6. Komplex számok (megoldások)

1. Lásd ábra.

2. $z_1 = 2 + 2i, \quad z_2 = -3 + 2i,$
$z_3 = 4 - 2i, \quad z_4 = -1 - i.$

3. $\overline{z}_1 = 2 - 7i,\ \overline{z}_2 = -3 + 5i,$
$\overline{z}_3 = -5i,\ \overline{z}_4 = i,\ \overline{z}_5 = -9,\ \overline{z}_6 = 0.$

4. Teljes indukcióval. **5.** Teljes indukcióval.

6. Az előző feladatból következik $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z$ esetén.

7. $6 + 2i, \quad -2 + 8i.$ **8.** $-2 - 2i, \quad 8 - 6i.$ **9.** $2 - 4i, \quad 6 - 2i.$

10. $-7 + 23i.$ **11.** $-3 - i.$ **12.** $23 + 14i.$

13. A nevező kojugáltjával bővítjük a törtet, majd elvégezzük a szorzásokat:
$$\frac{3+2i}{1-i} = \frac{3+2i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{(3-2)+(2+3)i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i.$$

14. $\frac{7}{5} + \frac{9}{5}i.$ **15.** $\frac{2}{3} - \frac{5}{3}i.$

16. A nevezőbeli szorzás elvégzése és a konjugálttal való bővítés, vagy a nevezőbeli tényezők konjugáltjaival való bővítés és a szorzások elvégzése után: $\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i.$

17. $-\frac{7}{625} - \frac{24}{625}i.$ **18.** $-\frac{11}{25} + \frac{2}{25}i,$ **19.** $\frac{1-\sqrt{3}}{4} + \frac{1+\sqrt{3}}{4}i.$

20. $-\frac{1}{26} - \frac{5}{26}i.$ **21.** $-\frac{1}{10} + \frac{1}{10}i.$

22. $\frac{z_1}{z_2} = -\frac{17}{25} - \frac{19}{25}i, \quad \frac{\overline{z}_1}{z_2} = \frac{23}{25} + \frac{11}{25}i, \quad \frac{z_1}{\overline{z}_2} = \frac{23}{25} - \frac{11}{25}i,$
$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = -\frac{17}{25} + \frac{19}{25}i, \quad \frac{z_1}{|z_2|} = \frac{1}{5} - i, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{\sqrt{26}}{5}.$

23. $\frac{6}{5} + \frac{2}{5}i,\ -\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i,\ \frac{3}{5} + \frac{11}{5}i,\ \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i.$

24. $\sqrt{157} + 1$ (l. **T 6.6**). **25.** $-7 + 3i.$ **26.** $1.$

27. $\frac{|3+4i||2+i|}{|1+2i||4+3i|} = 1.$ **28.** $\frac{|\sqrt{x^2+y^2} + i\sqrt{2xy}|}{|(x-y) + 2i\sqrt{xy}|} = 1.$

29. A $3x + 5y = 7,\ 2y - x = 5$ egyenletrendszert megoldva: $x = -1,\ y = 2$.

30. $|z - (-2 + i)| = 4$, azaz $|z + 2 - i| = 4$.

31. Vagy csak annyit írunk, hogy $\operatorname{Im} z = m \operatorname{Re} z + b$, vagy a következőt tesszük: ha $z = x + iy$, akkor $x = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ és $y = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$, amiből behelyettesítés után kapjuk, hogy $(1 - mi)z - (1 + mi)\overline{z} - 2bi = 0$.

32. $|z + 3| + |z - 3| = 10$.

33. A 0 középpontú 1 és 2 sugarú körök közti körgyűrű, a körvonalak nélkül.

34. Az origó középpontú, 2 sugarú körvonal.

35. Az valós tengely pontjai.

36. A $-i$ középpontú 1 sugarú körlap, a határoló körvonallal együtt.

37. $|2z - 4i| < 1$, ekvivalens azzal, hogy $|z - 2i| < \frac{1}{2}$. Így a tartomány a $2i$ középpontú, $\frac{1}{2}$ sugarú körlap (a körvonal nélkül).

38. Az egyenlőtlenséget a $z = x + yi$ behelyettesítésével átalakítva: $x^2 + y^2 \leq x^2 + (y + 1)^2$, azaz $0 \leq 2y + 1$, tehát a megoldás $Imz \leq -\frac{1}{2}$ (félsik).

39. $z = x + yi$ behelyettesítése és átalakítás után kapjuk, hogy $(x+5)^2 + y^2 = 16$, ami a -5 közepű, 4 sugarú kör egyenlete. Ennek komplex alakja: $|z + 5| = 4$.

40. Ismeretes, hogy az xy koordináta-sikon bármely kör vagy egyenes egyenlete felirható $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \quad (A, B, C, D \in \mathbf{R})$ alakban. (Ez az egyenlet akkor lehet egyenes egyenlete, ha $A = 0$.) Ha $z = x + iy$, akkor $x^2 + y^2 = z\overline{z}$, $\quad x = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ és $y = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$, amiből $Az\overline{z} + \left(\dfrac{B}{2} + \dfrac{C}{2i}\right)z + \left(\dfrac{B}{2} - \dfrac{C}{2i}\right)\overline{z} + D = 0$.

41. $x_1 = \sqrt{2}i, \quad x_2 = -\sqrt{2}i,$

42. $x_1 = 1 + i, \quad x_2 = 1 - i.$

43. $x_1 = 3 + 2i, \quad x_2 = 3 - 2i.$

44. $x_1 = -4 + i, \quad x_2 = -4 - i.$

45. $x_1 = \sqrt{3}, \quad x_2 = -\sqrt{3}, \quad x_3 = \sqrt{2}i, \quad x_4 = -\sqrt{2}i.$

46. $x_1 = \sqrt{2}i, \quad x_2 = -\sqrt{2}i, \quad x_3 = \sqrt{3}i, \quad x_4 = -\sqrt{3}i.$

47. A $z = x + yi$ helyettesítéssel a $\sqrt{x^2 + y^2} + x + yi = 2 + i$ (komplex) egyeletet kapjuk, amely ekvivalens a $\sqrt{x^2 + y^2} + x = 2,\ y = 1$ valós egyenletrendszerrel. Ez utóbbiból $y = 1,\ x = \frac{3}{4}$, tehát $z = \frac{3}{4} + i$.

48. $z_1 = i,\ z_2 = -i.$

49. $z_1 = 1 + i,\ z_2 = 1 - i.$

50. $z_1 = 1 - i,\ z_2 = i.$

51. $z_1 = -iz_2,\ z_2$ tetszőleges.

52. $z_1 = -2i,\ z_2 = -3.$

53. $z_1 = -1 + i,\ z_2 = -2 - i.$

54. $z_1 = i, z_2 = 1 - i.$

55. $z_1 = -1, z_2 = 2 - i.$

56. Ha megszorozzuk a $z^2 + z + 1 = 0$ egyenlet mindkét oldalát $z - 1$-gyel, akkor $z^3 = 1$ adódik. Így $z^{65} + z^{-65} = (z^3)^{21}z^2 + (z^3)^{-21}z^{-2} = z^2 + z^{-2} = z^2 + z = -1$.

57. $(-1)^8 \dbinom{16}{8} \left(\dfrac{a}{x}\right)^8 (\sqrt{x})^8 = 12870\dfrac{a^8}{x^4}.$

58. $\dfrac{40095}{4096}a^{22/3}.$

59. A hatodikban.

60. A kilencedikben.

61. $\frac{455}{x^3}(m = 15)$.

62. $3003a^{10}$ $\quad (\binom{m}{3} = \binom{m}{12}$ miatt $12 = m - 3$, azaz $m = 15)$.

63. $35x^5$. **64.** $n = 7$. **65.** $x_1 = 10,\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{10^5}}$.

66. $x_1 = 10$, $x_2 = 10^{-4}$.

67. Alkalmazzuk a binomiális tételt az $a = 1,\ b = 1$ esetre.

68. Alkalmazzuk a binomiális tételt az $a = 1,\ b = -1$ esetre.

69. Útmutatás: Adjunk az egyenlet mindkét oldalához 1-et, és használjuk fel a $k! + k \cdot k! = k!(k+1) = (k+1)!$ összefüggést.

70. $\binom{n}{1} = n\binom{n-1}{0},\quad 2\binom{n}{2} = n\binom{n-1}{1}, \ldots, n\binom{n}{n} = n\binom{n-1}{n-1}$, ezért
$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + n\binom{n}{n} = n\left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \cdots + \binom{n-1}{n-1}\right]$,
ami **67.** szerint egyenlő $n \cdot 2^{n-1}$-nel.

71. Bontsuk fel az egyes tagokat a $(k+1)\binom{n}{k} = \binom{n}{k} + k\binom{n}{k}$ összefüggés alapján. Ezzel visszavezetjük a feladatot a **67.** és **70.** feladatokra.

72. Kiegészítve az egyenlet bal oldalát az $1 - \binom{n}{0} + \binom{n}{1} - \binom{n}{1}$ összeggel és felhasználva a $(k-1)\binom{n}{k} = k\binom{n}{k} - \binom{n}{k}$ összefüggést, visszavezetjük a feladatot a **67.**, és **70.** feladatokra.

73. Induljunk ki az egyenlet jobb oldalából. A binomiális együtthatók additív tulajdonsága alapján

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k-2} =$$
$$= \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} + \binom{n-3}{k-3} = \ldots$$
$$= \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} + \cdots + \binom{n-k}{0}.$$

74. Az $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$ összefüggés miatt a bal oldal első két tagjának összege: $\binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} = \binom{n+2}{1}$, ezért az első három tag összege: $\binom{n+2}{1} + \binom{n+2}{2} = \binom{n+3}{2}$, és így tovább, a bal oldal első k tagjának összege $\binom{n+k}{k-1}$, így a teljes bal oldal $\binom{n+k}{k-1} + \binom{n+k}{k}$, ami valóban egyenlő a jobb oldallal.

75. Lásd a **73.** feladat megoldását. **76.** Lásd a **73.** feladat megoldását.

77. A binomiális együtthatók additív tulajdonsága alapján
$\binom{n}{2} = \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2}, \quad \binom{n}{4} = \binom{n-1}{3} + \binom{n-1}{4}, \ \ldots.$
Beírva ezeket a megfelelő tagok helyébe, visszavezettük a feladatot a **67.** feladatra.

78. Lásd az előző feladat megoldását.

79. Hasonlítsuk össze az $(a+b)^{2n}$ binomiális kifejtésében és az $(a+b)^n(a+b)^n$ szorzatban az a^nb^n-es tagok együtthatóit és vegyük figyelembe a binomiális együtthatók szimmetriatulajdonságát.

80. Ha $n = 2m-1$, akkor a szimmetriatulajdonság miatt
$\binom{n}{0}^2 - \binom{n}{n}^2 = 0, \ -\binom{n}{1}^2 + \binom{n}{n-1}^2 = 0, \ldots, \ (-1)^{m-1}\binom{2m-1}{m-1} + (-1)^m\binom{2m-1}{m} = 0,$
tehát az összeg valóban 0.
Az $n = 2m$ eset vizsgálatához szorozzuk össze az $(a+b)^n$ és $(a-b)^n$ binomiális kifejtését, és adjuk össze az a^nb^n-es tagok együtthatóit. Akkor éppen az egyenlet bal oldalát kapjuk. Az $(a^2-b^2)^n$ kifejtésében pedig az a^nb^n-es tag együtthatója $(-1)^m\binom{2m}{m}$.

81. Egyrészt írjuk fel $(1+i)^{8n}$-t a binomiális tétel alapján, másrészt mutassuk meg, hogy $(1+i)^8 = 16$.

82. $72(\sqrt{3}i-1)$. **83.** $-128(1+i)$. **84.** $-8(1+i)$.

85. -27.

86. $\operatorname{Re} z = 3, \ \operatorname{Im} z = 0, \ r = 3, \ \varphi_0 = 0.$ **87.** $\operatorname{Re} z = -8, \operatorname{Im} z = 0, r = 8, \varphi_0 = \pi.$

88. $\operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z = -2, \ r = 2, \ \varphi_0 = \frac{3\pi}{2}.$

89. $\operatorname{Re} z = 1, \operatorname{Im} z = 1, \ r = \sqrt{2}, \ \varphi_0 = \frac{\pi}{4}.$

90. $\operatorname{Re} z = -\frac{1}{2}, \ \operatorname{Im} z = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \ r = 1, \ \varphi_0 = \frac{4\pi}{3}.$

91. $\operatorname{Re} z = 2, \ \operatorname{Im} z = -2\sqrt{3}, \ r = 4, \ \varphi_0 = \frac{5\pi}{3}.$

92. $\operatorname{Re} z = 4\sqrt{3}, \ \operatorname{Im} z = -4, \ r = 8, \ \varphi_0 = \frac{7\pi}{6}.$

93. $\operatorname{Im}(x+iy+i) = y+1 > 2, \operatorname{Im} z > 1.$ **94.** $\operatorname{Im}(ix-y) = x \geq 1, \ \operatorname{Re} z \geq 1.$

95. Az $x = 1$ számot ábrázoló ponton átmenő és a valós tengelyre merőleges egyenes.

96. $\operatorname{Re}(2x+2iy) = 2x < 4, \ x < 2, \ \operatorname{Re} z < 2.$

97. Annak a szögtartománynak a pontjai, amelyet az $\operatorname{Im} z = \operatorname{Re} z \geq 0$ feltételekkel meghatározott félegyenes és a képzetes tengely pozitív fele határol, az előbbi félegyenes pontjait kizárva, az utóbbi pontjait hozzászámítva a tartományhoz.

98. $\arg[(1+i)z] = \arg(1+i) + \arg z$ miatt a feltétel átírható a $-\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}$ alakra; azok a pontok elégítik ki, amelyek az $\operatorname{Im} z = -\operatorname{Re} z$ egyenletű egyenestől "jobbra" eső félsíkban vannak (az egyenest kizárva).

99. $3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$ **100.** $z = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right).$

101. $4(\cos\pi + i\sin\pi).$ **102.** $5\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$

103. $12\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

104. $3\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$.

105. $\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$.

106. $4\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$.

107. $\frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}i$.

108. $\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}}i$.

109. $2i$.

110. $-\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i$.

111. $-2i$.

112. $-3-\sqrt{3}i$,

113. $x^2+y^2=a^2$. Origó középpontú, a sugarú kör.

114. $x^2+(y-a)^2=a^2$. A $(0,a)$ középpontú, a sugarú kör.

115. $(x-a)^2+y^2=a^2$. Az $(a,0)$ középpontú, a sugarú kör.

116. $\cos\varphi$-vel való beszorzás után kapjuk, hogy $r\cos\varphi=2$, tehát a görbe az $x=2$ egyenletű egyenes.

117. $y=a$ egyenletű egyenes.

118. $(1+\cos\varphi)$-vel való beszorzással kapjuk, hogy $r+r\cos\varphi=1$, azaz $\sqrt{x^2+y^2}+x=1$, ahonnan átalakítás után az $y^2+2x-1=0$ ill. $y^2=2(\frac{1}{2}-x)$ egyenlethez jutunk, melynek képe az ábrán látható parabola.

119. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ egyenletű ellipszis.

120. $y^2=2\left(x+\frac{1}{2}\right)$ egyenletű parabola.

121. $y^2=4a(4-x)$ egyenletű parabola.

122. $y=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}$ egyenletű parabola.

123. $\frac{(x-3)^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$. Ellipszis, amelynek a középppontja a $(3,0)$ pont, tengelyei az x, illetve y tengellyel párhuzamosak, a tengelyek félhossza 5, illetve 4.

124. $\frac{\left(x+\frac{2}{3}\right)^2}{\left(\frac{4}{3}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}=1$. A görbe $\left(-\frac{2}{3},0\right)$ középpontú ellipszis, melynek az x, ill. y tengellyel párhuzamos tengelyei vannak; a tengelyek félhossza: $a=\frac{4}{3}$, ill. $b=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

125. Mivel r csak nemnegatív lehet, alkalmas feltételt kell keresnünk arra, hogy a jobb oldal pozitív legyen. $\cos\varphi=\frac{x}{r}$ helyettesítéssel $r=\frac{16}{3-5\frac{x}{r}}$, amiből $3r=16+5x$. Emiatt $16+5x\geq 0$, azaz $x>-\frac{16}{5}$. Az r helyébe $\sqrt{x^2+y^2}$-et írva a $3r = 16 + 5x$ egyenletből átalakítások után az

$$\frac{(x+5)^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$$

egyenletet kapjuk. Ez olyan hiperbola egyenlete, melynek valós tengelye az x tengelyen, képzetes tengelye az $x = -5$ egyenletű egyenesen van és a tengelyek és félhossza 3 ill. 4; ezek miatt a hiperbola egyik fókusza az origóban van. Az $x > -\dfrac{16}{5}$ feltétel miatt a hiperbolának csak a jobb oldali ágát vehetjük figyelembe.

126. Négyzetreemelés és átalakítás után $r^2 = a^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$. Felhasználva a **T 6.11** tétel egyenleteit: $x^2 + y^2 = a^2\left(\frac{x^2}{x^2+y^2} - \frac{y^2}{x^2+y^2}\right)$, amiből a keresett egyenlet, az ábrán is látható un. **lemniszkáta** egyenlete: $\left(x^2+y^2\right)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

127. $6(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ)$.

128. $6\sqrt{2}(\cos 130^\circ + i\sin 130^\circ)$.

129. $2(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)$.

130. $6\left(\cos\dfrac{5\pi}{12} + i\sin\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

131. $\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)$.

132. $-\cos\varphi + i\sin\varphi = (-1)(\cos\varphi - i\sin\varphi) = (\cos\pi + \sin\pi)(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)) = \cos(\pi - \varphi) + i\sin(\pi - \varphi)$.

133. $\cos(\pi + \varphi) + i\sin(\pi + \varphi)$.

134. Forgassuk el a $z_2 - z_1$ helyvektorát 60°-kal, ill. -60°-kal és adjuk a z_1 helyvektorához. A két megoldás:
$z_3 = (4-3i)(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) + (1+4i) = 3 + \frac{3\sqrt{3}}{2} + (\frac{5}{2} + 2\sqrt{3}) \approx 5,59807 + 5,96410i$,
$z_3' = (4-3i)(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) + (1+4i) = 3 - \frac{3\sqrt{3}}{2} + (\frac{5}{2} - 2\sqrt{3}) \approx 0,401924 - 0,964101i$.

135. A $z_2 - z_1$ helyvektorának 90°-os (ill. -90°-os) elforgatásával kapott vektort hozzáadva a z_1 és a z_2 helyvektorához kapjuk az első (ill. második) megoldást. A $z_2 - z_1$ helyvektorát 45°-kal ill. -45°-kal elforgatva, a kapott vektorokat $\frac{1}{\sqrt{2}}$- vel szorozva és z_1 helyvektorához adva kapjuk a harmadik megoldást. A három megoldás:

$$z_3 = 8i, \qquad z_4 = 7 + 4i;$$
$$z_3' = -8 - 6i, \qquad z_4' = -1 - 10i;$$
$$z_3'' = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i, \qquad z_4'' = -\frac{5}{2} - \frac{9}{2}i.$$

A harmadik megoldás egyszerűbben úgy is megkapható, hogy $\frac{1}{2}(z_1 + z_2)$ helyvektorához hozzáadjuk a $z_2 - z_1$ helyvektorára merőleges vektor $\frac{1}{2}$-szeresét.

136. Három megoldás van: $z_4 = z_2 + z_3 = 3 + i$, $\quad z_4' = z_3 - z_2 = 1 + 5i$, $\quad z_4'' = z_2 - z_3 = -1 - 5i$.

137. $z_{k+1} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{3}\right), \quad (k = 1, 2, 3, 4, 5).$

138. $z_{k+1} = i + (3-5i)\left(\cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5}\right), \quad (k = 1, 2, 3, 4).$

139. $\frac{2\sqrt{2}}{3}(\cos 103^\circ + i\sin 103^\circ).$

140. $\frac{3}{4}(\cos 62^\circ + i\sin 62^\circ).$

141. $\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos 75^\circ + i\sin 75^\circ).$

142. $\frac{-4}{19} - \frac{\sqrt{3}}{19}i.$

143. $-64.$

144. $-i.$

145. $-64(\sqrt{3}+i).$

146. $-\frac{1+\sqrt{3}i}{2024}.$

147. $-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i.$

148. $\frac{i}{4^9}.$

149. $-8(1+\sqrt{3}i).$

150. $-256.$

151. $-16\sqrt{3} + 16i.$

152. $1,\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$

153. $-1,\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$

154. $1, \quad i, \quad -1, \quad -i.$

155. $1, \quad \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad -1,$
$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$

156. $2i, \quad -\sqrt{3} - i, \quad \sqrt{3} - i.$

157. $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}.$

158. $3\left(\cos\frac{3\pi}{10} + i\sin\frac{3\pi}{10}\right),\ 3\left(\cos\frac{7\pi}{10} + i\sin\frac{7\pi}{10}\right),\ 3\left(\cos\frac{11\pi}{10} + i\sin\frac{11\pi}{10}\right),$
$3\left(\cos\frac{15\pi}{10} + i\sin\frac{15\pi}{10}\right),\ 3\left(\cos\frac{19\pi}{10} + i\sin\frac{19\pi}{10}\right).$

159. $\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}, \quad \cos\frac{3\pi}{7} + i\sin\frac{3\pi}{7}, \quad \cos\frac{5\pi}{7} + i\sin\frac{5\pi}{7},$
$\cos\pi + i\sin\pi = -1, \quad \cos\frac{9\pi}{7} + i\sin\frac{9\pi}{7},$
$\cos\frac{11\pi}{7} + i\sin\frac{11\pi}{7}, \quad \cos\frac{13\pi}{7} + i\sin\frac{13\pi}{7}.$

160. $\sqrt{2}(\cos\varphi + i\cos\varphi)$, ahol $\varphi = \frac{\pi}{4}, \frac{11\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}$, ill. $\varphi = 45^\circ, 165^\circ, 285^\circ$. Algebrai alakba is felírható az eredmény, hisz a $\frac{\pi}{4}$-hez tartozó gyök $1+i$, a másik két gyök például a harmadik egységgyökökkel való beszorzás útján kapható meg: $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2})i,\ \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + (-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2})i.$

161. Kalkulátorral legalább négy tizedes pontossággal számolva $2+i, \quad -2-i$ adódik. A következő meggondolás szerint — amely bármely komplex szám négyzetgyökének kiszámítására használható — ezek pontos értékek. Legyen $u^2 = (x+yi)^2 = z$, akkor $x^2 - y^2 = 3, \quad 2xy = 4$, az utóbbiból $y = \frac{2}{x}$, és ennek felhasználásával $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ adódik, amiből , $x_{1,2}^2 = 4, \quad x_{3,4}^2 = -1$, s mivel x valós, ez utóbbi hamis gyök. Tehát $x_1 = 2, \quad x_2 = -2, \quad y_1 = 1, \quad y_2 = -1$; a megoldás: $2+i, \quad -2-i$.

162. $3+4i,\ -3-4i,$ lásd az előző feladat megoldását.

163. Az $\sqrt[n]{c^n z} = c\sqrt[n]{z}$ egyenlőség mindkét oldalán n különböző szám szerepel, és mindkét oldal n-edik hatványa $c^n z$, így az egyenlőség valóban fennáll.

164. Ekvivalens átalakításokkal $\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{4a^2} + \dfrac{c}{a} = 0$, és ebből

$z + \dfrac{b}{2a} = \sqrt{\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$ adódik.

Az előző feladat szerint $\sqrt{\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Így $z = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

165. $z_1 = 2 + i, \quad z_2 = -2 + i.$

166. $z_1 = 1 + 2i, \quad z_2 = 1 + i.$

167. $z_1 = -3 + i, \quad z_2 = -2 + i.$

168. $$z_{1,2} = \frac{-1 + 2i + \sqrt{(1 - 2i)^2 + 8i}}{2} = \frac{-1 + 2i + \sqrt{-3 + 4i}}{2} =$$
$$= \frac{-1 + 2i \pm (1 + 2i)}{2}, \quad z_1 = 2i, \quad z_2 = -1.$$

169. A Moivre-képlet és a binomiális tétel alkalmazásával kapjuk, hogy
$\cos 5x + i \sin 5x = (\cos x + i \sin x)^5 =$
$\cos^5 x - 10\cos^3 x \sin^2 x + 5\cos x \sin^4 x + i(5\cos^4 x \sin x - 10\cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x)$.
Amiből
$\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x(1 - \cos^2 x) + 5\cos x(1 - \cos^2 x)^2 = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$.

170. l. az előző feladat megoldását!

171. 1.megoldás: A **161.** feladat megoldásában leírt módon $-1 + 4i$ és $1 - 4i$.
2.megoldás: Legyen $-15 - 8i = 17(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, ahol $\cos\varphi = -\frac{15}{17}$ és $\sin\varphi = -\frac{8}{17}$, $\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2} (< 2\pi)$. A $-15 - 8i$ szám négyzetgyökei: $\pm\sqrt{17}(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2})$. Mivel $\frac{\pi}{2} < \frac{\varphi}{2} < \pi$, ezért $\cos\frac{\varphi}{2} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ és $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{4}{\sqrt{17}}$. Ezekből a négyzetgyökök: $-1 + 4i$ és $1 - 4i$.

172. Ha $z_1 = 0$ vagy $z_2 = 0$, akkor a $z_1 z_2$-höz tartozó helyvektor a **0**. Ha $z_1, z_2 \neq 0$, akkor $\dfrac{|z_1 z_2|}{|z_2|} = \dfrac{|z_1|}{1}$, továbbá ha z_1 argumentuma φ_1 és z_2 argumentuma φ_2, akkor $z_1 z_2$ argumentuma $\varphi_1 + \varphi_2$. Ezek alapján a szerkesztés menete a következő ábráról leolvasható.

173. Ha két komplex szám egyenlő, akkor abszolút értékük is, ezért $|z|(|z|^{n-1} - 1) = 0$. Ebből következik, hogy $|z| = 0$ vagy $|z|^{n-1} = 1$, azaz $z = 0$ vagy $|z| = 1$. Az eredeti egyenlet mindkét oldalát z-vel megszorozva, a $z \neq 0$ esetben az $|z|^2 = z^{n+1}$ egyenletet kapjuk. Ebből a $|z| = 1$ miatt $z^{n+1} = 1$ adódik.

Összegezve, az egyenlet megoldásai: 0 és a $\cos\dfrac{2k\pi}{n+1}+i\sin\dfrac{2k\pi}{n+1}$ $(k = 0,1,2,\dots,n)$ $(n+1)$-edik egységgyökök.

174. Jelöljük az összeget $s_{n,j}$-vel. Könnyen belátható, hogy $e_k = e_1^k$ $(k = 0,1,\dots,n)$, ezért $s_{n,j} = 1+e_1^j+e_1^{2j}+\dots+e_1^{nj}$. Ha $e_1^j = 1$, akkor $s_{n,j} = n+1$. Ha $e_1^j \neq 1$, akkor $s_{n,j} = \dfrac{1-(e_1^j)^{n+1}}{1-e} = \dfrac{1-(e_1^{n+1})^j}{1-e} = \dfrac{1-1^j}{1-e} = 0$.

175. Ha $e = 1$, akkor az összeg: $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$. Ha $e \neq 1$, akkor $1+2e+3e^2+\dots+(n+1)e^n = (1+e+e^2+\dots+e^n)+(e+e^2+\dots+e^n)+\dots+(e^{n-1}+e^n)+e^n = \dfrac{1-e^{n+1}}{1-e}+e\dfrac{1-e^n}{1-e}+\dots+e^{n-1}\dfrac{1-e^2}{1-e}+e^n\dfrac{1-e}{1-e} = \dfrac{(1+e+e^2+\dots+e^n)-(n+1)e^{n+1}}{1-e}$. Mivel $1+e+e^2+\dots+e^n = 0$ és e^{n+1}, ezért a végeredmény $\dfrac{n+1}{e-1}$.

176. $|(1+i)z^3+iz| \leq |(1+i)z^3|+|iz| = |1+i||z|^3+|i||z| = \sqrt{2}|z|^3+|z| < \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{2} < 2\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

177. Az egyenlőség bal oldalát írjuk fel trigonometriai alakban.

178. Az egyenlőség bal oldalát írjuk fel trigonometriai alakban.

179. Írjuk fel az $(1+i)^n$ kifejezést a binomiális tétel segítségével. A keresett összeg: $2^{\frac{n}{2}}\cos\dfrac{n\pi}{4}$ (l. a **177.** feladatot!).

180. A keresett összeg: $2^{\frac{n}{2}}\sin\dfrac{n\pi}{4}$ (l. az előbbi feladatot!).

181. Használjuk fel, hogy a -1 komplex n-edik egységgyökeinek összege 0. Továbbá azt, hogy ha n páratlan szám, akkor a komplex egységgyökök a komplex számsíkon olyan szabályos n-szög csúcsai, amely középpontja a 0, körülírt köre egységsugarú és szimmetrikus a valós tengelyre. Ezeket az észrevételeket alkalmazzuk az $n = 11$ esetre.

182. L. az előző feladat megoldását!

183. L. **181.** feladat megoldását!