) $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{DC}$ és $\overrightarrow{BM}\perp\overrightarrow{DC}$.

Az $\overrightarrow{OM}$ vektort $\mathbf{m}$-mel jelölve, az (1) összefüggésekből következik, hogy

(4) $(\mathbf{m}-\mathbf{a})(\mathbf{b}-\mathbf{c}) = 0$ és $(\mathbf{m}-\mathbf{d})(\mathbf{b}-\mathbf{c}) = 0$.

II. „akkor”: Kimutatjuk, hogy ha a szemközti élvektorok merőlegesek egymásra, akkor a magasságvonalak egy közös M ponton haladnak át, melyre

$$\mathbf{m} = \overrightarrow{OM} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}).$$

Ehhez azt kell belátni, hogy az $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{CM}$, illetve a $\overrightarrow{DM}$ vektor merőleges rendre a BCD, ACD, ABD, illetve az ABC síkra. Az $\overrightarrow{AM} = \mathbf{m}-\mathbf{a}$ vektor merőleges a BCD síkra, ha merőleges annak két, nem párhuzamos vektorára. Ez teljesül, mert a $\overrightarrow{CB} = \mathbf{b}-\mathbf{c}$ és $\overrightarrow{DB} = \mathbf{b}-\mathbf{d}$ vektorra

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CB} = (\mathbf{m}-\mathbf{a})(\mathbf{b}-\mathbf{c}) = \tfrac{1}{2}\left[\mathbf{b}^2-\mathbf{c}^2+(\mathbf{d}-\mathbf{a})(\mathbf{b}-\mathbf{c})\right] = 0 \quad \text{és}$$

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DB} = (\mathbf{m}-\mathbf{a})(\mathbf{b}-\mathbf{d}) = \tfrac{1}{2}\left[\mathbf{b}^2-\mathbf{d}^2+(\mathbf{b}-\mathbf{d})(\mathbf{a}-\mathbf{c})\right] = 0,$$

hiszen $|\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = |\mathbf{d}|$ és $\overrightarrow{AD} = (\mathbf{d}-\mathbf{a})\perp(\mathbf{b}-\mathbf{c}) = \overrightarrow{CB}$, illetve $\overrightarrow{CA} = (\mathbf{a}-\mathbf{c})\perp(\mathbf{b}-\mathbf{d}) = \overrightarrow{DB}$. Ezekből következik, hogy az M pont rajta van az A csúcshoz tartozó magasságvonalon. Ugyanígy igazolható, hogy az M pont illeszkedik a másik három magasságvonalra is.

Megjegyzés: A **31.** feladat szerint, az O pontból a tetraéder S súlypontjába mutató vektor $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{4}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d})$. Másrészt az előbb beláttuk, hogy ha az M magasságpont létezik, akkor $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d})$. Ezért igaz a következő: Ha egy tetraédernek létezik magasságpontja, akkor a tetraéder köré írt gömb O középpontja, valamint a tetraéder S súlypontja és M magasságpontja egy egyenesen van, és az OM szakasz felezőpontja az S pont.

90.

$\times$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{i}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$
$\mathbf{j}$	$\mathbf{0}$	$-\mathbf{k}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{i}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}$	$\mathbf{0}$

$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}$, $\mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i}$, $\mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}$, ami könnyen megjegyezhető, mert mindhárom egyenlőségben ciklikusan egymás után szerepelnek az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ vektorok. A fordított sorrendű szorzatok: $\mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k}$, $\mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i}$, $\mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j}$.

91. A **D 4.18** definíció és a **T 4.23** tétel alapján:
a) $-2(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$. b) $-3(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$.
c) $6(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$. d) $2(\mathbf{a}\times\mathbf{c})+2(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$.
e) $\mathbf{0}$. f) $16(\mathbf{a}\times\mathbf{b})-10(\mathbf{a}\times\mathbf{c})+4(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$.

92. Az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ alapvektorok definíciója, ill. a **D 4.12** és **D 4.18** definíciók alapján:
a) 1. b) 36. c) 49.

93. A **T 4.23** tétel alapján: $(2\mathbf{a}+3\mathbf{b})\times(4\mathbf{a}-2\mathbf{b})=-16(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$, ezért $T'=16|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=16T$.

94. A **T 4.23** tétel alapján $\mathbf{a}\times\mathbf{c}=\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ felírható $(\mathbf{a}-\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{0}$ alakban is, ami nemcsak az $\mathbf{a}=\mathbf{b}$ esetben teljesül (hanem minden olyan $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$-re, amelyre $\mathbf{a}-\mathbf{b}=k\mathbf{c}$, így a felírt egyenlőségből általában nem következik hogy $\mathbf{a}=\mathbf{b}$.

95. A feltevésből $\mathbf{c}=-(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ következik. Ezt helyettesítsük a $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ és $\mathbf{c}\times\mathbf{a}$ kifejezésekbe. A **T 4.23** és **T 4.20** tételt alkalmazva kapjuk, hogy $\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}\times\mathbf{a}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.

96. A **T 4.20** tétel alapján a $\mathbf{v}\times\mathbf{a}=\mathbf{0}$ és $\mathbf{v}\times\mathbf{b}=\mathbf{0}$ feltevésekből következik, hogy $\mathbf{v}$ az $\mathbf{a}$-val is és a $\mathbf{b}$-vel is egyező állású. Ebből viszont $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$ esetén az adódik, hogy $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ kollineárisak. Ez ellentmond feltevésünknek.

97. A **T 4.23** tételből és az $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{b}\times\mathbf{c}$, illetve $\mathbf{b}\times\mathbf{b}=\mathbf{0}$ egyenlőségekből $\mathbf{0}=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})-(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{c})\times\mathbf{b}=(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})\times\mathbf{b}$ következik. Az előbbihez hasonlóan, a $\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\mathbf{c}\times\mathbf{a}$, illetve a $\mathbf{c}\times\mathbf{a}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ egyenlőségből $(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})\times\mathbf{c}=\mathbf{0}$, illetve $(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})\times\mathbf{a}=\mathbf{0}$ adódik. Az előbbi feladat szerint ezek egyidejűleg csak akkor állhatnak fenn, ha $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{0}$.

98. Az első egyenletből kivonva a másodikat, majd zérusra redukálva a kapott egyenleteket, a **T 4.23** tétel alapján $(\mathbf{a}-\mathbf{d})\times(\mathbf{b}-\mathbf{c})=\mathbf{0}$ adódik. A **T 4.20** tétel alapján ez azt jelenti, hogy $\mathbf{a}-\mathbf{d}$ és $\mathbf{b}-\mathbf{c}$ egyállásúak.

99. Figyelembe véve a **T 4.23** tételt és azt, hogy $\mathbf{b}\times\mathbf{b}=\mathbf{0}$, az $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})+(\mathbf{c}\times\mathbf{a})=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})-(\mathbf{a}\times\mathbf{c})=\mathbf{a}\times(\mathbf{b}-\mathbf{c})$ és a $\mathbf{b}\times\mathbf{c}=(\mathbf{b}\times\mathbf{c})-(\mathbf{b}\times\mathbf{b})=\mathbf{b}\times(\mathbf{c}-\mathbf{b})=-\mathbf{b}\times(\mathbf{b}-\mathbf{c})$ átalakítás után kapjuk, hogy $(\mathbf{a}-\mathbf{b})\times(\mathbf{b}-\mathbf{c})=\mathbf{0}$. Mivel a három vektor kezdőpontja közös, ezért ez utóbbi egyenletből, a **T 4.20** tétel alapján, következik, hogy a vektorok végpontjai egy egyenesen vannak.

100. A **D 4.18** definíció szerint az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektor az $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ vektorra, a $\mathbf{c}$ és $\mathbf{d}$ vektor pedig a $\mathbf{c}\times\mathbf{d}$ vektorra merőleges. Mivel $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}\times\mathbf{d}$ kollineárisak, ezért az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ vektorok mindegyike merőleges az $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ vektorra. Tehát komplanárisak.

101. A szögletes zárójeles kifejezésnél kezdve, kétszer alkalmazzuk a kifejtési tételt (**T 4.22**). A szorzat értéke: $|\mathbf{a}|^4\mathbf{b}$.

102. a) A három darab hármas vektori szorzatra alkalmazzuk a **T 4.22** tételt, és vegyük figyelembe a skaláris szorzás kommutativitását.
b) A **T 4.22** és **T 4.23** tételeket alkalmazzuk.

103. **T 4.22** tétel szerint $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{ac})\mathbf{b}-(\mathbf{ab})\mathbf{c}$. Ugyanakkor $\mathbf{a}(\mathbf{b}-\mathbf{c})=0$, azaz $\mathbf{ab}=\mathbf{ac}$. Mivel $\mathbf{a}$ nem merőleges $\mathbf{b}$-re, ezért $\mathbf{ab}\,(=\mathbf{ac})\neq 0$. Legyen $\mathbf{ab}=k\ (\neq 0)$. Ekkor $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=k(\mathbf{b}-\mathbf{c})$. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ és $\mathbf{b}-\mathbf{c}$ egyállásúak.

104. Mivel $\mathbf{a}$ merőleges $\mathbf{b}$-re és $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|\ (=7)$, ezért $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ lehet egy kocka két élvektora. A harmadik élvektor $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$-vel párhuzamos és hossza $|\mathbf{a}|=7$. A **T 4.21** tétel szerint

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 6 & 2 & -3\\ -3 & 6 & -2\end{vmatrix}=[14,21,42]=7\cdot[2,3,6]\,.$$

Két vektor elégíti ki a feladat feltételeit: $[2,3,6]$ és $[-2,-3,-6]$.

105. Legyen α az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok szöge. A koszinusztétel alapján $\cos\alpha=\frac{7}{8}$, s így $\sin\alpha=\frac{\sqrt{15}}{8}$. Tehát $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=8\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{15}}{8}=6\cdot\sqrt{15}$.

106. $m_a=\dfrac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{11}{5}\sqrt{2}$.

107. Ha felbontjuk az $\mathbf{a}$ vektort egy $\mathbf{e}$-vel párhuzamos $\mathbf{a}_p$ és egy $\mathbf{e}$-re merőleges $\mathbf{a}_m$ vektor összegére, akkor $|\mathbf{a}_m|=|\mathbf{a}|\sin(\mathbf{e},\mathbf{a})\angle=|\mathbf{e}\times\mathbf{a}|$. Mivel $\mathbf{e}\times\mathbf{a}$ merőleges $\mathbf{e}$ és $\mathbf{a}$ síkjára, $(\mathbf{e}\times\mathbf{a})\times\mathbf{e}$ az $\mathbf{e}$ és $\mathbf{a}$ síkjában van és $|(\mathbf{e}\times\mathbf{a})\times\mathbf{e}|=|\mathbf{a}|\sin(\mathbf{e},\mathbf{a})\angle$, ezért $\mathbf{a}_m=(\mathbf{e}\times\mathbf{a})\times\mathbf{e}$. Ez egyébként bizonyítható a **73**. feladat és a kifejtési tétel segítségével is: $\mathbf{a}_m=\mathbf{a}-(\mathbf{ea})\mathbf{e}$ és $(\mathbf{e}\times\mathbf{a})\times\mathbf{e}=-(\mathbf{a}\times\mathbf{e})\times\mathbf{e}=\mathbf{e}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{e})=(\mathbf{ee})\mathbf{a}-(\mathbf{ea})\mathbf{e}=\mathbf{a}-(\mathbf{ea})\mathbf{e}$, tehát $\mathbf{a}_m=(\mathbf{e}\times\mathbf{a})\times\mathbf{e}$. A **73**. feladat számadataival:

$$\mathbf{a}_m=\left(\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}\times\mathbf{a}\right)\times\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}=\frac{1}{|\mathbf{b}|^2}(\mathbf{b}\times\mathbf{a})\times\mathbf{b}=[1,3,1]$$

és

$$\mathbf{a}_p=\mathbf{a}-\mathbf{a}_m=[2,-1,1].$$

108. Legyen $\mathbf{x}$ az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektorok síkjában lévő, $\mathbf{y}$ pedig erre a síkra merőleges összetevő. (L. ábra.) Az $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ vektorral egyező állású egyik egységvektor:

$$\mathbf{e}=\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}=\frac{1}{\sqrt{3}}[1,-1,1]\,.$$

A **T 4.15** tétel és a **D 4.18** definíció alapján a síkra merőleges összetevő: $\mathbf{y}=(\mathbf{e}\cdot\mathbf{c})\mathbf{e}=\frac{1}{3}[1,-1,1]$. A síkban lévő összetevő: $\mathbf{x}=\mathbf{c}-\mathbf{y}=\frac{1}{3}[2,7,5]$.

109. A **T 4.19** szerint $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=3\sqrt{6}$. Ennek megoldásai: $t=0$ és $t=-3$.

110. A négyszög területe $\frac{47}{2}$ egység.

111. Állítsuk elő a $\mathbf{v}$ vektort $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ lineáris kombinációjaként. A $\mathbf{v} = k_1\mathbf{a} + k_2\mathbf{b}$ előállításban a **T 4.9** tétel alapján: $k_1 = 2$, $k_2 = 3$. A terület $|2\mathbf{a} \times 3\mathbf{b}| = 6|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 18$ egység.

112. Az $\mathbf{m}$ magasságvektor az **ábra** szerinti $\mathbf{d} = (\mathbf{a} - \mathbf{c}) \times (\mathbf{b} - \mathbf{c})$ vektorral egyező állású. A $\mathbf{d}$-vel (tehát $\mathbf{m}$-mel is) egyező állású (egyik) egységvektor: $\mathbf{d}/|\mathbf{d}| = \frac{1}{\sqrt{3}}[1, 1, 1]$. A magasság: $|\mathbf{m}| = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

113. Az $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \mathbf{ab}$ feltétel ekvivalens azzal, hogy a két vektor szöge 45°.

114. a) $\mathbf{ab}(\mathbf{c} + \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{c} + \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) = \mathbf{abc}$.

b) $\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}\dfrac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}\dfrac{\mathbf{c}+\mathbf{a}}{2} = \dfrac{1}{8}\Big((\mathbf{a}+\mathbf{b}) \times (\mathbf{b}+\mathbf{c})\Big)(\mathbf{c}+\mathbf{a}) = \dfrac{1}{4}\mathbf{abc}$.

115. $\Big((2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) \times (3\mathbf{b} - 4\mathbf{c})\Big)(2\mathbf{a} + 5\mathbf{c}) = 6\mathbf{abc}$. Mivel $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ nem komplanárisak, ezért a **T 4.25** tétel szerint az adott vektorok sem komplanárisak.

116. Az egyenlet mindkét oldalát skalárisan $\mathbf{c}$-vel szorozva $(\mathbf{b} \times \mathbf{c})\mathbf{c} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a})\mathbf{c} = \mathbf{0}$ miatt $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{0}$ adódik. A **T 4.25** tétel alapján ez azt jelenti, hogy $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ komplanárisak.

117. Az állítás helyessége a vektori, illetve a skaláris szorzat definíciója alapján belátható. Egyenlőség pontosan akkor van, ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ páronként merőlegesek.

118. $(\mathbf{r} \times \mathbf{s})\mathbf{t} = 27\mathbf{abc}$. Ezért $V' = 27V$.

119. A **T 4.27** tétel alapján a vegyes szorzat

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ \alpha & 2 & -1 \end{vmatrix} = -7\alpha - 13\,.$$

A **T 4.25** tétel szerint a térfogat: $|\mathbf{abc}| = |-7\alpha - 13| = 10$. Ebből α lehetséges értékei: $-\frac{23}{7}$ és $-\frac{3}{7}$.

120. Az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ vektorrendszer akkor és csak akkor lineárisan függő, ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ komplanárisak. (L. **T 4.10** és **T 4.7**) Ennek megfelelően a **T 4.25** és **T 4.27** tételt alkalmazzuk.

a) Mivel az $\mathbf{abc}$ vegyes szorzat csak az $\alpha = -\frac{7}{4}$ értéknél zérus, ezért az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ vektorrendszer lineárisan függő, ha $\alpha = -\frac{7}{4}$.

b) Minden α számra lineárisan függő, mert $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

c) Minden α-ra lineárisan független.

d) Minden α-ra lineárisan független.

e) Minden α-ra lineárisan függő.

f) Ha α értéke 3, vagy -3, akkor lineárisan függő a vektorrendszer. Minden más esetben lineárisan független.

121. A **117.** feladat vagy a **T 4.27** tétel szerint: $\mathbf{abc} = 24$.

122. Az A csúcsból kiinduló három él: $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$. A térfogat: $V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}\right| = 8$.

123. Mivel $\overrightarrow{AD}$ és $\mathbf{d}$ egyállású vektorok, ezért valamely k számmal $\overrightarrow{AD} = k\mathbf{d} = [-k, 2k, k]$ teljesül. Az $\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}\right| = 8$ egyenletből $|12k| = 48$ következik. A feltételt két vektor elégíti ki: $[-4, 8, 4]$ és $[4, -8, -4]$.

124. A feltételt két vektor elégíti ki: $[3, 1, -2]$ és $[-3, -1, 2]$. A magasság $\dfrac{4}{\sqrt{14}}$.

125. $\mathbf{uvw} = \Big[(u_1\mathbf{a} + u_2\mathbf{b} + u_3\mathbf{c}) \times (v_1\mathbf{a} + v_2\mathbf{b} + v_3\mathbf{c})\Big](w_1\mathbf{a} + w_2\mathbf{b} + w_3\mathbf{c}) =.$

$$= \mathbf{abc} \cdot \Big[u_1(v_2w_3 - v_3w_2) - u_2(v_1w_3 - v_3w_1) + u_3(v_1w_2 - v_2w_1)\Big]$$

126. Az előző feladat szerint

$$\mathbf{abc} = \mathbf{uvw}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{uvw} = \mathbf{abc}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Szorozzuk össze ezt a két egyenletet, majd osszuk az így nyert egyenlet mindkét oldalát $(\mathbf{abc})(\mathbf{uvw})$-vel. (Ezt megtehetjük, mert mind a két vektorrendszer lineárisan független, így az $\mathbf{abc}$ és $\mathbf{uvw}$ vegyes szorzatok egyike sem nulla.) Osztás után a bizonyítandó egyenlőséget kapjuk.