7. fejezet

Sorozatok

A sorozat fogalma

D 7.1 **Sorozat***on olyan függvényt értünk, amelynek értelmezési tartománya a nemnegatív egész számok halmaza vagy annak valamely valódi végtelen részhalmaza. Az n nemnegatív számhoz rendelt elemet a sorozat* n**-edik elem***ének nevezzük.*
Ebben a fejezetben értelmezési tartományként legtöbbször a pozitív egész számok halmazát ($\mathbf{N}^+$) tekintjük, azaz általában $[a_n]$ az $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sorozatot jelöli. (Ezért a feladatoknál csak akkor adjuk meg az értelmezési tartományt, ha ettől eltérünk.)

D 7.2 *Ha megadjuk a sorozat első néhány elemét s azt a szabályt, ahogyan az n-edik elemet az előzőekből megkaphatjuk, akkor azt mondjuk, hogy a sorozatot* **rekurzív definíció***val adjuk meg. Szokás ebben az esetben* **rekurzív sorozat***ról beszélni.*

D 7.3 *Ha $[a_n] \subseteq \mathbf{R}$, akkor* **valós számsorozat***ról, ha pedig $[a_n] \subseteq \mathbf{C}$, akkor* **komplex számsorozat***ról beszélünk. Ha minden egyes n nemnegatív (illetve pozitív) egész számhoz a síknak vagy a térnek egy-egy P_n pontját rendeljük, akkor* **pontsorozat***ot ($[P_n]$) kapunk. Hasonlóan beszélhetünk* **vektorsorozat***ról vagy* **függvénysorozat***ról is. Ebben a fejezetben i mindig a képzetes egységet jelenti.*

Feladatok

Írjuk fel a következő sorozatok első öt elemét:

1. $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$,

2. $a_n = 1 - \dfrac{(-1)^n}{n}$,

3. $a_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n-3}$,

4. $a_n = \sin\dfrac{n\pi}{4}$,

5. $a_n = 1 + 3 + \cdots + (2n-1)$,

6. $a_n = n + (n+1) + \cdots + 2n$,

7. $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k 2k$,

8. $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{(k-1)!}$,

9.▷ $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sum\limits_{j=1}^{k} j\right)$,

10.• $a_n = \left(\dfrac{i-1}{i+1}\right)^n \quad n \in \mathbf{N}$,

11. $a_n = \dfrac{(i-1)^{3n}}{2^n} \quad n \in \mathbf{N}$.

Adjunk meg egy képletet vagy utasítást, amelynek segítségével képzett sorozat kezdő elemei megegyeznek a következő feladatokban felírt elemekkel:

12. $2, 4, 6, \ldots,$

13. $-13, -18, -23, -28, \ldots,$

14. $0,3;\ 0,33;\ 0,333; \ldots,$

15. $-0,1;\ 0,01;\ -0,001; \ldots,$

16.* $0,235;\ 0,235235; \ldots,$

17. $2;\ 1,5;\ 1,25;\ 1,125; \ldots,$

18. $0, 2, 0, 2, 0, 2, \ldots,$

19.* $-1, -1, 1, 1, -1, -1, \ldots,$

20. $\frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{10}{13}, \frac{17}{18}, \frac{26}{23}, \ldots,$

21.* $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \ldots,$

22.$^\bullet$ $1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4, \ldots,$

23. $i, -i, i, -i, \ldots,$

24.* $1, \frac{\sqrt{3}i-1}{2}, -\frac{\sqrt{3}i+1}{2}, 1, \frac{\sqrt{3}i-1}{2}, -\frac{\sqrt{3}i+1}{2}, \ldots,$

25.$^\triangleright$ $1, i-1, -2i, 2(i+1), -4, -4(i-1), 8i, -8(i+1), \ldots.$

Írjuk fel az alábbi, rekurzív képlettel megadott sorozatok első öt elemét:

26. $a_1 = -1$ és $a_n = -4 - 3a_{n-1}, \quad n = 2, 3, 4, \ldots,$

27.$^\bullet$ $a_1 = 2$ és $a_n = 3 - \frac{3}{a_{n-1}}, \quad n = 2, 3, 4, \ldots,$

28. $a_1 = 1, \quad a_2 = 2$ és $a_n = \frac{a_{n-1} - a_{n-2}}{2}, \quad n = 3, 4, 5, \ldots,$

29. $a_0 = 1$ és $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}, \quad n \in \mathbf{N}^+,$

30. $z_0 = -1$ és $z_n = z_{n-1}^2 + i, \quad n \in \mathbf{N}^+,$

31. $z_0 = (1+i)^2$ és $z_n = z_{n-1}^2 + 1 + i, \quad n \in \mathbf{N}^+,$

32.$^\bullet$ $\mathbf{r}_0 = \mathbf{i}, \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{j}, \quad \mathbf{r}_n = \mathbf{r}_{n-1} \times \mathbf{r}_{n-2}, \quad n = 2, 3, 4, \ldots,$

33. $\mathbf{r}_0 = \mathbf{i}, \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{j}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_n = (\mathbf{r}_{n-3}\mathbf{r}_{n-2})\mathbf{r}_{n-1}, \quad n = 3, 4, 5, \ldots.$

Metrikus tér

D 7.4 *Ha az $M \neq \emptyset$ halmazhoz hozzárendelünk egy, az M^2 halmazon értelmezett valós értékű d függvényt, amely minden $a, b, c \in M$ elemre teljesíti a*

$$d(a,b) \geq 0, \quad \textit{és} \quad d(a,b) = 0 \Longleftrightarrow a = b,$$

$$d(a,b) = d(b,a) \quad (\textbf{szimmetria tulajdonság}),$$

$$d(a,b) + d(b,c) \geq d(a,c) \quad (\textbf{háromszög-egyenlőtlenség})$$

feltételeket, akkor azt mondjuk, hogy az M halmaz a d **távolságfüggvénnyel (metrikával) metrikus teret** *alkot.*

T 7.5 *A valós számokból álló n elemű sorozatok (pontok) $\mathbf{R}^n$ halmaza a*

$$d(A,B) = \sqrt{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2 + \cdots + (a_n-b_n)^2}$$

$(A = (a_1, a_2, \ldots, a_n), B = (b_1, b_2, \ldots, b_n))$ távolságfüggvénnyel metrikus teret alkot, ahol $d(A,B)$-t az A és B pontok távolságának szokás nevezni.

D 7.6 *Legyen M metrikus tér a d távolságfüggvénnyel. Az M valamely nemüres H részhalmazát* **korlátos***nak mondjuk, ha van olyan $O \in M$ és van olyan $v \in \mathbf{R}$, hogy a $d(O,P) \leq v$ egyenlőtlenség a H minden P elemére teljesül. v-t a H halmaz egy* **korlát***jának nevezzük.*

D 7.7 *A H valós számhalmazt* **felülről (alulról) korlátos***nak nevezzük, ha van olyan v valós szám, hogy a H minden x elemére $x \leq v (x \geq v)$ teljesül, és bármely ilyen tulajdonságú v számot a H* **felső (alsó) korlátjá***nak nevezünk.*

T 7.8 *Felülről korlátos H halmaznak van legkisebb felső korlátja (***szuprémuma***), alulról korlátos H halmaznak van legnagyobb alsó korlátja (***infimuma***). (Jelölés: $\sup H, \inf H$.)*

T 7.9 *Valós számhalmaz akkor és csak akkor korlátos, ha alulról és felülről is korlátos.*

T 7.10 *Az $\mathbf{R}^k$ metrikus tér valamely ponthalmaza akkor és csak akkor korlátos, ha a halmaz elemeinek koordinátáiból alkotott számhalmaz korlátos.*

D 7.11 *Az M metrikus tér A pontjának δ sugarú* **környezetén (ill. teljes környezetén)** *azoknak az M-beli X pontoknak a halmazát értjük, amelyek eleget tesznek a $0 < d(X,A) < \delta$ (ill. $d(X,A) < \delta$) egyenlőtlenségnek, amelyben δ adott pozitív valós szám.*

D 7.12 *Legyen H az M metrikus tér tetszőleges részhalmaza. Ha az M-beli P pontnak van olyan teljes környezete, amelynek minden pontja H-hoz tartozik, akkor azt mondjuk, hogy P a H* **belső pontja***. Ha P-nek van olyan teljes környezete, amelynek metszete H-val üres, akkor P-t H* **külső pontjá***nak nevezzük. Végül, ha P bármely teljes környezete tartalmaz H-beli pontot is, de H-n kívüli pontot is, akkor azt mondjuk, hogy P a H* **határpontja***. A H halmazt* **zárt***nak hívjuk, ha minden határpontját tartalmazza, és* **nyílt***nak, ha egyetlen határpontját sem tartalmazza. Például minden $[a,b]$ zárt ((a,b) nyílt) intervallum az $\mathbf{R}$ metrikus tér zárt (nyílt) részhalmaza, ha $a,b \in \mathbf{R}$. (A $(-\infty,\infty)$ intervallumnak és az üres halmaznak nincs határpontja, így ezek zártnak és nyíltnak is tekinthetők.)*

Feladatok

34.$^\bullet$ Mutassuk meg, hogy a komplex számok $\mathbf{C}$ halmaza a $d(u,v) = |u-v| \quad (u,v \in \mathbf{C})$ távolságfüggvénnyel metrikus teret alkot.

35.$^\triangleright$ Legyen $M = \{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ és $d(\mathbf{a},\mathbf{b}) = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ $(\mathbf{a},\mathbf{b} \in M)$. Bizonyítsuk be, hogy M a d távolságfüggvénnyel metrikus teret alkot.

36.$^\triangleright$ Mutassuk meg, hogy a közönséges háromdimenziós tér valamely H ponthalmaza akkor és csak akkor korlátos, ha a H minden pontja egy O (origó) középpontú gömb belsejébe esik. A komplex számok $\mathbf{C}$ metrikus terének valamely H részhalmaza akkor és csak akkor korlátos, ha van olyan v valós szám, hogy a H minden z elemére $|z| \leq v$.

37.* Mutassuk meg, hogy komplanáris egységvektorok halmaza a vektori szorzat abszolút értékével metrikus teret alkot, ha a kollineáris vektorokat egyenlőknek tekintjük.

38.$^\bullet$ Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{R}^2$ halmaz metrikus teret alkot a

$$d(A,B) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| \quad (A = (a_1,a_2), B = (b_1,b_2))$$

metrikával. Ábrázoljuk az $(1, 0)$ pont 1 sugarú (teljes) környezetét.

39. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{R}^2$ halmaz metrikus teret alkot a

$$d(A, B) = \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\} \quad (A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2))$$

metrikával. Adjuk meg az $(1, -1)$ ponttól 1 távolságra lévő pontok halmazát.

40.$^{\triangleright}$ Legyen A a valós számok egy alulról korlátos nemüres halmaza. Igazoljuk, hogy ha $B = \{-x; \quad x \in A\}$, akkor $\inf A = -\sup B$.

41.* Felhasználva a Cauchy-Bunyakovszkij egyenlőtlenséget (l. **1.85** feladatot), bizonyítsuk be a **T 7.5** tételt.

42.$^{\triangleright}$ Legyen X tetszőleges végtelen halmaz. Bármely $p(\in X)$ és $q(\in X)$ esetén legyen

$$d(p, q) = \begin{cases} 1, & \text{ha } p \neq q; \\ 0, & \text{ha } p = q. \end{cases}$$

Bizonyítsuk be, hogy X a d metrikával metrikus teret alkot.

43.$^{\triangleright}$ Adjuk meg az előző feladatbeli metrikus tér nyílt és zárt részhalmazait.

Döntsük el, hogy a következő d függvények metrikák-e $\mathbf{R}$-en:

44.$^{\bullet}$ $d(x, y) = (x - y)^2$,

45.$^{\triangleright}$ $d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$,

46. $d(x, y) = |x^2 - y^2|$,

47. $d(x, y) = \dfrac{|x - y|}{1 + |x - y|}$.

Vizsgáljuk meg az alábbi sorozatokat korlátosság szempontjából:

48.$^{\bullet}$ $P_n(\dfrac{n+1}{n}, n)$,

49.$^{\triangleright}$ $P_n(\dfrac{3n+1}{2n}, \dfrac{n-1}{n})$,

50. $P_n(\dfrac{n^2}{n^2+1}, \dfrac{n-1}{n})$,

51. $P_n(\sin n, \cos n, \dfrac{1}{n})$,

52.$^{\triangleright}$ $z_n = \left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n$,

53.$^{\triangleright}$ $z_0 = 1, z_n = (1 + i)z_{n-1}$,

54. $\mathbf{v}_n = \dfrac{n-1}{n}\mathbf{i} + \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}\mathbf{j}$,

55.$^{\bullet}$ $\mathbf{v}_n = \dfrac{n^2-1}{n^2+n+1}\mathbf{i} + \mathbf{j} + \dfrac{\sin n}{n}\mathbf{k}$.

Sorozat határértéke; konvergencia és divergencia

D 7.13 *Metrikus térbeli pontsorozat* **határértéké***nek a tér olyan pontját nevezzük, amelynek bármely teljes környezetén kívül a sorozatnak legfeljebb véges sok eleme van. (Jelölés:* $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ *vagy* $A_n \longrightarrow A$*.) Ez azt jelenti, hogy az* M *metrikus tér* $[A_n]$ *pontsorozatának határértéke az* M*-beli* A *pont, ha bármely* ε *pozitív valós számhoz van olyan* n_0 *valós szám, hogy ha* $n > n_0$*, akkor* $d(A_n, A) < \varepsilon$*. Az ilyen* n_0*-t az* ε*-hoz tartozó* **küszöbszám***nak nevezzük.*
Speciálisan az a *számot az* $[a_n]$ *számsorozat határértékének mondjuk, ha bármely* ε *pozitív valós számhoz van olyan* n_0 *valós szám, hogy ha* $n > n_0$*, akkor* $|a_n - a| < \varepsilon$*. A vektorsorozat határértéke hasonlóan definiálható.*
Egy sorozatot **konvergens***nek mondunk, ha van határértéke, s* **divergens***nek, ha nincs.*

D 7.14 *Sorozat* **részsorozatai***n azokat a sorozatokat értjük, amelyek a sorozatból véges vagy végtelen sok elem elhagyásával állíthatók elő és a megtartott elemeket eredeti sorrendjükben vesszük figyelembe.*

T 7.15 *Konvergens sorozat minden részsorozata konvergens, s határértéke ugyanaz, mint az eredeti sorozaté.*

D 7.16 *Legyen* $[A_n]$ *az* M *metrikus tér egy pontsorozata. Az* $[A_n]$ *sorozat* **torlódási helyé***nek (***torlódási pont***jának) nevezzük az* M *minden olyan pontját, amely az* $[A_n]$ *valamely részsorozatának határértéke. (Ez azt jelenti, hogy konvergens sorozatnak egyetlen torlódási helye van, s ez a sorozat határértéke. Megjegyezzük, hogy az állítás megfordítása nem igaz.)*

T 7.17 *(***Bolzano-Weierstrass-tétel***) Az* $\mathbf{R}^k$ *metrikus tér minden korlátos sorozatának van konvergens részsorozata. (Minden korlátos számsorozatnak illetve vektorsorozatnak van konvergens részsorozata.)*

T 7.18 *(***Cauchy-féle konvergenciakritérium***) Az* $\mathbf{R}^k$ *metrikus tér* $[A_n]$ *pontsorozata akkor és csak akkor konvergens, ha bármely* ε *pozitív valós számhoz megadható olyan* n_0 *valós szám, hogy ha* $m, n > n_0$*, akkor* $d(A_m, A_n) < \varepsilon$*.*
Feladatok megoldásában sokszor jobban alkalmazható a következő ekvivalens megfogalmazás:
Az $\mathbf{R}^k$ *metrikus tér* $[A_n]$ *pontsorozata akkor és csak akkor konvergens, ha bármely* ε *pozitív valós számhoz van olyan* n_0 *valós szám, hogy ha* $n > n_0$*, akkor* $d(A_n, A_{n+p}) < \varepsilon$ *minden* p *pozitív egész számra teljesül.*

D 7.19 *A valós* $[a_n]$ *számsorozatról akkor mondjuk, hogy* **végtelenhez divergál***, ha bármely* k *pozitív valós számhoz megadható olyan* n_0 *valós szám, hogy ha* $n > n_0$*, akkor* $a_n > k$*; s akkor mondjuk, hogy* **mínusz végtelenhez divergál***, ha bármely* k *negatív valós számhoz van olyan* n_0 *valós szám, hogy* $n > n_0$ *esetén* $a_n < k$*. (Jelölések:* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ *vagy* $a_n \longrightarrow \infty$*, illetve* $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ *vagy* $a_n \longrightarrow -\infty$*.)*

T 7.20 *Végtelenhez divergáló sorozat minden részsorozata végtelenhez divergál; mínusz végtelenhez divergáló sorozat minden részsorozata mínusz végtelenhez divergál.*

Feladatok

A konvergencia definíciója alapján bizonyítsuk be, hogy az alábbi feladatokban megadott $[a_n]$ sorozat a-hoz konvergál, azaz minden pozitív ε-hoz adjunk meg egy n_0 küszöbszámot. Hányadik elemtől (n_1) kezdve esnek a sorozat elemei az a szám r sugarú teljes környezetébe?

56.• $a_n = \dfrac{2n-1}{2n+1}$, $a = 1$, $r = 10^{-2}$,

57. $a_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$, $a = 0$, $r = 10^{-6}$,

58.▷ $a_n = \dfrac{n+2}{3n-8}$, $a = \dfrac{1}{3}$, $r = \dfrac{1}{900}$,

59.• $a_n = 3^{\frac{1}{n}}$, $a = 1$, $r = \sqrt[99]{3} - 1$,

60.▷ $a_n = \dfrac{4^n}{3 \cdot 4^n + 1}$, $a = \dfrac{1}{3}$, $r = \dfrac{1}{3}$,

61.▷ $a_n = \lg \dfrac{n+1}{n+2}$, $a = 0$, $r = \lg 1{,}002$,

62. $a_n = \sqrt{\dfrac{n+4}{n}}, \quad a = 1,\ r = 0{,}1,$ **63.** $a_n = 1+(-1)^n \dfrac{2}{3^n},\ a = 1,\ r = \dfrac{2}{3^{100}},$

64.$^{\triangleright}$ $a_n = \dfrac{(-1)^n + 4n}{5n + (-1)^{n-1}}, \quad a = \dfrac{4}{5}, \quad r = 10^{-2},$

65.$^{\triangleright}$ $a_n = \dfrac{n}{n^3+1}, \quad a = 0, \quad r = 10^{-3}.$

66.* Bizonyítsuk be, hogy ha az $\mathbf{R}^m$ $(m \in \mathbf{N}^+)$ metrikus tér valamely korlátos sorozatának egy torlódási helye van, akkor a sorozat konvergens.

67.* A Cauchy-féle konvergenciakritériumot (**T 7.18**) felhasználva mutassuk meg, hogy az $a_n = \sum_{k=1}^{n} k^{-1}$ sorozat divergens.

68.$^{\bullet}$ Konvergens-e az $[a_n]$ sorozat, ha teljesíti a következő feltételt: Minden pozitív ε valós szám esetén van olyan n_0 küszöbszám, hogy ha $n > n_0$, akkor $|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$.

Bizonyítsuk be, hogy az alábbi sorozatok végtelenhez divergálnak. Milyen n_1 indextől kezdve lesznek a sorozat elemei nagyobbak az adott k pozitív számnál? (Lehetőleg a legkisebb ilyen n_1-t adjuk meg.)

69. $a_n = \lg(n+1),\ k = 10,$ **70.**$^{\bullet}$ $a_n = \dfrac{n-1}{\sqrt{n}+1},\ k = 999,$

71.$^{\triangleright}$ $a_n = \dfrac{n^2}{n+1},\ k = 20.$

Monoton és korlátos sorozatok, műveletek sorozatokkal

D 7.21 *Az $[a_n]$ valós számsorozatról azt mondjuk, hogy* **monoton növekvő** *(***csökkenő***), ha:*

$$n_1 < n_2 \Longrightarrow a_{n_1} \le a_{n_2} \quad (n_1 < n_2 \Longrightarrow a_{n_1} \ge a_{n_2});$$

szigorúan monoton növekvő *(***csökkenő***), ha:*

$$n_1 < n_2 \Longrightarrow a_{n_1} < a_{n_2} \quad (n_1 < n_2 \Longrightarrow a_{n_1} \ge a_{n_2}).$$

T 7.22 *Monoton növekvő felülről korlátos sorozat konvergens, mégpedig legkisebb felső korlátjához konvergál. Monoton csökkenő alulról korlátos sorozat szintén konvergens, s a legnagyobb alsó korlátjához tart.*

D 7.23 *Két számsorozat (vektorsorozat)* **összegé***n,* **különbségé***n,* **szorzatá***n,* **hányadosá***n azt a sorozatot értjük, amelynek n-edik eleme a két sorozat n-edik elemének összege, különbsége, szorzata, hányadosa. (Megjegyezzük, hogy a hányadossorozat n-edik elemének akkor van értelme, ha a nevező nem 0.)*

T 7.24 *Korlátos számsorozatok összege, különbsége és szorzata szintén korlátos.*

D 7.25 *Egy számsorozatot (ill. vektorsorozatot)* **nullasorozat***nak nevezünk, ha határértéke 0 (ill.* **0***).*

T 7.26 *Egy számsorozat akkor és csak akkor korlátos, ha bármely nullasorozattal képezett szorzata szintén nullasorozat.*

T 7.27 *Ha a valós* $[a_n]$ *számsorozatra* $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$*, akkor* $\lim_{n\to\infty} a_n^{-1} = 0$*. Ha pedig* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *és van olyan* m *valós szám, hogy* $n > m$ *esetén* $a_n > 0$*, akkor* $\lim_{n\to\infty} a_n^{-1} = \infty$*; míg ha van olyan* m *valós szám, hogy* $n > m$ *esetén* $a_n < 0$*, akkor* $\lim_{n\to\infty} a_n^{-1} = -\infty$.

T 7.28 *Bármely* $[a_n + ib_n]$ *komplex számsorozat akkor és csak akkor konvergens, ha az* $[a_n]$ *és* $[b_n]$ *valós számsorozatok konvergensek.*

T 7.29 *Ha az* $[a_n]$ *és* $[b_n]$ *(komplex vagy valós) számsorozatok konvergensek, akkor:*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n; \quad \lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = c \lim_{n\to\infty} a_n, \quad \lim_{n\to\infty} a_n^k = (\lim_{n\to\infty} a_n)^k \ (k \in \mathbf{N}^+);$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} b_n}, \text{ ha } \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0;$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim_{n\to\infty} a_n}, \text{ha} a_n \geq 0.$$

T 7.30 *("***Rendőr-elv***") Ha* $[a_n], [b_n], [c_n]$ *olyan valós számsorozatok, hogy*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = h,$$

és van olyan n_0 *valós szám, hogy* $n > n_0$ *esetén* $a_n \leq b_n \leq c_n$ *, akkor a* $[b_n]$ *sorozat is konvergens, és* $\lim_{n\to\infty} b_n = h$.

T 7.31 *Ha az* $[a_n]$ *és* $[b_n]$ *sorozatok konvergensek, és van olyan* n_0 *valós szám, hogy* $n > n_0$ *esetén* $a_n \leq b_n$*, akkor* $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$.

T 7.32 *Végtelenhez divergáló sorozatok összege és szorzata szintén végtelenhez divergál.*

T 7.33 *Végtelenhez divergáló* $[a_n]$ *sorozat és tetszőleges alulról korlátos* $[b_n]$ *sorozat összege végtelenhez divergál. Ha van olyan* n_0 *valós szám, hogy* $n > n_0$ *esetén* $a_n > 0$*, akkor a sorozatok szorzata is a végtelenhez divergál.*

T 7.34 *(***Bernoulli-egyenlőtlenség***) Ha* $h > -1$*, akkor az* $(1+h)^n \geq 1+nh$ *egyenlőtlenség minden* n *nemnegatív egész számra teljesül.*

T 7.35 *Ha* $q \in \mathbf{C}$ *és* $|q| < 1$*, akkor* $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

T 7.36 *Bármely pozitív* q *számra:* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = 1$.

T 7.37 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

T 7.38 *Az* $\mathbf{R}^k$ *metrikus tér* $P_n(x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{kn})$ *pontsorozata akkor és csak akkor konvergens, ha az elemek koordinátáiból álló* $[x_{1n}], [x_{2n}], \ldots, [x_{kn}]$ *számsorozatok külön-külön konvergensek; mégpedig* $\lim_{n\to\infty} P_n = P_0(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{k0})$ *akkor és csak akkor, ha* $\lim_{n\to\infty} x_{jn} = x_{j0}$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$.

Feladatok

72.$^{\triangleright}$ Legyen $[a_n]$ valós nullasorozat, n_0 egy rögzített pozitív egész szám, $[b_n]$ pedig olyan valós vagy komplex számsorozat, amelyre $|b_n| \le a_n$, ha $n \ge n_0$. Bizonyítsuk be,hogy $[b_n]$ is nullasorozat.

73.$^{\bullet}$ Bizonyítsuk be, hogy bármely z komplex számra: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{z^n}{n!} = 0.$

74.$^{\bullet}$ Bizonyítsuk be, hogy bármely nemnegatív egész k-ra és 1-nél nagyobb a-ra: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0.$

75.$^{\bullet}$ Mutassuk meg, hogy minden nemnegatív egész k-ra: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{n!} = 0.$

76.$^{\triangleright}$ Bizonyítsuk be, ha $|q| < 1$, akkor $\lim_{n\to\infty} nq^n = 0.$

77. Mutassuk meg, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$

78.$^{\triangleright}$ Legyen $z \in \mathbf{C}$ és $|z| = 1$. Bizonyítsuk be, hogy a $[z^n]$ sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha $z = 1$.

Vizsgáljuk meg, hogy a következő sorozatoknak van-e határértékük vagy torlódási helyeik. Mely sorozatok divergálnak végtelenhez illetve mínusz végtelenhez?

79.$^{\bullet}$ $a_n = \dfrac{\sin n\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2n\pi}},$

80.$^{\triangleright}$ $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}},$

81.$^{\bullet}$ $a_n = \left(\dfrac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}}\right)^n,$

82.$^{\bullet}$ $a_n = \dfrac{n+2}{2n} + \dfrac{2}{(-1)^n},$

83.$^{\triangleright}$ $0, 1, \dfrac{1}{2}, 4, \dfrac{2}{3}, 9, \dfrac{3}{4}, 16, \dots,$

84.$^{\bullet}$ $a_n = \dfrac{2^{n+1}}{3^n + 4^{n-1}},$

85. $a_n = \dfrac{2^{n+1} + (-1)^n}{2^n},$

86. $a_n = -\dfrac{n^3+1}{n^2+1},$

87. $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{ha } n = 3k; \\ \frac{n^2-n}{n^2}, & \text{ha } n = 2k+1; \\ \frac{n+1}{2n+1}, & \text{ha } n = 2k+2 \quad (k \in \mathbf{N}^+), \end{cases}$

88.$^{\triangleright}$ $a_n = \begin{cases} n^2, & \text{ha } n \le 10^5; \\ \frac{n+1}{2n+1}, & \text{ha } n > 10^5 \end{cases},$

89.$^{\bullet}$ $a_n = \dfrac{a_0n^p + a_1n^{p-1} + \cdots + a_{p-1}n + a_p}{b_0n^q + b_1n^{q-1} + \cdots + b_{q-1}n + b_q}, \quad a_j, b_k \in \mathbf{R},$
$j = 0, 1, \dots, p; \quad k = 0, 1, \dots, q, \quad a_0 \ne 0, \quad b_0 \ne 0.$

90.$^{\bullet}$ Vizsgáljuk meg konvergencia szempontjából a **48.** — **55.** feladatokban megadott sorozatokat.

Konvergensek-e az alábbi komplex számsorozatok? Ha konvergensek, akkor számítsuk ki a határértéküket. (A gyökvonás mindenütt valós gyökvonást jelent.)

91.• $z_n = \dfrac{n^2 - i(n^2-1)}{n^2 - i}$,

92.• $z_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^2+n} + in}{n+1}$,

93.• $z_n = \sqrt{n+1} - i\sqrt{n}$,

94.• $z_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})i$,

95.▷ $z_n = \dfrac{i^n}{3^n + i^n}$,

96.▷ $z_n = (\sqrt{1-n^2} - in)n \quad (n \in \mathbf{N})$,

97.▷ $z_n = (1-i)^n$,

98.• $z_n = \left(\cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}\right)^n$,

99. $z_n = \sum\limits_{k=0}^{n} i^k$,

100.▷ $z_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(1+i)^k}$,

101. $z_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{i}{1+i}\right)^k$,

102. $z_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1-3i}{1+2i}\right)^k$.

Vizsgáljuk meg az alábbi valós számsorozatokat monotonitás, korlátosság és konvergencia szempontjából. Adjuk meg – ha léteznek – a sorozatok határértékét, infimumát és szuprémumát.

103.• $a_n = \dfrac{2n-1}{3n+1}$,

104.• $a_n = \dfrac{5n-2}{5-10n}$,

105.• $a_n = \dfrac{n^2+1}{n(n+1)}$,

106. $a_n = \dfrac{2n^2-1}{n^2+n+1}$,

107. $a_n = \dfrac{1-5^{n+2}}{5^n}$,

108.• $a_n = \dfrac{3n}{\sqrt{n^2+1}}$,

109.▷ $a_n = \dfrac{n!}{n^2}$,

110. $a_n = \begin{cases} n^2, & \text{ha } n = 2k; \\ \frac{n-1}{n}, & \text{ha } n = 2k-1, \end{cases}$

111.▷ $a_n = \dfrac{k^n}{n!} \quad (k \in \mathbf{N}^+)$,

112.⋆ $a_n = 1 + (-1)^n \dfrac{n+1}{n}$,

113.▷ $a_n = \dfrac{1+2+\cdots+n}{(n+1)(n+10)}$,

114.▷ $a_n = \dfrac{2(-1)^n}{3\sqrt[3]{n}+1}$,

115.▷ $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{5^k}$,

116. $a_n = \dfrac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}} \quad (n \geq 3)$,

117. $a_n = \dfrac{n^2 - 8\cdot 4^n}{n^2 + 6\cdot 4^n}$,

118.• $a_n = \sqrt[4]{\dfrac{2^n+1}{n+2^n}}$,

119.▷ $a_n = \dfrac{2^n}{3^n+1}\sin\dfrac{1}{n}$,

120.• $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n^2-1} - n)}$.

Döntsük el, hogy az alábbi valós számsorozatok konvergensek vagy divergensek. Ha konvergensek, akkor határozzuk meg a határértéküket; ha divergensek, akkor nézzük meg, divergálnak-e végtelenhez, illetve mínusz végtelenhez.

121.• $a_n = \dfrac{1000n^3 + 20n^2}{0,001n^4 + 100n^2}$,

122. $a_n = \dfrac{(n-1)^3 - (n+1)^3}{(n+1)^2 + (n-1)^2}$,

123.• $a_n = \dfrac{5}{1+(-1)^n 5n^2} - \dfrac{n+2}{n+3}$,

124.• $a_n = \left(\dfrac{n+1}{2n-1}\right)^5$,

125.$^\triangleright$ $a_n = \dfrac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$,

126. $a_n = \dfrac{n!}{n! + (n+1)!}$,

127.$^\bullet$ $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^3 + 2n + 1}}{n+1}$,

128. $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n}}{n + \sqrt{2}}$,

129. $a_n = \dfrac{n - \sqrt[3]{n^2}}{n + \sqrt{n^2+1}}$,

130.$^\bullet$ $a_n = \dfrac{2n^3}{2n^2+3} + \dfrac{1-5n^2}{5n+1}$,

131.$^\bullet$ $a_n = \dfrac{\sqrt{n^3+3n^2} + \sqrt[3]{n^4+1}}{\sqrt[4]{5n^6+2} + \sqrt[5]{n^7+3n^3}}$,

132. $a_n = \dfrac{\sqrt{n^6+1} - \sqrt[3]{n-1}}{\sqrt[3]{n^4-3} + \sqrt{n+1}}$,

133. $a_n = \dfrac{(\sqrt{n^2+1} + n)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$,

134. $a_n = \dfrac{\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}}}{\sqrt{n+1}}$,

135.$^\bullet$ $a_n = \dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{(5n-1)^5}$,

136.$^\triangleright$ $a_n = \dfrac{1+2+\cdots+n}{n+2} - \dfrac{n}{2}$,

137.$^\triangleright$ $a_n = \dfrac{1-2+\cdots+(2n-1)-2n}{\sqrt{n^2+1}}$,

138.$^\triangleright$ $a_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \cdots + \dfrac{n-1}{n^2}$,

139. $a_n = \dfrac{1\cdot2 + 2\cdot3 + \cdots + n(n+1)}{n^3}$,

140.* $a_n = \dfrac{1}{n}\left(\left(a+\dfrac{1}{n}\right)^2 + \left(a+\dfrac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(a+\dfrac{n-1}{n}\right)^2\right)$, $a \in \mathbf{R}$,

141.$^\triangleright$ $a_n = \dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}$, $\quad |a|, |b| < 1$,

142.$^\bullet$ $a_n = \dfrac{(2+n)^{100} - n^{100} - 200n^{99}}{n^{98} - 10n^2 + 1}$,

143.$^\bullet$ $a_n = \dfrac{1}{1\cdot2} + \dfrac{1}{2\cdot3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}$,

144.* $a_n = \sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\ldots\sqrt[2^n]{2}$,

145.* $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}\right)$,

146.$^\bullet$ $a_n = n^2(n - \sqrt{n^2+1})$,

147.$^\bullet$ $a_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$,

148.$^\triangleright$ $a_n = \sqrt[3]{n^2 - n^3} + n$,

149. $a_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$,

150.$^\bullet$ $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1} - n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$,

151.$^\bullet$ $a_n = \dfrac{(1-4-9-\cdots-(5n-6))(\sqrt{n^4-n^3} - \sqrt{n^4+n^3})}{n^3}$,

152.$^\triangleright$ $a_n = \dfrac{2^n + 3^{-n}}{2^{-n} - 3^n}\,\dfrac{2n - \sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{n^2+3} - n}\sin n!$,

153.* $a_n = \dfrac{2n + \sqrt{n^3+n^2+1} - \sqrt[3]{n^4+n^3-1}}{\sqrt{n^5+n^4+2n} - \sqrt{n^5-n^4+2}}$,

154.$^\triangleright$ $a_n = \dfrac{n}{3^n}$,

155.$^\bullet$ $a_n = \sqrt[n]{1 + \dfrac{1}{n}}$,

156.• $a_n = \sqrt[3n^2]{n^2+2n+4}$, **157.**▷ $\sqrt[n]{5n^2-30n+21}, \quad n \geq 2$,

158. $a_n = \sqrt[2n]{\dfrac{2n-1}{2n+1}}$, **159.**▷ $a_n = \sqrt[n^2]{n}, \quad n \geq 2$,

160.• $\sqrt[n]{\dfrac{a_0n^p + a_1n^{p-1} + \cdots + a_{p-1}n + a_p}{b_0n^q + b_1n^{q-1} + \cdots + b_{q-1}n + b_q}}; \quad a_j, b_k \in \mathbf{R}$

$j = 0, 1, \ldots, p; \quad k = 0, 1, \ldots, q; \quad \dfrac{a_0}{b_0} > 0.$

Valós számsorozatok hatványa, logaritmusa

D 7.39 *Az $[a_n]$valós számsorozat $[b_n]$ valós kitevőjű* **hatványá***nak nevezzük az $[a_n^{b_n}]$ sorozatot, ha $a_n^{b_n}$ legfeljebb véges sok elem kivételével értelmezve van a valós számok körében. Ha a_n legfeljebb véges sok elem kivételével pozitív, akkor az $[\ln a_n]$ sorozatot az $[a_n]$ sorozat természetes alapú* **logaritmusá***nak nevezzük. (Természetesen más alapú logaritmusok is értelmezhetők.)*

T 7.40 *Az $\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]$ sorozat konvergens (a határértéket e-vel jelöljük), azaz*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2,718281828459045\ldots.$$

T 7.41 *Bármely $[a_n]$ valós számsorozat esetén $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ akkor és csak akkor, ha $\lim_{n\to\infty} e^{a_n} = e^a \quad (a \in \mathbf{R})$. Bármely $[a_n]$ pozitív elemű sorozatra és a pozitív valós számra*
$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ akkor és csak akkor, ha $\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \ln a$.

T 7.42 *Legyen $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ és $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Ha $0 < a < \infty, \quad -\infty < b < \infty$ akkor $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b$. Ha $0 < a < 1, \quad b = \infty$ vagy $1 < a \leq \infty, \quad b = -\infty$ vagy $a = \infty, \quad -\infty \leq b < 0$ vagy $a = 0, \quad 0 < b \leq \infty$, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = 0$. Abban az esetben, ha $0 < a < 1, \quad b = -\infty$ vagy $1 < a \leq \infty, \quad b = \infty$ vagy $a = \infty, \quad 0 < b \leq \infty$ akkor $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \infty$.*
(Megjegyezzük, hogy az $a = \infty, \quad b = 0$ valamint az $a = 1, \quad b = \pm\infty$ és az $a = 0, \quad b = 0$ esetekben további vizsgálatok szükségesek. $a < 0$ esetben általában nem értelmezhetők a hatványok a valós számok körében.)

Feladatok

161.▷ Bizonyítsuk be, hogy bármely k egész számra $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)^n = e^k$.

162.• Bizonyítsuk be, hogy ha $[a_n] \quad (a_n \in \mathbf{N}^+)$ olyan sorozat, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{a_n}\right)^{a_n} = e^k \ (k \in \mathbf{Z})$.

163.$^\triangleright$ Bizonyítsuk be, hogy bármely $p \in \mathbf{Z}$ és $q \in \mathbf{N}^+$ (azaz bármely $\frac{p}{q}$ racionális szám) esetén $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{p}{q}}{n}\right)^n = e^{\frac{p}{q}}$.

164.$^\triangleright$ Legyen $[a_n]$ végtelenhez és $[b_n]$ mínusz végtelenhez tartó számsorozat. Bizonyítsuk be, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{a_n}\right)^{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{b_n}\right)^{b_n} = e^r$ $(r \in \mathbf{R})$ (A **161.** — **163.** feladatok általánosítása.)

165.$^\bullet$ Bizonyítsuk be, hogy ha $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \infty$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{a_n}\right)^{a_n} = e^r$ $(r \in \mathbf{R})$.

166.$^\triangleright$ Bizonyítsuk be, hogy ha $0 < \lim_{n\to\infty} a_n = a < \infty$ és $-\infty < \lim_{n\to\infty} b_n = b < \infty$, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b$.

Konstruáljunk olyan $[a_n]$ és $[b_n]$ sorozatokat, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ és

167.$^\triangleright$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = r \quad (r \in \mathbf{R})$, **168.**$^\triangleright$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$,

169.$^\triangleright$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$, **170.**$^\triangleright$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = r \quad (r \in \mathbf{R}^+)$,

171.$^\triangleright$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \infty$.

Konstruáljunk olyan $[a_n]$ és $[b_n]$ sorozatokat, amelyekre $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ és

172.$^\triangleright$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = r \quad (r \in \mathbf{R}^+)$, **173.**$^\triangleright$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \infty$.

Konstruáljunk olyan $[a_n]$ és $[b_n]$ sorozatokat, amelyekre $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad (a_n > 0)$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ és

174.$^\triangleright$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = r \quad (r \geq 0)$, **175.**$^\triangleright$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \infty$.

176.$^\triangleright$ Bizonyítsuk be, hogy ha $a_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ és $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = 0$.

A **T 7.41** tétel és a **161.** — **166.** feladatok alkalmazásával számítsuk ki a következő sorozatok határértékét:

177.$^\bullet$ $a_n = \left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^{2^n}$, **178.**$^\bullet$ $a_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$, **179.**$^\triangleright$ $a_n = \left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{2n}$,

180.$^\triangleright$ $a_n = \left(\frac{n-2}{n}\right)^{n^2}$, **181.**$^\triangleright$ $a_n = \left(\frac{n-1}{3n}\right)^{2n+1}$, **182.**$^\bullet$ $a_n = \left(2-\frac{1}{n}\right)^n$,

183. $a_n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$, **184.** $a_n = \left(\frac{2^n+3}{2^n+1}\right)^n$, **185.** $a_n = \left(\frac{n^2-n+1}{n^2+n+1}\right)^n$,

186. $a_n = (\sqrt{3n^4+2n-1} - \sqrt{3n^4+n^2-n})\left(\frac{-3n+1}{3n+4}\right)^{4n-2}$,

187.$^\bullet$ $a_n = \left(\frac{n^2-2n+1}{n^2-2n+4}\right)^{3n^2-6n+5} + \frac{\sqrt{n^4-n^2+6}-\sqrt{2n^3+n-1}}{n^2+1}$,

188.$^\bullet$ $a_n = n^2(\sqrt{n^6-n+2} - \sqrt{n^6+4n-4})\left(\frac{n^2+3n+1}{n^2+2n}\right)^{n^2}$.

Rekurzív sorozatok

A **189.** — **202.** feladatokban a sorozatokat rekurzív képlettel adtuk meg. Számítsuk ki a határértéküket, ha létezik.

189.$^{\triangleright}$ $a_1 = 6,\ a_{n+1} = 5 - \dfrac{6}{a_n}$.

190.$^{\bullet}$ Legyen a adott pozitív szám. Mutassuk meg, hogy tetszőleges a_1 pozitív számot választva az

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right)$$

sorozat $\sqrt{a}$-hoz konvergál. (Pozitív szám négyzetgyöke kiszámítható a fenti sorozattal.)

191.* Az előző feladat általánosításaként mutassuk meg, hogy bármely a pozitív számra az

$$a_1 > 0,\ a_{n+1} = \frac{1}{k}\left((k-1)a_n + \frac{a}{a_n^{k-1}}\right)$$

rekurziós képlettel megadott sorozat határértéke $\sqrt[k]{a}$, ahol $k \geq 2$ egész szám.

192.$^{\triangleright}$ $a_1 = a \quad (\in \mathbf{R}), \quad a_{n+1} = 2a_n^2 + a_n$, **193.**$^{\bullet}$ $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n^3 + 1}$,

194.$^{\triangleright}$ $a_1 = \sqrt{a}, a_{n+1} = \sqrt{a + a_n},\ (a > 0)$, **195.**$^{\triangleright}$ $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} a_n$.

Legyenek $0 < b \leq a$ tetszőleges rögzített valós számok. A következő rekurzív definícióval egyszerre adunk meg két sorozatot:

$$a_1 = a, \quad b_1 = b, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}}.$$

Igazoljuk, hogy

196. $[a_n]$ monoton csökkenő, $[b_n]$ monoton növekvő sorozat,

197. Az a_n és a b_n számok mértani közepe minden n-re ugyanaz,

198. $0 \leq a_{n+1} - b_{n+1} \leq \dfrac{a_n - b_n}{2}$, **199.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \sqrt{ab}$.

Tekintsük az úgynevezett Fibonacci-sorozatot: $a_1 = a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Mutassuk meg:

200.* $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$, **201.*** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$,

202. Ha C az AB szakasz belső pontja és $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{CB}{AB}$, akkor ez az arány $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ (az aranymetszés arányszáma).

Vegyes feladatok

203.$^{\triangleright}$ Igazoljuk, hogy ha $|\lim_{n\to\infty} a_n| < 1$, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n^n = 0$.

204.$^{\triangleright}$ Igazoljuk, hogy ha $\lim_{n\to\infty} a_n > 1$, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n^n = \infty$.

205.* Bizonyítsuk be, hogy minden $m(\in \mathbf{N}^+)$-ra

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^m + 2^m + \cdots + n^m}{n^{m+1}} = \frac{1}{1+m}.$$

206.$^{\bullet}$ Mutassuk meg, hogy ha $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$, akkor $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

207. A **206.** feladat alapján határozzuk meg az $\left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n\right]$ sorozat határértékét.

208. a **206.** feladat alkalmazásával határozzuk meg az $\left[\left(1 - \frac{1}{n^k}\right)^n\right]$ $(k \in \mathbf{N}^+)$ sorozat határértékét.

209. Bizonyítsuk be, hogy ha minden n-re $b_n > 0$ és $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = b < 1$, akkor $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

210.$^{\triangleright}$ Legyen $a_n \geq -1$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $k \in N^+ - \{1\}$. Bizonyítsuk be, hogy $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{1 + a_n} = 1$.

211.* Mutassuk meg, hogy az $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos k}{3^k}$ sorozat konvergens.

212.* Bizonyítsuk be, hogy ha $a > 1$, akkor az $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a^k + 1}$ sorozat konvergens.

213.* Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_k$ nemnegatív valós számok. Bizonyítsuk be, hogy az $[\sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n}]$ sorozat konvergens, és adjuk meg a határértékét.

214. Egy egységnyi oldalú négyzetet 9 egybevágó négyzetre bontunk, ezek közül a középsőt beszínezzük. A második lépésben a megmaradó nyolc kis négyzet mindegyikét 9 egybevágó négyzetre bontjuk, majd mindegyikben a középsőt ismét beszínezzük. Az eljárást folytatjuk. Mekkora lesz az n-edik lépés után beszínezett részek területének összege? Jelöljük s_n-nel az n-edik lépés után fehéren maradó rész területét. Határozzuk meg $\lim_{n\to\infty} s_n$ értékét!

215.* Bizonyítsuk be, hogy minden sorozatnak van monoton részsorozata.

216.* Igazoljuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} n(e^{\frac{1}{n}} - 1) = 1$.

217.$^{\triangleright}$ Mutassuk meg, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} n \ln(1 + \frac{1}{n}) = 1$.

218.$^{\triangleright}$ Számítsuk ki az $a_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ sorozat határértékét.