5. fejezet

Analitikus térgeometria

Kezdő és végpontjuk koordinátáival adott vektorok

D 5.1 *A koordináta-rendszer O kezdőpontjából a P pontba mutató $\overrightarrow{OP}$ kötött vektort a P pont* **helyvektor***ának nevezzük.*

T 5.2 *A tér tetszőleges P pontjának derékszögű koordinátái az $\overrightarrow{OP}$ helyvektor koordinátáival megegyeznek. Azaz, ha $P(x, y, z)$, akkor $\overrightarrow{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ $(= [x, y, z])$.*

T 5.3 *Ha $P_1(x_1, y_1, z_1)$ és $P_2(x_2, y_2, z_2)$ koordinátáikkal adott pontok, akkor*

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}.$$

Rövidebben írva: $\overrightarrow{P_1P_2} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1]$. A P_1 és P_2 pontok $d(P_1, P_2)$ távolsága pedig a $\overrightarrow{P_1P_2}$ vektor hosszával egyenlő: $d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Feladatok

1. Számítsuk ki az $A(1, -2, -3)$ pontból a $B(2, -3, 0)$, $C(3, 1, -9)$, illetve $D(-1, 1, -12)$ pontba mutató $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{AD}$ vektorok koordinátáit!

2. Számítsuk ki az $A(4, -2, -4)$, $B(-4, 12, 6)$, $C(12, -4, 3)$, $D(5, 7, 11)$ pontoknak az origótól mért távolságát!

3. Döntsük el, hogy az alábbiakban megadott ABC, DEF és GHK háromszögek között van-e egyenlő szárú: $A(5, 1, 0)$, $B(2, -1, 3)$, $C(-2, 3, 1)$; $D(3, -1, 2)$, $E(0, -4, 2)$, $F(-3, 2, 1)$; $G(3, -3, 5)$, $H(2, -2, 5)$, $K(2, -3, 6)$.

4.$^\triangleright$ Adjunk meg az x tengelyen olyan pontot, mely az $A(-3, 4, 8)$ ponttól 12 egység távolságra van!

5.$^\triangleright$ Adjunk meg a z tengelyen olyan pontot, mely egyenlő távolságra van az $A(1, -3, 7)$ és $B(5, 7, -5)$ pontoktól!

6. Lehet-e $A(3, -1, 6)$, $B(-1, 7, -2)$ és $C(3, 1, 8)$ egy téglalap három csúcsa?

7.$^\triangleright$ Van-e tompaszöge annak a háromszögnek, amelynek csúcsai: $A(4, -1, 4)$, $B(0, 7, -4)$, $C(3, 1, -2)$?

8.$^\triangleright$ Számítsuk ki a következő feladatokban adott ABC háromszög területét, az AB oldalhoz tartozó magasságot és az A csúcsnál lévő szög tangensét!

a) $A(5,4,1)$, $B(1,6,2)$, $C(3,3,2)$.
b) $A(5,7,1)$, $B(3,6,-4)$, $C(2,8,-1)$.
c) $A(6,1,5)$, $B(4,1,4)$, $C(3,0,3)$.

9. ▷ Az ABC háromszög csúcsai: $A(3,2,5)$, $B(3,2,-5)$, $C(-5,0,3)$. Számítsuk ki a háromszög súlyvonalainak hosszát!

10. • Határozzuk meg annak a P pontnak a koordinátáit, amely az $A(a_1,a_2,a_3)$ és $B(b_1,b_2,b_3)$ pontokat összekötő szakaszt $AP : PB = m : n$ arányban osztja!

11. Számítsuk ki az $A(4,-1,2)$ és $B(-2,2,5)$ pontok által meghatározott szakasz harmadoló pontjainak koordinátáit!

12. A következő feladatokban a megadott A pontot tükrözzük a B ponton. Számítsuk ki a tükörkép koordinátáit!
a) $A(3,4,-1)$, $B(0,0,0)$. b) $A(0,0,0)$, $B(3,4,-1)$.
c) $A(-1,-2,-5)$, $B(2,-1,3)$. d) $A(5,-1,2)$, $B(0,-1,2)$.

13. ▷ Adva van az 5 egység területű ABC háromszög $A(2,-1,3)$ és $B(5,2,4)$ csúcspontja. Számítsuk ki a C csúcs koordinátáit, ha a C pont
a) az x tengelyen; b) a z tengelyen
fekszik.

14. ▷ Adott az $A(3,-1,0)$ és a $B(2,2,1)$ pont. Ha a $C(0,y,0)$ pont végigfut az y tengelyen, akkor az ABC háromszög területe milyen értékek között változik?

15. ▷ Egy paralelogramma három csúcsa: $A(3,-1,2)$, $B(1,2,-4)$ és $C(-1,1,2)$. Számítsuk ki a negyedik csúcs koordinátáit!

16. ▷ A következő feladatokban adott négy-négy pont egy síkban van-e?
a) $A(2,-1,4)$, $B(-1,0,3)$, $C(3,-1,0)$, $D(1,1,2)$.
b) $A(1,2,3)$, $B(3,1,6)$, $C(0,3,4)$, $D(1,3,8)$.
c) $A(1,-9,-12)$, $B(2,-7,-13)$, $C(0,-11,-11)$, $D(3,-5,-14)$.

17. ▷ Egy tetraéder csúcspontjai: $A(-2,0,2)$, $B(2,0,-1)$, $C(1,2,-1)$, $D(2,1,-1)$. Számítsuk ki a tetraéder térfogatát, felszínét és az ABC laphoz tartozó magasságát!

18. ▷ Egy tetraéder csúcsai: $A(2,-4,3)$, $B(1,-4,4)$, $C(-3,2,0)$ és $D(2,0,u)$. Hogyan kell megválasztani a D pont u-val jelölt koordinátáját, hogy a tetraéder térfogata 4 egység legyen?

19. ▷ Az $A(1,0,u)$, $B(2,-1,3)$, $C(2,0,v)$, $D(1,1,-1)$ pontnégyes milyen u és v értékekre lesz egysíkú?

20. ▷ Az $ABCD$ tetraéder három csúcspontja: $A(3,1,0)$, $B(2,1,1)$ és $C(-1,-1,1)$. Melyek azok $D(x,y,z)$ pontok, amelyekkel a tetraéder térfogata 10 egység?

A sík egyenletei

D 5.4 *Az adott P_0 ponton áthaladó $\mathcal{S}$ sík* **normálvektor***ának nevezünk minden olyan* $\mathbf{n}$
($\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$) *vektort, amely merőleges az $\mathcal{S}$ síkra.*

T 5.5 *Ha egy sík átmegy a $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponton és merőleges a zérusvektortól különböző*

$\mathbf{n} = [A, B, C]$ *vektorra, akkor egyenlete:*

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0\,.$$

T 5.6 *Minden sík egyenlete*

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

alakú, és minden ilyen egyenlet sík egyenlete, ha A, B és C közül legalább az egyik zérustól különböző.

Feladatok

21. A következő feladatokban adva van egy A pont és egy $\mathbf{n}$ vektor. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amelynek egyik pontja az A pont és normálvektora az $\mathbf{n}$ vektor!
a) $A(2, 1, 4)$, $\mathbf{n} = [3, 2, -4]$. b) $A(0, 0, 0)$, $\mathbf{n} = [1, 2, 4]$.
c) $A(7, 2, -2)$, $\mathbf{n} = [2, 0, 3]$. d) $A(3, 2, 0)$, $\mathbf{n} = [0, -2, 1]$.
e) $A(0, 0, 0)$, $\mathbf{n} = [1, 0, 0]$. f) $A(0, 0, 0)$, $\mathbf{n} = [0, 1, 0]$.
g) $A(0, 0, 0)$, $\mathbf{n} = [0, 0, 1]$. h) $A(-1, 2, 0)$, $\mathbf{n} = [0, 3, 0]$.

22.▷ Vizsgáljuk meg, hogy a három pont egy egyenesbe esik-e; ha nem, akkor írjuk fel a megadott pontokon áthaladó sík egyenletét!
a) $P(0, -1, 2)$, $Q(2, -1, 1)$, $R(4, 3, -2)$.
b) $P(1, 0, 0)$, $Q(0, 1, 0)$, $R(0, 0, 1)$.
c) $P(-3, 0, 4)$, $Q(4, 1, 2)$, $R(0, 0, 0)$.
d) $P(4, 0, -1)$, $Q(5, 0, 2)$, $R(-2, 0, 0)$.
e) $P(-2, 3, 1)$, $Q(0, 5, 2)$, $R(-4, 1, 0)$.

23.• Határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, amely átmegy az $A(1, 5, 2)$ ponton és párhuzamos a $7x - y + 3z + 2 = 0$ egyenletű síkkal!

24. Határozzuk meg az $x + 2y - 3z + 6 = 0$ egyenletű síknak a koordinátatengelyekkel alkotott metszéspontjait!

25. Igazoljuk, hogy a $2x + y - z - 2 = 0$, $x - 3y + z + 1 = 0$, $x + y + z - 3 = 0$ egyenletű síkoknak egyetlen közös pontjuk van. Ezen a közös ponton át fektessünk olyan síkot, amely párhuzamos az $x + y + 2z = 0$ egyenletű síkkal!

26. Mutassuk ki, hogy az $x - y - z = 0$, $3x - y - z + 2 = 0$ és $4x - y - z + 4 = 0$ egyenletű síkoknak nincs közös pontjuk!

27.• Normálvektorok segítségével mutassuk ki, hogy az $x+y+z = 6$, $2x-y+z = 3$ és $x + 2y - z = 2$ egyenletű síkoknak pontosan egy közös pontjuk van.

28. Számítsuk ki a következő síkok által határolt tetraéder térfogatát:

$$x + y + z - 1 = 0, \qquad x - y - 1 = 0, \qquad x - z - 1 = 0, \qquad z - 2 = 0.$$

29. Mi az egyenlete annak a síknak, amely áthalad az $A(-2, 3, 1)$ és $B(4, 2, -1)$ pontokon és merőleges a $3x - y + z - 3 = 0$ egyenletű síkra?

30. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely merőleges a $-x+2y+3z-2 = 0$ és $2x - y - z + 1 = 0$ egyenletű síkokra és átmegy a $P(4, 1, 2)$ ponton!

31. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely az $A(1, -3, 0)$ és $B(3, 7, -4)$ pontokat összekötő szakaszt felezi és merőleges rá!

32.▷ Adott az $A(1, 3, 5)$, $B(2, 5, 3)$ és $C(4, 7, 5)$ pont. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely áthalad az A ponton és merőleges az ABC háromszög A csúcsánál lévő a) belső szög; b) külső szög felező egyenesére!

33.▷ Egy háromszög három csúcsa: $A(1, 1, 1)$, $B(5, 1, 4)$ és $C(3, 3, 2)$. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely áthalad az A ponton és merőleges az A csúcshoz tartozó magasságvonalra!

Egyenesekre és síkokra vonatkozó helyzetgeometriai feladatok

D 5.7 *Az adott P_0 ponton áthaladó e egyenes* **irányvektor***ának nevezünk minden olyan* $\mathbf{v}$ $(\mathbf{v} \neq \mathbf{0})$ *vektort, amely párhuzamos az e egyenessel.*

T 5.8 *Ha a P_0 pont egy egyenes egyik pontja, irányvektora pedig $\mathbf{v} = [a, b, c]$, akkor az egyenes paraméteres egyenletrendszere*

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct\,, \end{aligned}$$

ahol a t paraméter az összes valós számon végigfut.

T 5.9 *Ha a $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponton átmenő és $\mathbf{v} = [a, b, c]$ irányvektorú egyenes egyik tengelysíkkal sem párhuzamos ($a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$), akkor egyenletrendszere*

(1)
$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}\,.$$

Ha a, b, c közül az egyik (pl. c) 0, de a másik kettő nem, akkor az egyenes egyenletrendszere

(2)
$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}\,, \quad z = z_0\,.$$

Ha a, b, c közül kettő 0 (pl. b és c) egy pedig nem, akkor az egyenes egyenletrendszere:

(3)
$$y = y_0\,, \quad z = z_0\,.$$

Az (1), (2), és (3) egyenletrendszereket az egyenes paramétermentes egyenletrendszereinek nevezzük. Megállapodunk abban, hogy az „egyenes egyenletrendszere” kifejezésen (jelző nélkül) mindig ezt a paramétermentes egyenletrendszert értjük.

Feladatok

34.▷ A következő három egyenes közül kettő paraméteres, egy pedig paramétermentes egyenletrendszerrel van megadva:

$$e: \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}, \quad f: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 4 \\ z = 1 + 2t \end{cases}, \quad g: \frac{2-x}{3} = y - 1 = \frac{5-z}{2}.$$

Határozzuk meg mindhárom egyenes irányvektorát és döntsük el, hogy az $A(2,1,5)$ és $B(-1,4,7)$ pontok közül melyik van rajta az egyes egyeneseken!

35. Írjuk fel a következő, paraméteres egyenletrendszerrel megadott egyenesek paramétermentes egyenletrendszerét:

$$e: \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -t \\ z = 1 - t \end{cases}, \quad f: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2 \\ z = -1 + 3t \end{cases}, \quad g: \begin{cases} x = t - 5 \\ y = 3 \\ z = 4\,. \end{cases}$$

36. Írjuk fel a következő, paramétermentes egyenletrendszerrel megadott egyeneseknek azt a paraméteres egyenletrendszerét, amelynél a $t = 0$ paraméterértékhez a megadott x_0, illetve y_0 koordinátájú P_0 pont tartozik!

a) $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+1}{5} = \dfrac{z}{4}$; $x_0 = 16$. b) $x = 3$, $\dfrac{y-1}{2} = z$; $y_0 = 5$.

c) $y = 4$, $z = -3$; $x_0 = 7$.

37.• A következő feladatokban egy-egy egyenest különböző meghatározó adataival adtunk meg. Írjuk fel az egyenesek paraméteres és paramétermentes egyenletrendszereit!

a) Átmegy az $A(-2,5,1)$ ponton, és párhuzamos az $\mathbf{a} = [-1,2,3]$ vektorral.

b) Átmegy a $P(3,1,2)$ és a $Q(-1,1,3)$ ponton.

c) Párhuzamos a $\mathbf{k} = [0,0,1]$ vektorral, és átmegy az $A(5,1,4)$ ponton.

d) Merőleges az $\mathbf{a} = [-2,3,1]$ és a $\mathbf{b} = [2,0,1]$ vektorra, és átmegy az $A(6,-3,4)$ ponton.

e) Párhuzamos a $3x + y - z + 1 = 0$ és az $x + y + z = 0$ egyenletű síkkal, és metszi az yz tengelysíkot a $P(0,4,1)$ pontban.

38. A következő feladatokban szereplő egyenesek, illetve síkok az α paraméter mely értékénél (értékeinél) elégítik ki a leírt követelményt?

a) Az $\dfrac{x+2}{2} = -\dfrac{y}{3} = \dfrac{z-1}{4}$ és az $\dfrac{x-3}{\alpha} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z-7}{2}$ egyenletrendszerű egyenesek merőlegesek egymásra.

b) Az $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z}{\alpha}$ egyenletrendszerű egyenes és az $x + 3y - 2\alpha z = 0$ egyenletű sík párhuzamos egymással.

c) Az $x = 1 + \alpha t$, $y = -2t$, $z = 1$ egyenletrendszerű egyenes metszi a $2x + \alpha y + z + 1 = 0$ egyenletű síkot.

d) Az $A(2, 4, -1)$ és a $B(\alpha, \alpha + 6, 3)$ ponton átmenő egyenes merőleges a $3x + 5y + \frac{\alpha}{4}z = 0$ egyenletű síkra.

39. Határozzuk meg a $P(-2, 1, 0)$ pontra és az $e:\ x = t + 2,\ y = 3t,\ z = 2$ egyenletrendszerű egyenesre illeszkedő sík egyenletét!

40. Határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $P(3, 0, 1)$ ponton és párhuzamos az alábbi egyenesekkel:

$$e: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + t \\ z = -2t \end{cases} \quad \text{és} \quad f: \ \frac{x+2}{2} = y = -z.$$

41. Írjuk fel az $x - 3y + z + 2 = 0$ és $2x - 5y - z + 4 = 0$ egyenletű síkok metszésvonalának paraméteres egyenletrendszerét, az x, y, z koordináták valamelyikét választva paraméterként. Ennek alapján írjuk fel a metszésvonal paramétermentes egyenletrendszerét is!

42. A következő feladatokban egy-egy sík és egy-egy egyenes van megadva. Határozzuk meg az egyenes és a sík közös pontját, illetve pontjait (ha van ilyen)!

a) $-2x + y + 3z - 3 = 0, \quad \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 - t \\ z = 3 - t\,. \end{cases}$

b) $3x - y - 2z - 2 = 0, \quad \dfrac{x-1}{2} = 2y + 3 = z - 3.$

c) $x + 2y - z + 2 = 0, \quad x + 2 = y - 3 = \frac{z+1}{3}.$

d) $5x - y + 3z - 3 = 0, \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 + 3t \\ z = 1 + t\,. \end{cases}$

43. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely párhuzamos az

$$x - y - 4z - 5 = 0 \ \text{ és az } \ 2x + y - 2z - 4 = 0$$

egyenletű síkok metszésvonalával és átmegy az origón!

44. Egy háromszög csúcsai: $A(3, 6, -7)$, $B(-5, 2, 3)$ és $C(4, -7, -2)$. Adjuk meg a C csúcson átmenő súlyvonal egyenletrendszerét!

45. Egy háromszög csúcsai: $A(3, -1, -1)$, $B(1, 2, -7)$ és $C(-2, 8, -5)$. Írjuk fel a B csúcshoz tartozó (belső) szög szögfelezőjének egyenletrendszerét!

46. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely tartalmazza az

$$\frac{x-5}{3} = y - 1 = z$$

egyenletrendszerű egyenest és merőleges a $2x - y + z = 0$ egyenletű síkra!

47.• Állapítsuk meg az alábbi hat egyenesből alkotható egyenespárok kölcsönös helyzetét! Ha metszőek, adjuk meg a metszéspontjukat! (Első lépésként vizsgáljuk meg az irányvektoraikat!)

$$e:\begin{cases}x=3t+2\\ y=-t\\ z=1-2t\end{cases}\qquad f:\begin{cases}x=1-6t\\ y=-3+2t\\ z=2+4t\end{cases}\qquad g:\begin{cases}y=-1\\ \dfrac{x+5}{2}=\dfrac{z-6}{3}\end{cases}$$

$$h:\begin{cases}x=2t-3\\ y=-1\\ z=3t+9\end{cases}\quad k:\ \frac{8-x}{3}=y+2=\frac{z+3}{2}\quad l:\ \frac{x-5}{6}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+1}{-4}.$$

Határozzuk meg a λ paraméter értékét úgy, hogy az alábbi két egyenes messe egymást:

48.▷ $e:\begin{cases}x=2t-2\\ y=-3t\\ z=4t+1\end{cases}\qquad f:\begin{cases}x=u+3\\ y=4u+1\\ z=2u+\lambda\end{cases},$

49. $e:\ \frac{x-1}{5}=\frac{1-2y}{3}=-z,\quad f:\ \frac{x+3}{\lambda}=\frac{2y-3}{4}=1+z,$

50. $e:\ \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z+\lambda}{3},\qquad f:$ az x, y vagy a z tengely valamelyike.

51. $e:\ \begin{cases}2x+3y-z+\lambda=0\\ 3x-2y+2z-6=0\end{cases}\qquad f:$ az x, y vagy a z tengely valamelyike.

52. Tükrözzük az $A(4,-3,5)$ pontot az $x-y+z-9=0$ egyenletű síkon! Számítsuk ki a tükörkép koordinátáit!

53. Tükrözzük az $A(2,-1,3)$ pontot az $x=3t,\ y=5t-7,\ z=2t+2$ egyenletrendszerű e egyenesen!

54. Tükrözzük az $x=1-2t,\ y=3+2t,\ z=-4-9t$ egyenletrendszerű e egyenest a $3x+y-2z=0$ egyenletű síkon!

55. Jelölje e az $x+y-z+1=0$ és $2x-y+z-1=0$ egyenletű síkok metszésvonalát, f pedig az e-nek az $x+2y-z=0$ egyenletű síkra eső merőleges vetületét. Írjuk fel az f egyenes paraméteres egyenletrendszerét, az x-et választva paraméterként!

56.▷ Mi az egyenlete annak a síknak, amely párhuzamos az $x=2y=3z$ egyenletrendszerű egyenessel, és áthalad az $x+y+z=0$ és a $2x-y+3z=0$ egyenletű síkok metszésvonalán?

57. Egy síkról tudjuk, hogy átmegy a $3x-y+2z+9=0$ és az $x+z+3=0$ egyenletű síkok metszésvonalán. Adjuk meg e sík egyenletét, ha
a) átmegy az $A(4,-2,-3)$ ponton is; b) párhuzamos az x tengellyel;
c) párhuzamos az y tengellyel; d) párhuzamos a z tengellyel;
e) párhuzamos az $\mathbf{a}=[2,-1,2]$ vektorral.

Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét (ha van ilyen egyenes), amely illeszkedik a P pontra és metszi az e és f egyeneseket:

58.▷ $P(0,0,0),\quad e:\ x-4=-\frac{y+7}{3}=\frac{z-2}{2},\quad f:\ \frac{5-x}{3}=\frac{9-y}{5}=z+9,$

59. $P(-4,-5,3),\quad e:\ \begin{cases}x=-1+3t\\ y=-3-2t\\ z=2-t\,.\end{cases},\quad f:\ \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{1-z}{5},$

60. $P(1,1,4)$ $e: \dfrac{x-1}{3} = -y = \dfrac{z-1}{3}$, $f: \begin{cases} x = -2+5t \\ y = 1-3t \\ z = -2+t \end{cases}$,

61. $P(3,-2,1)$ $e: \begin{cases} x = 2+4t \\ y = 1-t \\ z = 1+t \end{cases}$, $f:\ x-5 = 4-4y = 4z-8$.

62.$^{\triangleright}$ Az $\mathcal{S}$: $x+y+z=1$ egyenletű sík és az e : $y=1$, $z=-1$ egyenletrendszerű egyenes K közös pontján át vegyünk fel olyan f egyenest, amely az $\mathcal{S}$ síkban fekszik és merőleges az e egyenesre. Írjuk fel az f paraméteres egyenletrendszerét!

63. Adjuk meg annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely átmegy a $P(-1,2,-3)$ ponton, merőleges az $\mathbf{a} = [6,-2,-3]$ vektorra, és metszi az

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{3-z}{5}$$

egyenletrendszerű egyenest!

64.$^{\triangleright}$ Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét (ha van ilyen egyenes), amely merőleges a $2x+4y-z+5=0$ egyenletű síkra és metszi a következő egyenletrendszerű egyeneseket:

$$e: \frac{x}{2} = -y = z\,, \quad f: \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z}{3}\,.$$

65.$^{\triangleright}$ Igazoljuk, hogy az $x-y+z=0$, $3x-y-z+2=0$, $4x-y-2z+\lambda=0$ egyenletű síkok páronként metszik egymást és a metszésvonalak egyező állásúak! Ezt követően határozzuk meg a λ paraméter értékét úgy, hogy a három síknak a) legyen közös pontja; b) ne legyen közös pontja.

Egyenesekre és síkokra vonatozó távolság- és szögfeladatok

D 5.10 *Az $Ax+By+Cz+D=0$ egyenletű sík* **normálegyenlet***én az*

$$\frac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0$$

egyenletet értjük.

T 5.11 *A $P_0(x_0,y_0,z_0)$ pont távolsága az $Ax+By+Cz+D=0$ egyenletű S síktól:*

$$d(P_0,S) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,.$$

T 5.12 *A P pont távolsága az e egyenestől:*

$$d(P,e) = \frac{\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{QR}\right|}{\left|\overrightarrow{QR}\right|}\,,$$

ahol Q és R az e egyenes két tetszőleges különböző pontját jelöli.

T 5.13 *Legyen az a egyenes egy irányvektora az $\mathbf{a}$, a b egyenesé pedig a $\mathbf{b}$ vektor. Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem egyező állásúak, és $\mathbf{c}$ olyan vektor, amely a két egyenes egy-egy pontját köti össze, akkor a két egyenes távolsága:*

$$d(a,b) = \frac{|(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c}|}{|(\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}.$$

T 5.14 *Ha az a egyenes egy irányvektora az $\mathbf{a}$, a b egyenesé pedig a $\mathbf{b}$ vektor, akkor hajlásszögük a következő képlet segítségével számítható ki:*

$$\cos(a,b)\angle = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}.$$

T 5.15 *A $\mathbf{v}$ irányvektorú e egyenes és az $\mathbf{n}$ normálvektorú S sík szögét a következő képlet alapján számíthatjuk ki:*

$$\sin(e,S)\angle = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{v}||\mathbf{n}|}.$$

Feladatok

66. Igazoljuk, hogy a következő két egyenes egymással párhuzamos:

$$e: \begin{cases} x = 3+4t \\ y = -1+t \\ z = 2+t \end{cases}, \quad f: \; x-5 = 4y-16 = 4z-28.$$

Írjuk fel annak a g egyenesnek az egyenletrendszerét, amely az e és f egyenesek síkjában van, azok között halad, mindkettővel párhuzamos és mindkettőtől egyenlő távolságra van!

67.$^{\triangleright}$ Adjuk meg azokat a pontokat, amelyek rajta vannak az

$$e: \; \frac{x-1}{2} = -y = \frac{z+3}{3}$$

egyenesen és 2 egység távolságra vannak az $x+2y+2z+11=0$ egyenletű síktól!

68. Igazoljuk, hogy a $2x-4y+2z-1=0$, és az $x-2y+z-1=0$ egyenletű síkok egymással párhuzamosak. Határozzuk meg a két sík távolságát!

69. Mutassuk meg, hogy az

$$e: \; \frac{x-1}{3} = y-2 = \frac{z}{5}, \qquad f: \begin{cases} x = 4-t \\ y = 3+3t \\ z = 5+5t \end{cases} \quad \text{és} \quad g: \begin{cases} x = 3+u \\ y = 6-3u \\ z = 5u \end{cases}$$

egyenletrendszerű egyenesek egy közös K pontban metszik egymást, és határozzuk meg a K pont koordinátáit! Továbbá számítsuk ki

a) az e, f és g egyenesek páronkénti szögének koszinuszát;

b) az e és f egyeneseken átmenő $\mathcal{S}_1$, az e és g egyeneseken átmenő $\mathcal{S}_2$, valamint az f és g egyeneseken átmenő $\mathcal{S}_3$ sík egy-egy normálvektorát;

c) az $(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2)_\angle$, az $(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_3)_\angle$ és az $(\mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3)_\angle$ tangensét;

d) az $(e, \mathcal{S}_3)_\angle$, az $(f, \mathcal{S}_2)_\angle$ és az $(g, \mathcal{S}_1)_\angle$ szögek szinuszát!

70.⊳ Van-e a t paraméternek olyan értéke, hogy az $S:\ x+ty+z-1=0$ egyenletű sík 60°-os szöget zár be

a) az x tengellyel; b) az y tengellyel; c) a z tengellyel?

Ha van, akkor adjuk meg az összes ilyen valós t értéket!

71.⊳ Írjuk fel azoknak a síkoknak az egyenleteit, amelyek átmennek az $x+y=2$ egyenletű sík $P(1,1,\sqrt{2})$ és $Q(0,2,\sqrt{2})$ pontján, és az adott síkkal 45°-os szöget zárnak be.

72.⊳ Az e egyenesről tudjuk, hogy benne van az $x-2y+1=0$ egyenletű síkban, áthalad a $P(2,1,4)$ ponton és az xy tengelysíkkal 60°-os szöget zár be. Írjuk fel az e egyenes egyenletrendszerét!

73.⊳ Írjuk fel azoknak az egyeneseknek az egyenletrendszereit, amelyek átmennek az origón, továbbá az x tengellyel és az y tengellyel 60°-os szöget zárnak be!

74.⊳ Vannak-e olyan egyenesek, melyek az

$$e:\ \begin{cases} x=2+2t \\ y=1 \\ z=3+t \end{cases} \quad \text{és} \quad f:\ -x=\frac{z+5}{2}\,,\ y=3$$

egyenletrendszerű egyenesek mindegyikével

a) 60°-os, b) 45°-os, c) 30°-os

szöget zárnak be? Ha vannak, akkor ezek közül adjuk meg mindazokat, amelyek átmennek a $P_0(3,4,-1)$ ponton.

75. Írjuk fel azoknak a síkoknak az egyenletét, amelyek átmennek a $P(1,1,1)$ ponton, párhuzamosak az $x+2y-z-1=0$, $2x-y+z-1=0$ síkok metszésvonalával, és mindkét síkkal ugyanakkora szöget zárnak be! Határozzuk meg ennek a szögnek a koszinuszát!

76.⊳ Számítsuk ki minden olyan egyenesnek az egyenletrendszerét, amely áthalad az origón és a három koordinátatengellyel egyenlő szöget zár be! Határozzuk meg ennek a szögnek a koszinuszát!

77.⊳ Tekintsük a következő három egyenest:

$$e:\ \frac{x-3}{2}=\frac{y-5}{3}=z\,,\quad f:\ \begin{cases} x=-2+3t \\ y=4-2t\,, \\ z=-t \end{cases} \quad \text{és} \quad g:\ \begin{cases} x=2-u \\ y=-1+3u \\ z=-3+2u\,. \end{cases}$$

Írjuk fel minden olyan egyenesnek az egyenletrendszerét, amely átmegy az $A(1,2,-1)$ ponton és egyenlő szöget zár be az adott egyenesekkel! Számítsuk ki a szög koszinuszát is!

78. Határozzuk meg az $x-3y+2z-2=0$ és a $2x+y+3z-5=0$ egyenletű síkok szögfelező síkjainak egyenleteit!

79. Az e egyenes egyenletrendszere: $x = -2 + 2t$, $y = 3 + 2t$, $z = 1 + t$. Az egyenes $A(-2, 3, 1)$ pontjából mérjünk fel egy 6 egységnyi szakaszt az egyenesre. Számítsuk ki a szakasz másik végpontjának koordinátáit!

80. Határozzuk meg a z tengelyen azt a pontot, amely egyenlő távolságra van a $12x + 9y - 20z + 19 = 0$ és $16x - 12y + 15z - 9 = 0$ egyenletű síkoktól!

81. Adjunk meg a z tengelyen olyan pontot, amelynek az $M(1, -2, 0)$ ponttól mért távolsága egyenlő a $3x-2y+6z-9 = 0$ egyenletű síktól mért távolságával!

82. Határozzuk meg az $x + y + z - 2 = 0$ és az $x + 2y - z - 1 = 0$ egyenletű síkok metszésvonalán azt a pontot, amely egyenlő távol van az $x + 2y + z + 1 = 0$ és az $x + 2y + z - 3 = 0$ egyenletű síkoktól!

83. Határozzuk meg az alábbiakban adott P pont távolságát az e egyenestől!

a) $P(-2, 3, 7)$; e: $\dfrac{x-1}{3} = 2 - y\,,\ z = 2\,,$

b) $P(-1, 2, 1)$; e: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 12 - t \\ z = 3 + 3t\,, \end{cases}$

c) $P(2, 2, 1)$; e: $\dfrac{9-x}{4} = \dfrac{y+2}{2} = z + 5\,,$

d) $P(3, 1, 2)$; e: az $A(0, 2, 1)$ és $B(1, -1, 3)$ ponton áthaladó egyenes,

e) $P(-2, 4, 1)$; e: az $A(-1, 4, 1)$ ponton és az origón áthaladó egyenes.

84. Igazoljuk, hogy a következő feladatokban adott két-két egyenes kitérő, és számítsuk ki távolságukat!

a) $e:\ x + 4 = 8 - 2y = -z - 1\,,\qquad f:\ \begin{cases} x = 4t - 5 \\ y = -3t + 5 \\ z = -5t + 5\,, \end{cases}$

b) $e:\ \dfrac{2x-1}{2} = \dfrac{3-y}{3} = \dfrac{5z-6}{4}\,,\qquad f:\ x = y = z\,,$

c) $e:\ \begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = t \\ z = 4t + 9 \end{cases},\qquad f:\ \begin{cases} x = 4 - u \\ y = -3 + u \\ z = 4 - 4u\,. \end{cases}$

85. Határozzuk meg az alábbi kitérő egyenespárok távolságát és normáltranszverzálisuk egyenletrendszerét!

a) $e:\ x = 1 - 3t,\ y = -4 + 4t,\ z = 1 + t\qquad f:\ x - 4 = -y - 2 = -z + 2\,.$

b) $e:\ x = t + 3,\ y = 3t + 2,\ z = 3\,,\qquad f:\ x + 3 = \dfrac{y-4}{4} = \dfrac{4-z}{2}\,.$

c) $e:\ \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 1 + t \\ z = 0 \end{cases},\qquad f:\ \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{5} = \dfrac{z-6}{2}\,.$

d) $e:\ \dfrac{x-1}{5} = 2 - y = z - 1\,,\qquad f:\ 2 - x = y - 5 = z + 1\,.$

86. Legyen $\mathcal{H}$ azoknak a pontoknak a halmaza, amelyek egyenlő távolságra vannak a következő három ponttól: $P_1(2, 2, 1)$, $P_2(8, 6, 2)$, $P_3(6, 3, 5)$. Írjuk fel a

$\mathcal{H}$ geometriai alakzat egyenletét vagy egyenletrendszerét!

87.$\triangleright$ Vannak-e olyan síkok, amelyek az $x = 1,\ y = 3+3t,\ z = 4+4t$ egyenletrendszerű e egyenesre illeszkednek és egységnyi távolságra vannak a $P(2,1,3)$ ponttól? Ha vannak, akkor adjuk meg egyenleteiket, és számítsuk ki hajlásszögük koszinuszát!

88.$\triangleright$ Egy háromszög csúcsai: $P_1(1,1,1)$, $P_2(2,2,2)$, $P_3(-1,2,0)$. Határozzuk meg annak az S síknak az egyenletét, amely a következő két feltételt teljesíti:
1) S illeszkedik az x tengelyre;
2) A háromszög S-re eső merőleges vetületének területe az $P_1P_2P_3$ háromszög területének fele!

Számítsuk ki továbbá a háromszög P_1 és P_2 csúcsainak S-től mért távolságait!

89. Állapítsuk meg, hogy a t paraméter mely értékeinél nem lesz kollineáris az $A(1,2,3)$, $B(4,5,6)$, $C(7,8,t)$ ponthármas, és minden ilyen t-re adjuk meg az $x+y+z-7=0$, $2x-3y-z+3=0$ és $x-y+z-5=0$ egyenletű síkok közös K pontjának az ABC síktól mért távolságát (a t paraméter függvényében)!

90.$\triangleright$ Vannak-e olyan egyenesek, amelyek átmennek a $P(-1,0,2)$ ponton, merőlegesek az $x = 10+3t,\ y = -1-6t,\ z = 7+2t$ egyenletrendszerű egyenesre és attól 7 egység távolságra vannak? Ha léteznek ilyenek, akkor adjuk meg egyenletrendszereiket!

Vegyes feladatok

91. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely átmegy a $P(2,1,2)$ ponton, párhuzamos az $x+z=5$ egyenletű síkkal és metszi az $x = 2-t$, $y = 2t$, $z = 3$ egyenletrendszerű egyenest.

92. Az $ABCD$ tetréder térfogata $\frac{3}{2}$ egység. Három csúcsa: $A(1,2,1)$, $B(4,3,-3)$, $C(-1,2,-4)$. A D csúcs az $x = y = 2-2z$ egyenletrendszerű egyenesen van. Számítsuk ki az ABC lap B csúcsánál lévő szög koszinuszát, valamint a D csúcs koordinátáit!

93. Egy szabályos háromszög egyik csúcsa az $A(1,1,1)$ pont. A B és a C csúcsa az $x+y+z=1$ és $2x-y-z=0$ egyenletű síkok metszésvonalán van. Határozzuk meg a B és a C csúcs koordinátáit!

94. Számítsuk ki az $ABCD$ tetraéder C és D csúcsainak koordinátáit, ha a következő feltételek mindegyike teljesül:
a) az ABC lap az xy tengelysíkon fekvő szabályos háromszög,
b) $A(1,3\sqrt{3},0)$, $B(5,\sqrt{3},0)$,
c) a tetraéder térfogata $28/\sqrt{3}$ egység,
d) a D csúcs az $x = 2$, $y = t$, $z = 6-2t$ egyenletrendszerű egyenesen van.

Hány ilyen tetraéder van?

95. Adva van az $e:\ \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z}{r}$ egyenes és az $\mathcal{S}$: $x+3y-2rz=0$ sík, ahol r paraméter.

a) Állapítsuk meg az r értékét úgy, hogy az e egyenes párhuzamos legyen az $\mathcal{S}$ síkkal, és ehhez az r-hez számítsuk ki az e és $\mathcal{S}$ távolságát!

b) Állapítsuk meg az r értékét úgy, hogy e merőleges legyen $\mathcal{S}$-re!

96. Tükrözzük az $P(1,-1,3)$ pontot a $Q(-1,3,2)$ ponton, az $x = -\frac{y+1}{2} = -z$ egyenesen és a $2x - y + 3z - 2 = 0$ egyenletű síkon. Számítsuk ki a P pont és a három tükörkép által meghatározott sík távolságát!

97. Vegyük fel az $e:\ x = 2t+1,\ y = 2t,\ z = t$ egyenletrendszerű egyenesen azt az A, az $f:\ \frac{x-3}{6} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-2}{3}$ egyenesen pedig azt a C pontot, amelynek z-koordinátája 2. Az e egyenesre az A pontból mérjünk fel egy 3 egység hosszúságú AB, az f egyenesre pedig a C pontból egy 7 egység hosszúságú CD szakaszt. Számítsuk ki az így kapott négy tetraéder térfogatát!

98.$^{\triangleright}$ Létezik-e olyan szakasz, amelynek merőleges vetülete
az $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{3} = -\dfrac{z}{6}$ egyenletrendszerű egyenesen 2 egység,
az $x = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{1-z}{8}$ egyenletrendszerű egyenesen 3 egység,
az $\dfrac{1-2x}{2} = \dfrac{y}{8} = \dfrac{z+1}{4}$ egyenletrendszerű egyenesen pedig 1 egység?
Ha létezik, akkor határozuk meg a hosszát!

99. Adjuk meg annak a síknak az egyenletét, amely merőleges az

$$\frac{1-x}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{5-z}{4}$$

egyenletrendszerű egyenesre, és a $P(3,-1,1)$ ponttól olyan távolságra van, mint amennyi az adott egyenes és a P pont távolsága!

100. Tekintsük a következő két egyenespárt:

$$e:\ \begin{cases} x = 2+2t \\ y = -1-4t \\ z = 5+3t \end{cases},\quad f:\ x-3 = -y-2 = z-3;$$

$$g:\ x-2 = y-2 = \frac{z+5}{2},\quad h:\ \frac{x-1}{3} = y-1 = \frac{z}{3}.$$

Mutassuk ki, hogy mind a két egyenespár kitérő! Messe az e, illetve f egyenest a normáltranszverzálisuk a E, illetve a F pontban. Hasonlóan, legyen G, illetve H a g, illetve a h egyenesek és normáltranszverzálisuk metszéspontja. Számítsuk ki az E, F, G és H pontok koordinátáit és a két normáltranszverzális szögének koszinuszát!

101. Bontsuk fel a $\mathbf{v} = [10, 6, -8]$ vektort az

$$e:\ \begin{cases} x = 1+2t \\ y = t \\ z = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}t \end{cases},\quad f:\ 2x = \frac{1-y}{5} = \frac{1+z}{2}\quad \text{és}\quad g:\ \begin{cases} x = -\dfrac{3+3u}{2} \\ y = -5+4u \\ z = -u \end{cases}$$

egyenletrendszerű egyenesekkel párhuzamos összetevőkre, ha lehetséges.

102.▷ Adjuk meg azoknak a síkoknak az egyenleteit (ha léteznek ilyen síkok), amelyek tartalmazzák a $P(3,-2,-2)$ és $Q(-2,3,-2)$ pontokat, továbbá az $x=0$, $y=0$ és az $x+y-1=0$ egyenletű síkok által határolt hasábot egyenlő oldalú háromszögben metszik!

103.▷ Igazoljuk, hogy az $x+y-2z-4=0$, $3x-y-2z-8=0$, $x-3y+2z+8=0$ egyenletű síkok páronkénti metszésvonalai párhuzamosak. Bizonyítsuk be, hogy a három sík által meghatározott hasábból a $P(1,1,1)$ ponton áthaladó és az $\mathbf{a}=[1,-1,0]$ vektorral párhuzamos síkok mindegyike egyenlőszárú háromszöget metsz ki! Vannak-e ezen síkok között olyanok, amelyek derékszögű háromszöget metszenek ki? Ha léteznek ilyenek, akkor adjuk meg ezek egyenleteit; ha nincsenek, akkor ezt mutassuk ki!

104. Léteznek-e olyan síkok, amelyek tartalmazzák a $P(2,1,2)$ és $Q(1,-1,0)$ pontot, továbbá az $x+y=0$, $y=1$ és az $x-2y=0$ síkok által határolt hasábot derékszögű háromszögben metszik? Ha léteznek, akkor adjuk meg ezek egyenleteit, ha nem, akkor ezt mutassuk ki!

105.▷ Egy tetraéder csúcsai: $A(1,1,1)$, $B(-1,1,1)$, $C(1,-1,1)$ és $D(1,1,-1)$. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely párhuzamos a BCD síkkal és a tetraédert egyenlő térfogatú részekre osztja!

106. Bizonyítsuk be, hogy az

$$e: \begin{cases} x = x_1 + a_1 t \\ y = y_1 + b_1 t \\ z = z_1 + c_1 t \end{cases} \quad \text{és} \quad f: \begin{cases} x = x_2 + a_2 u \\ y = y_2 + b_2 u \\ z = z_2 + c_2 u \end{cases}$$

egyenletrendszerű egyenesek akkor és csak akkor egysíkúak, ha

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0\,.$$

107. Legyen az $x = x_0 + at,\ y = y_0 + bt,\ z = z_0 + ct$ egyenletrendszerű e egyenes olyan, amely nem merőleges az $S:\ Ax + By + Cz + D = 0$ egyenletű síkra. Igazoljuk, hogy az e-t tartalmazó és az S-re merőleges sík egyenlete:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a & b & c \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0\,.$$

108.▷ Igazoljuk, hogy a tetraéder élfelező merőleges síkjai egy ponton mennek át!

109.▷ Két kitérő egyenesen mozogjon egy-egy adott hosszúságú szakasz. Bizonyítsuk be, hogy a két szakasz tetszőleges helyzeténél a négy végpont által meghatározott tetraéder térfogata konstans!