7. Sorozatok (megoldások)

1. $0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}$.

2. $2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{6}{5}$.

3. $1, \sqrt{6}, \sqrt{7}-1, \sqrt{2}, 3-\sqrt{3}, \sqrt{10}-2$.

4. $\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. $1, 4, 9, 16, 25$.

6. $3, 9, 18, 30, 45$.

7. $-2, 2, -4, 4, -6$.

8. $-1, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{3}{8}$.

9. $a_1 = \sum_{k=1}^{1}\left(\sum_{j=1}^{k} j\right) = \sum_{j=1}^{1} j = 1, a_2 = \sum_{k=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{k} j\right) = \sum_{j=1}^{1} j + \sum_{j=1}^{2} j = 1 + (1+2) = 4$, hasonlóan $a_3 = 10, a_4 = 20, a_5 = 35$.

10. $\left(\frac{i-1}{i+1}\right)^n = i^n$, ezért: $1, i, -1, -i, 1$.

11. $\left(\frac{(i-1)^3}{2}\right)^n = (i+1)^n$, így: $1, i+1, 2i, 2(i-1), -4$.

12. $a_n = 2n$.

13. $a_n = -8-5n$.

14. $a_n = 3\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^k} = \frac{10^n-1}{3\cdot 10^n}$.

15. $a_n = (-0,1)^n$.

16. $a_n = 235\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^{3k}} = \frac{235}{999}\left(1 - \frac{1}{10^{3n}}\right)$.

17. $1 + \frac{1}{2^{n-1}}$.

18. $a_n = 1 + (-1)^n$.

19. $a_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ vagy "utasítással" $a_n = \begin{cases} -1, & \text{ha } n = 4k-3 \text{ vagy } 4k-2; \\ 1, & \text{ha } n = 4k-1 \text{ vagy } 4k\ . \end{cases}$

20. $a_n = \frac{n^2+1}{5n-2}$.

21. $a_n = \cos\frac{n\pi}{3}$.

22. $a_n = \begin{cases} k, & \text{ha } n = 2k-1; \\ \frac{1}{k+1}, & \text{ha } n = 2k. \end{cases}$

23. $a_n = i^{2n-1}$.

24. $a_n = \cos\frac{2n\pi}{3} + i\sin\frac{2n\pi}{3}, n \in \mathbf{N}$.

25. $(i-1)^{n+4} = -4(i-1)^n$, ezért $a_n = (i-1)^n, n \in \mathbf{N}$.

26. A sorozat minden tagja -1.

27. $2, \frac{3}{2}, 1, 0$; az 5.elem már nem létezik.

28. $1, 2, \frac{1}{2}, \frac{-3}{4}, \frac{-5}{8}$.

29. $1, 2, \frac{5}{2}, \frac{29}{10}, \frac{941}{290}$.

30. $-1, i+1, 3i, i-9, 80-17i$.

31. $2i, i-3, 9-5i, 57-89i, -4671-10145i$.

32. $\mathbf{i}, \mathbf{j}, -\mathbf{k}, \mathbf{i}, \mathbf{j}$.

33. $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{0}, \mathbf{0}$.

34. Ha $u = u_1 + iu_2$ és $v = v_1 + iv_2$, akkor $|u - v| = \sqrt{(u_1-v_1)^2 + (u_2-v_2)^2}$.

35. Tetszőleges $\mathbf{a}, \mathbf{b}(\in M)$ vektorokra

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \mathbf{a} \neq \mathbf{b}, \\ 0, & \text{ha } \mathbf{a} = \mathbf{b}; \end{cases}$$

ezért csak a háromszög-egyenlőtlenséggel kell részletesebben foglalkozni. Legyen $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in M$. Ha van köztük két egyenlő vektor, akkor a háromszög-egyenlőtlenség nyilvánvalóan teljesül, mégpedig egyenlőséggel. Ha $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ között nincsenek egyenlők, akkor $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + d(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = 2 > 1 = d(\mathbf{a}, \mathbf{c})$.

36. Ha H korlátos, akkor van olyan Q pont a térben és olyan v pozitív valós szám hogy a H minden P pontjára $d(Q,P) < v$. Ebből $d(O,P) \leq d(O,Q) + d(Q,P) < d(O,Q) + v$, azaz H minden pontja benne van az O középpontú $d(O,Q) + v$ sugarú gömb belsejében. Az állítás megfordítása nyilvánvaló. A feladat komplex számokra vonatkozó része hasonlóan bizonyítható.

37. Csak a háromszög-egyenlőtlenség bizonyítását vázoljuk. Legyenek $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ komplanáris egységvektorok. Ha az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok szöge α, a $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok szöge β, akkor

$$d(\mathbf{a},\mathbf{c}) = |\mathbf{a} \times \mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{c}||\sin(\alpha \pm \beta)| = |\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta| \leq$$

$$|\sin\alpha\cos\beta| + |\cos\alpha\sin\beta| = |\sin\alpha||\cos\beta| + |\cos\alpha||\sin\beta| \leq$$

$$|\sin\alpha| + |\sin\beta| = d(\mathbf{a},\mathbf{b}) + d(\mathbf{b},\mathbf{c}).$$

38. Csak a háromszög-egyenlőtlenség bizonyítását adjuk meg. Ha $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ és $C(c_1, c_2)$ az $\mathbf{R}^2$ metrikus tér tetszőleges pontjai, akkor

$$d(A,C) = |a_1 - c_1| + |a_2 - c_2| = |a_1 - b_1 + b_1 - c_1| + |a_2 - b_2 + b_2 - c_2|$$

$$\leq |a_1 - b_1| + |b_1 - c_1| + |a_2 - b_2| + |b_2 - c_2| = d(A,B) + d(B,C).$$

Az $(1,0)$ pont 1 sugarú környezete a $(0,0), (1,-1), (2,0), (1,1)$ csúcspontú négyzet belső pontjainak halmaza az $(1,0)$ pont kivételével.

39. Az előző feladathoz hasonló módon járhatunk el. Az $(1,-1)$ ponttól 1 távolságra lévő pontok halmaza a $(0,0), (2,0), (2,-2), (0,-2)$ csúcspontú négyzet határpontjai.

40. Minden $x (\in A)$ elemre $\inf A \leq x$, s így $-\inf A \geq -x$. Ez azt jelenti, hogy $-\inf A$ a B egy felső korlátja. Ha w a B egy felső korlátja, akkor minden $x (\in A)$ elemre $-x \leq w$, azaz $x \geq -w$. Következésképpen $-w \leq \inf A$, s így $w \geq -\inf A$, tehát $-\inf A = \sup B$.

41. A metrikától megkövetelt első három tulajdonság teljesülését könnyen beláthatjuk. A háromszög-egyenlőtlenség a Cauchy-Bunyakovszkij egyenlőtlenséggel (**1.85**) a következőképpen bizonyítható: Legyenek $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ és $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ az $\mathbf{R}^n$ halmaz tetszőleges pontjai.

$$(d(A,B) + d(B,C))^2 = \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(b_k - c_k)^2}\right)^2 =$$

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k - b_k|^2 + \sum_{k=1}^{n}|b_k - c_k|^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|a_k - b_k|^2 \sum_{k=1}^{n}|b_k - c_k|^2} \geq$$

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k - b_k|^2 + \sum_{k=1}^{n}|a_k - b_k|^2 + 2\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k - b_k||b_k - c_k|\right)^2} =$$

$$\sum_{k=1}^{n}(|a_k - b_k| + |b_k - c_k|)^2 \geq \sum_{k=1}^{n}(|a_k - b_k + b_k - c_k|)^2 =$$

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-c_k)^2=d(A,C)^2.$$

42. Bármely $p(\in X)$ és $q(\in X)$ esetén $d(p,p)=0$ és $d(p,q)=d(q,p)\geq 0$. Legyen most r az X halmaz egy tetszőleges további eleme. Ha $p=r$, akkor $d(p,q)+d(q,r)\geq 0=d(p,r)$. Ha $p\neq r$ és $p=q$, akkor $q\neq r$, s így $d(p,q)+d(q,r)=1=d(p,r)$. Ha $p\neq r$ és $p\neq q$, akkor $d(p,q)+d(q,r)\geq 1=d(p,r)$.

43. Legyen $H\subseteq X$ és $p\in H$. Például a p pont 1 sugarú teljes környezete H-hoz tartozik (a p pont 1 sugarú teljes környezetében ugyanis csupán a p pont van), azaz H minden pontja belső pont. Ez azt jelenti, hogy H nyílt halmaz. Hasonlóan látható be, hogy $X-H$ minden pontja H-nak külső pontja. Mivel, így H-nak határpontja nincs, H zárt is.

44. Nem. Például: $(3-2)^2+(2-1)^2\not\geq(3-1)^2$.

45. Igen. $d(x,y)\geq 0,\quad d(x,y)=0\iff x=y;\quad d(x,y)=d(y,x)$.

$$\sqrt{|x-y|}+\sqrt{|y-z|}\geq\sqrt{|x-z|}\iff$$

$$|x-y|+|y-z|+2\sqrt{|x-y||y-z|}\geq|x-z|,$$

de $|x-z|=|x-y+y-z|\leq|x-y|+|y-z|$, s ebből már adódik a háromszög-egyenlőtlenség.

46. Nem. $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=\pm y$.

47. Igen.

48. A sorozat nem korlátos, mert a pontok második koordinátáiból alkotott sorozat nem korlátos.

49. A sorozat korlátos, mert minden n-re:

$$0<\frac{3n+1}{2n}\leq\frac{3n+n}{2n}=2;\quad 0<\frac{n-1}{n}<1.$$

50. Korlátos.

51. Korlátos.

52. $|z_n|=\left(\dfrac{|1+i|}{\sqrt{2}}\right)^n=1$, ezért a sorozat korlátos.

53. A rekurzív definícióról áttérhetünk a sorozat egyetlen képlettel való megadására: $z_n=(1+i)^n\quad(n\in\mathbf{N})$. Bármely v pozitív valós számra: $|z_n|\geq v$, ha $n\geq\dfrac{\lg v}{\lg\sqrt{2}}$, ezért a sorozat nem korlátos.

54. A sorozat korlátos, mert a koordinátákból alkotott mind a két sorozat korlátos.

55. Korlátos.

56. Bármely $\varepsilon>0$ esetén:

$$|a_n-a|=\left|\frac{2n-1}{2n+1}-1\right|=\frac{2}{2n+1}<\varepsilon,\quad\text{ha}\quad n>n_0=\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{2}.$$

Ha $\varepsilon=10^{-2}$, akkor $n_0=99,5$; azaz a 100. elemtől kezdve esnek a sorozat elemei az 1-nek 10^{-2} sugarú teljes környezetébe, tehát $n_1=100$.

57. $n_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 1, n_1 = 1000.$

58. Ha $n > 2$, akkor $\left|\dfrac{n+2}{3n-8} - \dfrac{1}{3}\right| = \dfrac{14}{3(3n-8)}$. Ebben az esetben $|a_n - a| < \varepsilon$, ha $n > \dfrac{14}{9\varepsilon} + \dfrac{8}{3}$. $n_1 = 1403$.

59. $n_0 = \dfrac{1}{\log_3(\varepsilon+1)}, \quad n_1 = 100.$

60. Mivel $0 < a_n < \frac{1}{3}$, ezért $\varepsilon \geq \frac{1}{3}$ esetén a sorozat minden tagja benne van az 1 szám $\frac{1}{3}$ sugarú környezetében, ezért küszöbszámnak választható bármely 1-nél kisebb valós szám. Ha $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$, akkor
$a_n \in (\frac{1}{3} - \varepsilon, \frac{1}{3} + \varepsilon)$ akkor és csak akkor, ha $n > n_0 = \log_4 \dfrac{1-3\varepsilon}{9\varepsilon}$. $\quad n_1 = 1$.

61. $|a_n - a| = \left|\lg \dfrac{n+1}{n+2}\right| = \lg \dfrac{n+2}{n+1} < \varepsilon$. Ebből $n_0 = \dfrac{2-10^\varepsilon}{10^\varepsilon - 1}$. $\quad n_1 = 500$.

62. $n_0 = \dfrac{4}{\varepsilon^2 + 2\varepsilon}, \quad n_1 = 20.$

63. $n_0 = \log_3 \dfrac{2}{\varepsilon}, \quad n_1 = 101.$

64. $|a_n - a| = \left|\dfrac{9(-1)^{n-1}}{5(5n + (-1)^{n-1})}\right| = \begin{cases} \frac{9}{5(5n-1)}, & \text{ha } n \text{ páros;} \\ \frac{9}{5(5n+1)}, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$

$$\frac{9}{5(5n-1)} < \varepsilon \iff \frac{9}{25\varepsilon} + \frac{1}{5} < n,$$

$$\frac{9}{5(5n+1)} < \varepsilon \iff \frac{9}{25\varepsilon} - \frac{1}{5} < n.$$

Ezek szerint $n_0 = \dfrac{9}{25\varepsilon} + \dfrac{1}{5}$. $\quad n_1 = 37$.

65. Az $|a_n - a| = \dfrac{n}{n^3+1} < \varepsilon$ egyenlőtlenség megoldása elég nehézkes. Helyette a következő becslést végezhetjük el:

$$\frac{n}{n^3+1} < \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2} < \varepsilon.$$

Ha $n > \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, akkor az eredeti egyenlőtlenség is biztosan teljesül. Így viszont n_1-et is csak becsülni tudjuk, azaz az 32. elemtől kezdve minden elem biztosan benne van a 0 szám 10^{-3} sugarú teljes környezetében.

66. Az állítást valós számsorozatra bizonyítjuk (azaz $m = 1$ esetre), de $m > 1$-re hasonlóan bizonyítható. Legyen az $[a_n]$ valós sorozat korlátos, akkor van olyan $k \in \mathbf{R}^+$, hogy $|a_n| < k$. Tegyük fel, hogy a sorozatnak a torlódási helye, de nem határértéke, akkor választható olyan $\delta \in \mathbf{R}^+$, hogy $(a-\delta, a+\delta) \subset [-k, k]$ és a $(-k, a-\delta)$ vagy a $(a+\delta, k)$ intervallumba a sorozatnak végtelen sok eleme esik. A Bolzano-Weierstrass-tétel (**T 7.17**) szerint kiválasztható a $(-k, a-\delta)$ vagy a $(a+\delta, k)$ intervallumba eső konvergens részsorozat, azaz a sorozatnak legalább két torlódási helye van.

67. Legyen például $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Megmutatjuk, hogy nincs olyan n_0 küszöbszám, hogy ha $n > n_0$, akkor $|a_{n+p} - a_n| < \frac{1}{2}$ minden p pozitív egész számra teljesül. Tegyük fel, hogy létezik az n_0 küszöbszám, és legyen n az a pozitív egész szám, amelyre $n_0 < n \le n_0 + 1$. Mivel

$$\frac{1}{2} > |a_{n+p} - a_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p} \ge \frac{p}{n+p}$$

(minden tört nevezője helyett $n+p$-t írva), ezért minden $p \in \mathbf{N}^+$-ra: $\dfrac{p}{n+p} < \dfrac{1}{2}$. Ebből: $p < n$, ami lehetetlen.

68. Nem. Az előző feladat nem konvergens sorozata teljesíti ezt a feltételt: $|a_{n+1} - a_n| = \dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$, ha $n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$.

69. $\lg(n+1) > k \Longleftrightarrow n > 10^k - 1, \quad n_0 = 10^{10}$.

70. $\dfrac{n-1}{\sqrt{n}+1} = \sqrt{n} - 1 > k \Longleftrightarrow n > (k+1)^2, \quad n_0 = 10^6 + 1$.

71. 1. megoldás:

$$\frac{n^2}{n+1} \ge \frac{n^2}{n+n} = \frac{n}{2} > k, \text{ ha } n > 2k.$$

2. megoldás:

$$\frac{n^2}{n+1} = \frac{n^2-1}{n+1} + \frac{1}{n+1} = n - 1 + \frac{1}{n+1} > n - 1 \ge k, \text{ ha } n \ge k+1.$$

3. megoldás:

$$\frac{n^2}{n+1} > k \Longleftrightarrow n^2 - kn - k > 0 \Longleftrightarrow n > \frac{k + \sqrt{k^2+4k}}{2}. \quad n_0 = 21.$$

72. Bármely $\varepsilon (\in \mathbf{R}^+)$-hoz van olyan $n_1 \in \mathbf{N}^+$, hogy ha $n > n_1$, akkor $0 \le a_n < \varepsilon$. Ha $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ és $n > n_2$, akkor $|b_n - 0| = |b_n| \le a_n < \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

73. Jelölje $|z|$ egészrészét szokásosan $\operatorname{Ent}|z|$, és legyen $n_0 = \operatorname{Ent}|z| + 1$. Akkor $n \ge n_0$ esetén $\dfrac{|z|}{n} < 1$ és

$$\left|\frac{z^n}{n!}\right| = \frac{|z|^n}{n!} = \frac{|z|}{1}\frac{|z|}{2}\cdots\frac{|z|}{n_0}\frac{|z|}{n_0+1}\cdots\frac{|z|}{n} \le \frac{|z|^{n_0}}{n_0!}\frac{|z|}{n} = \frac{|z|^{n_0+1}}{n_0!}\frac{1}{n},$$

ha $n > n_0$, amiből már **72.** feladat alapján adódik az állítás.

74. A $k = 0$ esetben a **T 7.27** tétel szerint igaz az állítás. Legyen $k \ge 1$. A sorozat alulról korlátos (0 például egy alsó korlátja). A sorozat valamilyen indextől kezdve szigorúan monoton csökkenő:

$$\frac{n^k}{a^n} > \frac{(n+1)^k}{a^{n+1}} \Longleftrightarrow a > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \Longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt[k]{a} - 1} < n.$$

($\sqrt[1]{a}$ legyen egyenlő a-val.) A **T 7.22** tételt felhasználva kapjuk, hogy a sorozat konvergens. Tekintsük a sorozat páros indexű elemeinek részsorozatát. A **T 7.15** tétel szerint:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)^k}{a^{2n}}=\lim_{n\to\infty}2^k\left(\frac{1}{a}\right)^n\frac{n^k}{a^n}=2^k\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^n\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0,$$

mivel $a>1$ miatt $0<\dfrac{1}{a}<1$.

75. Használjuk fel az $\dfrac{n^k}{n!}=\dfrac{a^n}{n!}\dfrac{n^k}{a^n}$ azonosságot és az előző két feladat eredményét.

76. Ha $q=0$, akkor az állítás nyilvánvalóan igaz. Legyen $0<|q|<1$, akkor $\left|\dfrac{1}{q}\right|>1$. Alkalmazzuk a **74.** feladat állítását az $a=\left|\dfrac{1}{q}\right|$ és $k=1$ esetre. Ezután a **72.** feladat segítségével kapjuk az állítást, ha $a_n=|nq^n|$ és $b_n=nq^n$. (Megjegyezzük, hogy a feladat a **74.** feladat nélkül is megoldható. Ehhez először megmutatjuk, hogy $[|nq^n|]$ sorozat valamilyen indextől kezdve szigorúan monoton csökken, ha $q\neq 0$: $n|q|^n>(n+1)|q|^{n+1}\iff n>n_0=\dfrac{|q|}{1-|q|}$. Mivel az $[|nq^n|]\quad(n>n_0)$ sorozat alulról korlátos (0 egy alsó korlátja), így konvergens, s a legnagyobb alsó korlátjához tart. Tegyük fel,hogy a sorozatnak van egy k pozitív alsó korlátja, azaz minden $n>n_0$ esetén:$1>|q|\geq\dfrac{\sqrt[n]{k}}{\sqrt[n]{n}}>0$. Ismert, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{k}}{\sqrt[n]{n}}=1$. Ez azt jelenti, hogy 1 bármely környezetéből a sorozatnak legfeljebb véges sok tagja marad ki, ami ellentmond az előbbi egyenlőtlenségnek. Ezért $\lim_{n\to\infty}|nq_n|=0$. ($n_0$-nál kisebb vagy egyenlő indexű elemek nem változtatják meg a határértéket!))

77. Először mutassuk meg, hogy az $[\sqrt[n]{n!}]$ sorozat szigorúan monoton növekvő, ezért a reciproka szigorúan monoton csökkenő. Mivel a sorozat pozitív tagú, ezért 0 egy alsó korlátja. A **73.** feladat segítségével mutassuk meg, hogy nincs a sorozatnak pozitív alsó korlátja.

78. Van olyan $0\leq\varphi<2\pi$, hogy $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$. A Moivre-képlet szerint $z^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$. Legyen $\lim_{n\to\infty}\cos n\varphi=a$ és $\lim_{n\to\infty}\sin n\varphi=b$. Akkor $a=\lim_{n\to\infty}\cos(n+1)\varphi=\lim_{n\to\infty}(\cos n\varphi\cos\varphi-\sin n\varphi\sin\varphi)=a\cos\varphi-b\sin\varphi$ és $a=\lim_{n\to\infty}\cos(n-1)\varphi=a\cos\varphi+b\sin\varphi$. Ha $\cos\varphi\neq 1$, akkor $a=0$ és $b=\lim_{n\to\infty}\sin(n+1)\varphi=b\cos\varphi$ miatt, $b=0$; Így $\lim_{n\to\infty}z^n=0$, amiből következik, hogy $\lim_{n\to\infty}|z|^n=0$, ami azonban lehetetlen. Így $\cos\varphi=1$, azaz $z=1$. Ebben az esetben a sorozat konvergens.

79. 1.megoldás: $0\leq\left|\sin n\frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2n\pi}}\right|\frac{1}{\sqrt{2n\pi}},\quad\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\longrightarrow 0,\quad$ ha $\quad n\to\infty$.

2.megoldás: Egy korlátos és egy nullasorozat szorzata szintén nullasorozat.

80. $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)(1+\dfrac{1}{n})^{\frac{1}{n}},\quad 1\leq\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\leq 2^{\frac{1}{n}}$ és $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$. A rendőrelv miatt: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=1$, ezért $\lim_{n\to\infty}a_n=1$.

81. A Bernoulli-egyenlőtlenség (**T 7.34**) szerint: $a_n = \left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \geq 1+\sqrt{n}$.
Ebből: $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

82. $a_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{(-1)^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2k} = \dfrac{5}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2k} = -\dfrac{3}{2}$ $(k \in \mathbf{N}^+)$. $\dfrac{5}{2}$ és $-\dfrac{3}{2}$ a sorozat torlódási helyei.

83. $a_n = \begin{cases} \frac{n-1}{n+1}, & \text{ha } n = 2k-1; \\ \left(\frac{n}{2}\right)^2, & \text{ha } n = 2k \ (k \in \mathbf{N}^+). \end{cases}$
$\lim_{n\to\infty} a_{2k-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{k-1}{k+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{k}}{1+\frac{1}{k}} = 1$.
A sorozat egyetlen torlódási helye 1, de a sorozat nem konvergens.

84. $a_n = \dfrac{2}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + \frac{1}{4}2^n} \longrightarrow 0$, ha $n \to \infty$.

85. $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$

86. $-\infty$.

87. A sorozatnak három torlódási helye van : $0, 1, \frac{1}{2}$.

88. $\dfrac{n^3+1}{n^2+1} > \dfrac{n^3}{n^2+1} \geq \dfrac{n^3}{2n^2} = \dfrac{n}{2} \Longrightarrow -\dfrac{n^3+1}{n^2+1} < -\dfrac{n}{2} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

89.
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^p\left(a_0 + \frac{a_1}{n} + \cdots + \frac{a_{p-1}}{n^{n-1}} + \frac{a_p}{n^p}\right)}{n^q\left(b_0 + \frac{b_1}{n} + \cdots + \frac{b_{q-1}}{n^{q-1}} + \frac{b_q}{n^q}\right)} =$$
$$\lim_{n\to\infty} n^{p-q}\frac{a_0}{b_0} = \begin{cases} 0, & \text{ha } p < q; \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{ha } p = q; \\ \infty, & \text{ha } p > q \text{ és } \frac{a_0}{b_0} > 0; \\ -\infty, & \text{ha } p > q \text{ és } \frac{a_0}{b_0} < 0. \end{cases}$$

90. **48.**: divergens; **49.**: $\lim_{n\to\infty} P_n = \left(\frac{3}{2}, 1\right)$; **50.**: divergens, **51.**: divergens; **52.**: $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \cos\dfrac{n\pi}{4} + i\sin\dfrac{n\pi}{4}$, a sorozat divergens; **53.**: divergens; **54.**: $\lim_{n\to\infty} \mathbf{v}_n = \mathbf{i}+\mathbf{j}$; **55.**: $\lim_{n\to\infty} \mathbf{v}_n = \mathbf{i}+\mathbf{j}$.

91. A törtet (n^2+i)-vel bővítve kapjuk, hogy $\dfrac{n^4+n^2-1}{n^4+1} + i\dfrac{-n^4+2n^2}{n^4+1}$. A **T 7.28** tétel szerint: $\lim_{n\to\infty} z_n = 1-i$. A feladat egyszerűbben is megoldható: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{i}{n} = 0$, ezért $\lim_{n\to\infty} \frac{1-i\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{1-\frac{i}{n^2}} = 1-i$.

92. $\lim_{n\to\infty} z_n = i$.

93. Divergens.

94. $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

95. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \dfrac{\left(\frac{i}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{i}{3}\right)^n} = 0$, mert $\left|\frac{i}{3}\right| < 1$.

96. A sorozatnak csak két eleme van: $0, -i$.

97. A sorozat divergens, mert $|1-i| = \sqrt{2}$.

98. Alkalmazzuk a Moivre-képletet, $\lim_{n\to\infty} z_n = 1$.

99. $\sum_{k=1}^{n} i^k = \dfrac{1-i^{n+1}}{1-i}$; a sorozat divergens, négy torlódási pontja van.

100. $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(1+i)^k} = \dfrac{1-\left(\frac{1}{i+1}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{i+1}} = \left(1-\left(\dfrac{1}{i+1}\right)^{n+1}\right)\dfrac{i+1}{i}; \quad \lim_{n\to\infty} z_n = 1-i.$

101. $\lim_{n\to\infty} z_n = i.$

102. A sorozat divergens, mert $\dfrac{|1-3i|}{|1+2i|} = \sqrt{2}.$

103. $a_{n+1} = \dfrac{2n+1}{3n+4} > \dfrac{2n-1}{3n+1} = a_n \iff 6n^2+5n+1 > 6n^2+5n-4$. Az utóbbi egyenlőtlenség minden $n(\in \mathbf{N}^+)$-re teljesül, ezért a sorozat szigorúan monoton növekvő. $\sup[a_n] = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{2+\frac{1}{n}}{3+\frac{4}{n}} = \dfrac{2}{3}, \quad \inf[a_n] = a_1 = \dfrac{1}{4}.$

104. Az előző feladat megoldásában alkalmazott gondolatmenettel is dolgozhatunk, de most kevesebb számolással jár a következő: $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{20n^2-5} > 0$ minden pozitív n-re, ezért a sorozat szigorúan monoton növekvő. $\sup[a_n] = \lim_{n\to\infty} a_n = -\dfrac{1}{2}, \quad \inf[a_n] = a_1 = -\dfrac{3}{5}.$

105.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n-2}{n(n+1)(n+2)} \begin{cases} > 0, & \text{ha } n > 2; \\ = 0, & \text{ha } n = 2; \\ < 0, & \text{ha } n < 2. \end{cases}$$

Ebből következik, hogy $a_1 > a_2 = a_3$, és a harmadik elemtől a sorozat kezdve szigorúan monoton nő. $\inf[a_n] = a_2 = a_3 = \frac{5}{6}, \quad \sup[a_n] = \lim_{n\to\infty} a_n = 1.$

106. $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ minden n-re, ezért a sorozat szigorúan monoton növekvő.
$\sup[a_n] = \lim_{n\to\infty} a_n = 2, \quad \inf[a_n] = a_1 = \frac{1}{3}.$

107. A sorozat szigorúan monoton csökkenő, $\inf[a_n] = \lim_{n\to\infty} = -25, \sup[a_n] = a_1 = -\frac{124}{25}.$

108. A sorozat szigorúan monoton növekvő. $\sup[a_n] = 3, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{3}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 3, \quad \inf[a_n] = a_1 = \dfrac{2}{\sqrt{2}}.$

109. $a_2 < a_1$, a sorozat a második elemtől szigorúan monoton nő. Ha $n \geq 2$, akkor $\dfrac{n!}{n^2} = \dfrac{(n-1)!}{n} > \dfrac{(n-1)(n-2)}{n} \geq \dfrac{n^2-3n+2}{n} > \dfrac{n^2-3n}{n} = n-3$, azaz a sorozat felülről nem korlátos, alulról korlátos. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty, \quad \inf[a_n] = a_2 = \frac{1}{2}.$

110. A sorozat nem monoton, nem konvergens, alulról korlátos, $\inf[a_n] = 0.$

111. A **73.** feladat alapján $(z = k)$ a sorozat határértéke 0.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{k}{n+1} \begin{cases} > 1, & \text{ha } n < k-1; \\ = 1, & \text{ha } n = k-1; \\ < 1, & \text{ha } n > k-1. \end{cases}$$

$k \geq 3$ esetén a sorozat a $(k-1)$-edik elemig szigorúan monoton nő, a k-adik elemtől pedig szigorúan monoton csökken, $a_{k-1} = a_k$. A $k = 2$ esetben $a_1 = a_2$, s a második elemtől a sorozat szigorúan monoton csökken. A $k = 1$ esetben a sorozat szigorúan monoton csökken. A $k \geq 2$ esetben $\sup[a_n] = a_{k-1} = a_k = \dfrac{k^k}{k!}$. A $k = 1$ esetben $\sup[a_n] = a_1 = 1$.

112. A sorozat nem monoton, nem konvergens. Az $[a_{2k}; k \in \mathbf{N}^+]$ részsorozat pozitív elemű, szigorúan monoton csökkenő, alulról korlátos, tehát konvergens (határértéke 0). Az $[a_{2k-1}; k \in \mathbf{N}^+]$ részsorozat negatív elemű, szigorúan monoton növekvő, felülről korlátos, azaz konvergens. Ez azt jelenti, hogy a sorozat korlátos, $\inf[a_n] = a_1 = -1$, $\sup[a_n] = a_2 = 3$. (Torlódási helyei 0 és 2.)

113. $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2(n+1)(n+10)} = \dfrac{1}{2}\dfrac{n+10-10}{n+10} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{10}{n+10}\right)$. Ebből látható, hogy a sorozat szigorúan monoton nő, és $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$. A sorozat korlátos, $\inf[a_n] = a_1 = \frac{1}{22}$, $\sup[a_n] = \frac{1}{2}$.

114. A sorozat nem monoton, váltakozó előjelű (oszcilláló). Az $[|a_n|]$ sorozat szigorúan monoton csökkenő és $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Ebből következik, hogy $\inf[a_n] = a_1 = -\dfrac{1}{2}$ és $\sup[a_n] = a_2 = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{2}+1}$.

115. Mivel $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{5^{n+1}}$, ezért a sorozat szigorúan monoton növekvő. $a_n = \dfrac{1}{4}\left(1 - \dfrac{1}{5^n}\right)$, így $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{4}$. A sorozat korlátos, $\inf[a_n] = a_1 = \frac{1}{5}$, $\sup[a_n] = \frac{1}{4}$.

116. Szigorúan monoton csökkenő, korlátos; $\inf[a_n] = \lim_{n\to\infty} = 0, \sup[a_n] = a_3 = 3$.

117. A határérték $(\frac{-4}{3})$ kiszámításakor használjuk fel a **74.** feladat eredményét $k = 2$ és $a = 4$ esetben.

118. A határérték 1 (kiszámításakor használjuk fel a **74.** feladat eredményét $k = 1$ és $a = 2$, illetve $k = 0$ és $a = 2$ esetben).

119. $a_n = \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n} \sin\dfrac{1}{n}$. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, mert egy egy nullasorozat és korlátos szorzata. $0 < \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n} < \dfrac{\pi}{2}$, ezért $0 < \sin\frac{1}{n+1} < \sin\frac{1}{n}$. Továbbá $\dfrac{2^n}{3^n+1} > \dfrac{2^{n+1}}{3^{n+1}+1}$ minden n-re teljesül. Így

$$\frac{2^n}{3^n+1}\sin\frac{1}{n} > \frac{2^n}{3^n+1}\sin\frac{1}{n+1} > \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}+1}\sin\frac{1}{n+1},$$

azaz a sorozat szigorúan monoton csökkenő. A sorozat korlátos, $\inf[a_n] = 0$, $\sup[a_n] = a_1 = \frac{1}{2}\sin 1$.

120. A nevező gyöktelenítésével és $\sqrt{n}$-nel egyszerűsítve kimutatható, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$. A sorozat szigorúan monoton csökkenő és felülről korlátos,

$\sup[a_n] = a_1 = -1$.

121. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1000}{n} + \frac{20}{n^2}}{0,001 - \frac{100}{n^2}} = 0.$ **122.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-3n^2 - 1}{n^2 + 1} = -3.$

123. $\lim_{n\to\infty}(-1)^n \frac{n}{n^2+1} = 0$ és $\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+3} = 1$, ezért $\lim_{n\to\infty} a_n = -1$.

124. $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{32}$. **125.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n + 1}{2\left(-\frac{2}{3}\right)^n + 3} = \dfrac{1}{3}.$

126. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

127. $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. **128.** $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. **129.** $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

130. $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3}{2n^2+3} = \infty$ és $\lim_{n\to\infty} \frac{1-5n^2}{5n+1} = -\infty$, ezért a sorozat határértékét tagonként nem számíthatjuk. Összevonva $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-13n^2+3}{10n^3+2n^2+15n+3} = \frac{1}{5}$.

131. Egyszerűsítsük a törtet $n^{\frac{3}{2}}$-del; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{\sqrt[4]{5}}$.

132. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. **133.** $\lim_{n\to\infty} a_n = 4$. **134.** $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

135. $\lim_{n\to\infty} a_n = 5^{-5}$.

136. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n(n+1)}{2(n+2)} - \dfrac{n}{2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2}\dfrac{-n}{n+1} = -\dfrac{1}{2}.$

137.
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1+3+\cdots+(2n-1)-(2+4+\cdots+2n)}{\sqrt{n^2+1}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - n(n+1)}{\sqrt{n^2+1}} = -1.$$

138. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(n-1)}{2}\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{1}{2}.$

139. Felhasználva, hogy a számláló
$1(1+1) + 2(2+1) + \cdots + n(n+1) = (1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + (1 + 2 + \cdots + n)$,
azt kapjuk, hogy a határérték $\frac{1}{3}$.

140.
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}(na+k)^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}(n^2a^2 + 2kna + k^2) =$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\left((n-1)n^2a^2 + 2na\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right) = a^2 + a + \frac{1}{3}.$$

141. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-b}{1-a}\dfrac{1-a^{n+1}}{1-b^{n+1}} = \dfrac{1-b}{1-a}.$

142. Alkalmazzuk a binomiális tételt; $\lim_{n\to\infty} a_n = 1980$.

143. $\lim\limits_{n\to\infty} \left((\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2}) + (\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}) + \cdots + (\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1})\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1.$

144. Megmutatható (pl. teljes indukcióval), hogy $\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2} = \sqrt[2^n]{2^{2^n-1}}$, ezért $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2^{1-\frac{1}{2^n}} = 2$.

145. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}{(\sqrt{2k+1})^2-(\sqrt{2k-1})^2}=$
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{n}}(\sqrt{2n+1}-1)=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

146. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-n^2}{n+\sqrt{n^2+1}}=-\infty.$ **147.** $\lim_{n\to\infty}a_n=1.$

148. Felhasználva az $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ azonosságot:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sqrt[3]{(n^2-n^3)^2}-n\sqrt[3]{n^2-n^3}+n^2}=\frac{1}{3}.$$

149. Használjuk az $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$ azonosságot. $\lim_{n\to\infty}a_n=0.$

150. $\lim_{n\to\infty}a_n=0.$

151. Felhasználva azt, hogy a számláló első tényezője egy számtani sorozat kezdő elemeinek összege, ismert átalakítással azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{5n-7}{\sqrt{n^2-n}+\sqrt{n^2+n}}=\frac{5}{2}.$$

152. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, mert $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+3^{-n}}{2^{-n}-3^n}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{9}\right)^n}{\left(\frac{1}{6}\right)^n-1}=0$ és
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{n^2+3}-n}=\frac{\sqrt{n^2+3}+n}{3(2n+\sqrt{4n^2-1})}=\frac{1}{6}$, továbbá $|\sin n!|<1$.

153. $\lim_{n\to\infty}a_n=1.$

154. A **74.** feladat alapján azonnal adódik,hogy $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. A feladat a rendőr-elv alkalmazásával is megoldható: $0<\frac{n}{3^n}<\frac{2^n}{3^n}=\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

155. $1<\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}}<\sqrt[n]{n}$; alkalmazzuk a rendőr-elvet; $\lim_{n\to\infty}a_n=1.$

156. $1<\sqrt[3n^2]{n^2+2n+4}<\sqrt[n]{7n^2}=\sqrt[n]{7}(\sqrt[n]{n})^2$ miatt $\lim_{n\to\infty}a_n=1.$

157. $1\leq 5n^2-30n+21\Longleftrightarrow n\geq 6$. Így, ha $n\geq 6$, akkor $1\leq\sqrt[n]{5n^2-30n+21}<\sqrt[n]{5n^2}$; a rendőr-elvet alkalmazva $\lim_{n\to\infty}a_n=1$. A feladat megoldható az alábbi **166.** feladat alapján is:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n})^2(5-\frac{30}{n}+\frac{21}{n^2})^{\frac{1}{n}}=1.$$

158. $\frac{1}{3}\leq\frac{2n-1}{2n+1}<1$, ebből a rendőr-elv segítségével $\lim_{n\to\infty}a_n=1$. Alkalmazhatjuk az alábbi **160.** vagy a **166.** feladat eredményét is.

159. $1<\sqrt[n^2]{n}=\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}<\sqrt[n]{n}$, ebből a rendőr-elv segítségével kapjuk, hogy a határérték 1.

160. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^{p-q} \sqrt[n]{\dfrac{a_0 + \frac{a_1}{n} + \cdots + \frac{a_p}{n^p}}{b_0 + \frac{b_1}{n} + \cdots + \frac{b_q}{n^q}}} = 1$. (l. még az **89.** és **166.** feladatot.) Megjegyezzük, hogy ez alapján a **155.** — **159.** feladatok egyszerűen megoldhatók.

161. Először nemnegatív k egész számokra mutatjuk meg a feladat állítását teljes indukcióval. $k = 0$ esetben nyilvánvalóan igaz az állítás. Tegyük fel,hogy valamely $k \geq 0$ egész számra $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{k}{n}\right)^n = e^k$. Ebből következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{k+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1+k}{n+1}\right)^{n+1} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{n+1}{n+1+k} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{k}{n+1}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n+1}} = e^k e^1 1 = e^{k+1}.$$

(Felhasználtuk azt, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{k}{n+1}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{k}{n}\right)^n$;
ez igaz, mivel $\left[\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]$ részsorozata az $\left[\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right]$ sorozatnak).
Legyen most k negatív egész szám, akkor az

$$\left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n+k-k}{n+k}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{-k}{n+k}\right)^{-k} \left(1 + \frac{-k}{n+k}\right)^{n+k}}$$

átalakítást az $n > |k|$ esetben elvégezve kapjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{k}{n}\right)^n = \dfrac{1}{1 \cdot e^{-k}} = e^k$.

162. Mivel az $\left[\left(1 + \dfrac{k}{a_n}\right)^{a_n}\right]$ sorozat az e^k-hoz konvergáló $\left[\left(1 + \dfrac{k}{n}\right)^n\right]$ sorozat részsorozata, ezért igaz az állítás.

163. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{\frac{p}{q}}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\left(1 + \dfrac{p}{qn}\right)^{qn}\right)^{\frac{1}{q}} = (e^p)^{\frac{1}{q}} = e^{\frac{p}{q}}$ (az előző feladat alapján).

164. Mivel $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ és $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$, feltehető, hogy $a_n \neq 0, b_n \neq 0$. (A legfeljebb véges sok 0 elem elhagyható, a konvergenciát nem befolyásolja.) Először azt az esetet vizsgáljuk, amikor $r \in \mathbf{Q}$. Ha $\operatorname{Ent} a_n = k_n$ és $r > 0$, akkor

$$\frac{k_n+1}{k_n+r+1} \left(1 + \frac{r}{k_n+1}\right)^{k_n+1} = \left(1 + \frac{r}{k_n+1}\right)^{k_n} < \left(1 + \frac{r}{a_n}\right)^{a_n}$$

$$< \left(1 + \frac{r}{k_n}\right)^{k_n+1} = \left(1 + \frac{r}{k_n}\right)^{k_n} \left(1 + \frac{r}{k_n}\right).$$

Az nyilvánvaló, hogy $\lim_{n\to\infty} k_n = \infty$, ezért a **162.** és **163.** feladatok, valamint a rendőr-elv alapján kapjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{r}{a_n}\right)^{a_n} = e^r$. Ha $r = 0$, akkor az állítás nyilvánvaló. $r < 0$ esetben a **161.** feladat bizonyítását szószerint megismételve (k helyett r-rel és n helyett a_n-nel) kapjuk az állítást. Mivel $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$, így $\lim_{n\to\infty}(-b_n) = \infty$. Tehát

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{b_n}\right)^{b_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-r}{-b_n}\right)^{-b_n}\right)^{-1} = (e^{-r})^{-1} = e^r.$$

Legyen most már $r \neq 0$ tetszőleges valós szám. Akkor

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{r} = \begin{cases} \infty, & \text{ha } r > 0; \\ -\infty, & \text{ha } r < 0. \end{cases}$$

Ez alapján

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{a_n}\right)^{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{a_n}{r}}\right)^{\frac{a_n}{r}}\right)^r = e^r.$$

165. Ha $\lim_{n\to\infty}|a_n| = \infty$, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ vagy $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ vagy a_n felbontható két olyan részsorozatra, amelyek határértéke ∞ illetve $-\infty$, ezért az előző feladat szerint az állítás igaz.

166. Mivel $0 < a$, ezért az $[a_n]$ sorozatnak csak véges sok eleme lehet 0. Ezeket az elemeket hagyjuk el, azaz tegyük fel, hogy minden n-re $a_n > 0$. Így a **T 7.41** tétel alapján:

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to\infty} e^{b_n \ln a_n} = e^{b\ln a} = a^b.$$

167. Például $a_n = n$ és $b_n = \dfrac{r}{n}$.

168. $a_n = 2^n, \quad b_n = \dfrac{1}{n}$ (l. még a **74.** feladatot!).

169. $a_n = 2^n, \quad b_n = -\dfrac{1}{n}$.

170. Ha $r > 1$, akkor legyen például $a_n = r^n$ és $b_n = \dfrac{1}{n}$. Ha $0 < r < 1$, akkor $a_n = r^{-n}$ és $b_n = -\dfrac{1}{n}$. Ha $r = 1$, akkor például $a_n = 2^n$ és $b_n = \dfrac{1}{n^2}$ (l. még a **166.** feladatot!).

171. $a_n = 2^{n^2}, \quad b_n = \dfrac{1}{n}$.

172. $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{r}{e}}\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \quad b_n = n.$ **173.** $a_n = 1+\dfrac{1}{n}, \quad b_n = n^2$.

174. Ha $0 \le r < 1$, akkor legyen például $a_n = r^n, \quad b_n = \dfrac{1}{n}$. Ha $r > 1$, akkor $a_n = r^{-n}, \quad b_n = -\dfrac{1}{n}$. Ha $r = 1$, akkor $a_n = b_n = \frac{1}{n}$.

175. $a_n = 2^{-2^n}$, $\quad b_n = -\dfrac{1}{n}$.

176. Ha $a_n > 0$ és $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \infty$, így $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{a_n}\right)^{b_n} = \infty$, ami azt jelenti, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = 0$.

177. e.

178. $\sqrt{e}$.

179. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{-3}{3n+2}\right)^{3n+2}\right)^{\frac{2n}{3n+2}} = \left(e^{-3}\right)^{\frac{2}{3}} = e^{-2}$.
Megjegyezzük, hogy a feladat megoldható a **161.** — **166.** feladatok alkalmazása nélkül is, de ebben az esetben bonyolultabb átalakítások szükségesek:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{3n+2}{3n+1}\frac{3n+1}{3n}\frac{3n}{3n-1}\right)^{2n}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{3n+1}\right)^{3n+1}\frac{3n+1}{3n+2}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^{3n-1}\frac{3n}{3n-1}}\right)^2} =$$

$$\frac{1}{\left(\sqrt[3]{e\cdot 1\cdot e\cdot e\cdot 1}\right)^2} = e^{-2},$$

felhasználva azt, hogy konvergens sorozat határértéke megegyezik részsorozatainak határértékével.

180. Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{2}{n}\right)^n = e^{-2} < \dfrac{1}{2}$, így valamely n-től $0 < \left(1 - \dfrac{2}{n}\right)^n \le \dfrac{1}{2}$.
Ezért a rendőr-elv miatt

$$0 \le \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 - \frac{2}{n}\right)^n\right)^n \le \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.$$

181. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{2n+1} \left(\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n\right)^{\frac{2n+1}{n}} = 0\cdot(e^{-1})^2 = 0.$

182. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} 2^n \left(\left(1 - \dfrac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{\frac{1}{2}} = \infty.$

183. 1.

184. 1.

185. e^{-2}.

186. $-\dfrac{1}{2\sqrt{3}} e^{-\frac{20}{3}}$.

187. $e^{-9} + 1$.

188. $-\infty$.

189. Először teljes indukcióval megmutatjuk, hogy a sorozat szigorúan monoton csökkenő. $a_1 > a_2 = 4$. Tegyük fel, hogy $a_n > a_{n+1}$. Akkor $a_{n+1} = 5 - \dfrac{6}{a_n} > 5 - \dfrac{6}{a_{n+1}} = a_{n+2}$. Például teljes indukcióval az is megmutatható, hogy a sorozat alulról korlátos; minden n-re $a_n > 3$. Az a_1-re ez igaz. Tegyük fel, hogy $a_n > 3$. Ezt felhasználva $a_{n+1} = 5 - \dfrac{6}{a_n} > 5 - \dfrac{6}{3} = 3$. Ezzel megmutattuk, hogy a sorozat konvergens. A **T 7.15** tétel szerint bármely $k \in \mathbf{N}^+$ esetén $\lim_{n\to\infty} a_{n+k} = \lim_{n\to\infty} a_n = x$. Ezért $x = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(5 - \dfrac{6}{a_n}\right) = 5 - \dfrac{6}{x}$. Ebből: $x^2 - 5x + 6 = 0$; $\quad x_1 = 2, \quad x_2 = 3$. Mivel minden $a_n > 3$, a sorozat határértéke nem lehet 2; tehát $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$.

190. Azonos átalakításokkal kapjuk, hogy $a_{n+1}^2 - a = (a_n - a_{n+1})^2$, azaz $a_{n+1} \geq \sqrt{a}$. Most megmutatjuk, hogy a második elemtől kezdve a sorozat monoton csökkenő:

$$a_{n+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{a_{n+1}^2 + a}{a_{n+1}}\right) \leq \frac{1}{2}\frac{a_{n+1}^2 + a_{n+1}^2}{a_{n+1}} = a_{n+1}.$$

Tehát a sorozat konvergens. Határértéke:

$$x = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right);$$

mivel $x > 0$, ebből $x = \sqrt{a}$ adódik.

191. Felhasználva a számtani és mértani közép közötti azt az összefüggést, hogy ha $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbf{R}^+$, akkor

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k} \leq \sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k},$$

először megmutatjuk, hogy minden n-re $a_{n+1} \geq \sqrt[k]{a}$:

$$a_{n+1} = \frac{(k-1)a_n + \frac{a}{a_n^{k-1}}}{k} \leq \sqrt[k]{a_n^{k-1}\frac{a}{a_n^{k-1}}} = \sqrt[k]{a}.$$

A sorozat a második elemtől kezdve monoton csökkenő, mert

$$a_{n+2} = \frac{1}{k}\frac{(k-1)a_{n+1}^k + a}{a_{n+1}^{k-1}} \leq \frac{1}{k}\frac{(k-1)a_{n+1}^k + a_{n+1}^k}{a_{n+1}^{k-1}} = a_{n+1}.$$

A sorozat konvergens. Mivel

$$x = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{1}{k}\left((k-1)x + \frac{a}{x^{k-1}}\right),$$

ezért $x = \sqrt[k]{a}$.

192. Határérték csak olyan x szám lehet, amelyre teljesül az

$$x = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}(2a_n^2 + a_n) = 2x^2 + x$$

egyenlet, azaz $x = 0$. A sorozat monoton növekvő, ezért akkor és csak akkor konvergens, ha felülről korlátos, s ebben az esetben a határérték a sorozat legkisebb felső korlátja. Ha tehát a sorozat konvergens, akkor minden n-re $a_n \leq 0$. Mivel $a_{n+1} = a_n(2a_n + 1)$ és $a_n, a_{n+1} \leq 0$, ezért a $2a_n + 1 \geq 0$ feltételnek teljesülni kell, s így $a_n \geq -\frac{1}{2}$. Kaptuk, hogy konvergencia esetén minden n-re $-\frac{1}{2} \leq a_n \leq 0$, ezért szükségképpen $-\frac{1}{2} \leq a \leq 0$. Most megmutatjuk, ha $-\frac{1}{2} \leq a \leq 0$, akkor a sorozat konvergens (és természetesen a határérték 0). Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy akkor minden n-re: $-\frac{1}{2} \le a_n \le 0$. Az $n = 1$-re a feltétel miatt teljesül az állítás. Tegyük fel, hogy valamely n-re $-\frac{1}{2} \le a_n \le 0$. Akkor $-a_n \ge 2a_n^2 \ge 0$, azaz $0 \ge 2a_n^2 + a_n \ge a_n \quad (\ge -\frac{1}{2})$, tehát $0 \ge a_{n+1} \ge -\frac{1}{2}$. Mivel a sorozat monoton növekvő, ezért valóban konvergens. Tehát az $[a_n]$ sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha $-\frac{1}{2} \le a \le 0$, s ebben az esetben $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Ha $a < -\frac{1}{2}$ vagy $a > 0$, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, mivel a sorozat monoton növekvő, de felülről nem korlátos.

193. A sorozat divergens, mert az $x = x + \dfrac{1}{x^3+1}$ egyenletnek nincs megoldása. Mivel a sorozat szigorúan monoton növekvő, ezért $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

194. Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy a sorozat szigorúan monoton növekvő. $a_1 = \sqrt{a} < \sqrt{a + \sqrt{a}} = a_2$ nyilván igaz és könnyen belátható, hogy az $a_n < a_{n+1}$ feltevésből következik a $a_{n+1} < a_{n+2}$ egyenlőtlenség. A sorozat felülről korlátos. Igazoljuk ezt is teljes indukcióval. Ekkor olyan k számot kell keresni, amelyre $a_n \le k$-ból $a_{n+1} \le k$ következik. Ehhez az $a_{n+1} = \sqrt{a + a_n} \le \sqrt{a+k}$ egyenlőtlenség miatt elegendő, ha $\sqrt{a+k} \le k$ vagyis $a \le k^2 - k$ igaz. Ha $k = a + 1$, akkor az előző egyenlőtlenség biztosan teljesül, továbbá $a_1 \le k$ is igaz lesz. A sorozat tehát bármely pozitív a-val konvergens. Az x határérték a következő egyenletnek tesz eleget: $x = \sqrt{a+x}$, ahonnan $x > 0$ miatt: $x = \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

195. $a_n = \dfrac{n-1}{n} a_{n-1} = \dfrac{n-1}{n}\dfrac{n-2}{n-1} a_{n-2} = \dfrac{n-1}{n}\dfrac{n-2}{n-1} \cdots \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{2} a_1 = \dfrac{1}{n}$.

196. l. az **1.56** feladatot!

197. $a_{n+1}b_{n+1} = a_n b_n$, ezért minden n-re $a_n b_n = ab$.

198. $0 \le a_{n+1} - b_{n+1} = \dfrac{a_n - b_n}{2}\dfrac{a_n - b_n}{a_n + b_n} \le \dfrac{a_n - b_n}{2}$.

199. Az előbbi feladat alapján $0 \le a_n - b_n \le \dfrac{a-b}{2^{n-1}}$, azaz $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$, tehát $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. Jelöljük a közös határértéket x-szel, akkor

$$x^2 = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab,$$

így $x = \sqrt{ab}$. (l. **197.** feladatot!)

200. Az $n = 1, 2$ esetekre közvetlenül ellenőrizhető az állítás. Mivel $\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} + 1$, ezért

$$\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} = \left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^{n}.$$

Ezekből pedig azonnal következik, hogy ha valamely n-re és $(n+1)$-re igaz az állítás, akkor $(n+2)$-re is igaz.

201. Mivel $\left|\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right| < 1$, ezért

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{1+\sqrt{5}} - \frac{2}{1+\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n}{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

202. Az általánosság megszorítása nélkül az AB szakasz hossza választható 1-nek. Legyen $AC = 1-x$ és $CB = x$. Így $\frac{1-x}{x} = \frac{x}{1}$, azaz $x^2+x-1=0$, amelynek egyetlen pozitív megoldása: $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

203. Legyen r olyan szám, hogy $|\lim_{n\to\infty} a_n| < r < 1$. Van olyan n_0 küszöbszám, hogy ha $n > n_0$, akkor $|a_n| \le r$, ezért $0 \le |a_n|^n \le r^n$, amiből a rendőr-elv segítségével adódik az állítás.

204. Legyen $\lim_{n\to\infty} a_n = q > 1$, akkor van olyan r, hogy $1 < r < q$. Ehhez az r-hez van olyan n_0 küszöbszám, hogy ha $n > n_0$, akkor $1 < r < a_n$, s így $r^n < a_0^n$, amiből már adódik az állítás.

205. Először teljes indukcióval mutassuk meg, hogy

$$\frac{1}{m+1}n^{m+1} < 1^m + 2^m + \cdots + n^m < \frac{1}{m+1}(n+1)^{m+1}.$$

Ebből a rendőr-elv alkalmazásával adódik az állítás.

206. l. **166.** feladatot! **207.** 1.

208. $\left(1-\dfrac{1}{n^k}\right)^n = \left(\dots\left(\left(1-\dfrac{1}{n^k}\right)^{n^k}\right)^{1/n}\dots\right)^{1/n}$ felhasználásával.

209. A **203.** feladatot alkalmazhatjuk $a_n = \sqrt[n]{b_n}$-nel.

210. Ha $a_n \ge 0$, akkor $1 \le \sqrt[k]{1+a_n} \le 1+a_n = 1+|a_n|$.
Ha $-1 \le a_n < 0$, akkor $1 \ge \sqrt[k]{1+a_n} \ge 1+a_n = 1-|a_n|$.
Így minden $a_n \ge -1$-re: $1-|a_n| \le \sqrt[k]{1+a_n} \le 1+|a_n|$.
Mivel $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, ezért $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, s így a rendőr-elv miatt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{1+a_n} = 1$.

211. A Cauchy-féle konvergenciakritériumot (**T 7.18**) alkalmazzuk $(p \in \mathbf{N}^+)$:

$$|a_{n+p} - a_n| = \left|\frac{\cos(n+1)}{3^{n+1}} + \cdots + \frac{\cos(n+p)}{3^{n+p}}\right| \le$$

$$\frac{1}{3^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{3^{n+p}} = \frac{1}{3^{n+1}}\frac{1-\frac{1}{3^p}}{1-\frac{1}{3}} < \frac{1}{3^n}.$$

Legyen ε tetszőleges pozitív szám. Mivel $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$, ezért van olyan n_0 küszöbszám, hogy ha $n > n_0$, akkor $\dfrac{1}{3^n} < \varepsilon$, s így $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$.

212. A sorozat szigorúan monoton nő. Továbbá:

$$a_n < \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \cdots + \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a-1}\left(1 - \frac{1}{a^n}\right) < \frac{1}{a-1}.$$

213. Jelöljük az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ számok közül a legnagyobbat A-val. Becsüljük a sorozatot alulról és felülről is:

$$A \le \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} \le A\sqrt[n]{k}.$$

Mivel rögzített k-ra $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{k} = 1$, ezért a rendőr-elv szerint $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} = A$.

214. $s_n = \left(\frac{8}{9}\right)^n$, így a beszínezett rész területe: $1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n$. $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$.

215. Legyen $[a_n]$ tetszőleges sorozat. 1.eset: A sorozatnak nincs legnagyobb eleme, akkor könnyen látható, hogy a sorozatból kiválasztható egy szigorúan monoton növekvő részsorozat. 2.eset: A sorozatnak van legnagyobb eleme, de véges sok elem elhagyásával olyan sorozatot kapunk, amelynek már nincs legnagyobb eleme. Erre a maradék sorozatra alkalmazzuk az 1. esetbeli meggondolást. 3.eset: Akárhogyan hagyunk is el véges sok elemet a sorozatból, a megmaradt elemek között mindig van legnagyobb. Ekkor egy monoton csökkenő részsorozatot tudunk kiválasztani a következő módon. Legyen a sorozat legnagyobb eleme a_{n_1}. Az $a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}$ elemek elhagyásával kapott sorozatnak is van legnagyobb eleme, legyen ez a_{n_2}. Nyilvávalóan $a_{n_1} \ge a_{n_2}$. Ezt az eljárást folytatva – miután kiválasztottuk az a_{n_k} elemet – az n_k-nál nagyobb indexű elemek között is van legnagyobb, így $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, a_{n_{k+1}}, \ldots$ a sorozat egy monoton csökkenő részsorozata.

216. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n \quad (n > 1),\quad$ ezért $1 < \dfrac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} < \dfrac{n}{n-1}$.
Az eredmény a rendőr-elv alkalmazásával kapható meg.

217. Tudjuk, hogy $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Ebből egyrészt $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1$, másrészt $1 < (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{n+1}{n} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, s így $\frac{n}{n+1} < n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1$, amiből a rendőr-elv alkalmazásával adódik az eredmény. Megjegyezzük, hogy a **T 7.41** tétel alkalmazásával azonnal adódik az állítás:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \ln e = 1.$$

218. Felhasználva az $\ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \ln\frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \ln(k-1) - 2\ln k + \ln(k+1)$ azonosságot: $a_n = -\ln 2 + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. A **T 7.41** tétel szerint: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$, ezért $\lim_{n\to\infty} a_n = -\ln 2$.