8. Függvényhatárérték és folytonosság (megoldások)

1. $2, 1, \sqrt{3}, \frac{2}{7}, \frac{3}{17}$. **2.** $4\sqrt{2}+1, \frac{\sqrt{2}+1}{2}, 2\sqrt{10}-5$.

3. A területet a következő függvény határozza meg:

$$T(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } 0 \le x \le \sqrt{2}; \\ -x^2 + 4x\sqrt{2} - 4, & \text{ha } \sqrt{2} < x \le 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

$T(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{2}$, $\quad T(2) = 8(\sqrt{2}-1)$.

4. $f(x+1) = \left|\dfrac{x}{2+x}\right|$, ha $x \neq -2$; $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(x)$, ha $x \neq -1, 0$; $\dfrac{1}{f(x)} = \left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$, ha $x \neq \pm 1$; $f(x^2) = \dfrac{|1-x^2|}{1+x^2}$.

5. $f(x) = f(x+2-2) = \dfrac{1}{x+3}, x \neq -3$.

6. $f(x) = f\left(\dfrac{1}{\frac{1}{x}}\right) = \dfrac{1}{x^2} + 1, \quad x \neq 0$.

7. x-et állítsuk elő $\dfrac{a-1}{a+1}$ $(a \neq -1)$ alakban; ebből $a = \dfrac{x+1}{x-1}$ $(x \neq 1)$. Ezért:

$$f(x) = f\left(\frac{\frac{x+1}{x-1} - 1}{\frac{x+1}{x-1} + 1}\right) = \frac{x+1}{1-x}, \quad x \neq 1.$$

8. $\dfrac{x^4+1}{x^2} = x^2 + \dfrac{1}{x^2} = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 - 2$, ezért az $f(x) = x^2 - 2$ függvény megfelel a követelménynek.

9. $1 - |x|^3 = 1 - \left(\sqrt{x^2}\right)^3$ miatt az $f(x) = 1 - x^{\frac{3}{2}}$ függvény teljesíti a feltételt.

10. $\operatorname{Dom} f = (-1, 1)$. Számítsuk ki $f(a) + f(b)$, illetve $f\left(\dfrac{a+b}{1+ab}\right)$ értékeket.

11. Az $f(0) = 2$ feltételből azonnal adódik, hogy $d = 2$. A

$$\begin{aligned} 0 &= f(-1) = -a + b - c + 2 \\ -3 &= f(1) = a + b + c + 2 \\ 5 &= f(2) = 8a + 4b + 2c + 2 \end{aligned}$$

egyenletrendszert megoldva: $a = \frac{10}{3}, b = -\frac{7}{2}, c = -\frac{29}{6}$.

12. $a = 10, b = 5, c = 2$.

13. $x^3 + ax^2 + 2x = (2x-1)(bx^2 + cx + d) \quad (x \neq \frac{1}{2}) \iff x^3 + ax^2 + 2x = 2bx^3 + (2c-b)x^2 + (2d-c)x - d$, azaz ha $2b = 1, 2c - b = a, 2d - c = 2, d = 0$, s így $b = \frac{1}{2}, c = -2$ és $a = -\frac{9}{2}$.

14. $a = b = -1$. **15.** $\{x \in \mathbf{R};\quad x \neq -1\}$. **16.** $(-\infty, \frac{5}{2}]$.
17. $\mathbf{R}$. **18.** $\emptyset$. **19.** $\{0\}$.
20. $\{x \in \mathbf{R};\quad x \neq \pm 10\}$. **21.** $\{x \in \mathbf{R};\quad x > \frac{4}{3}\}$. **22.** $\{x \in \mathbf{R};\quad |x| > 2\}$.
23. $(4, \infty)$. **24.** $\{x \in \mathbf{R};\quad x > 2\}$.
25. $\{x \in \mathbf{R};\quad -\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.
26. $\{x \in \mathbf{R};\quad x < 2 \text{vagy} x > 3\}$.
27. $\{x \in \mathbf{R}; \dfrac{\pi}{4} + k\pi \leq x < \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.
28. $(\frac{8}{3}, 3)$.
29. $(2; 3)$.
30. $\{x \in \mathbf{R};\quad -1 < x < 0 \text{vagy} x > 1, x \neq 2\}$.
31. $e^{2k\pi} < x < e^{(2k+1)\pi}, \quad k \in \mathbf{Z}$. **32.** $x < 1 - \dfrac{1}{e}$.
33. $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} \frac{1}{f} = \mathbf{R}$.
34. $\operatorname{Dom} f = [-2; \infty);\quad \operatorname{Dom} \dfrac{1}{f} = [-2; -1) \cup (-1; \infty)$.
35. $\operatorname{Dom} f = [-\dfrac{1}{2}; \infty);\quad \operatorname{Dom} \dfrac{1}{f} = [-\dfrac{1}{2}; 0) \cup (0; \infty)$.
36. $\operatorname{Dom} f = \mathbf{R};\quad \operatorname{Dom} \dfrac{1}{f} = \{x \in \mathbf{R};\quad x \neq \dfrac{\ln 2}{\ln 5 - \ln 2}\}$.
37. $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} \dfrac{1}{f} = \mathbf{R}$.
38. $\operatorname{Dom} f = \{x \in \mathbf{R};\quad x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}; \operatorname{Dom} \dfrac{1}{f} = \{x \in \mathbf{R};\quad x \neq k\pi, x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.
39. $-1 \leq \cos 3x \leq 1 \iff 1 \geq -\cos 3x \geq -1 \iff 3 \geq 2 - \cos 3x \geq 1 \iff \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 - \cos 3x} \leq 1$, ezért $\operatorname{Ran} f = \left[\frac{1}{3}; 2\right];\quad \operatorname{Dom} f = \mathbf{R}$.
40. $f(0) = 0$. Legyen $x \neq 0$, akkor $f(x) \neq 0$. Oldjuk meg az $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$ egyenletet x-re, azaz $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4(f(x))^2}}{2f(x)}$. Mivel $\operatorname{Dom} f = \mathbf{R}$, ezért az egyenletnek minden $x(\neq 0)$ esetén megoldhatónak kell lenni, tehát $1 - 4(f(x))^2 \geq 0$. Az $f(0) = 0$ esetet is figyelembe véve: $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$.
41. Az $1 - 2\cos x > 0$ feltétel miatt az értelmezési tartomány: $\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$. $-1 \leq \cos x \leq 1 \iff 2 \geq -2\cos x \geq -2 \iff 3 \geq 1 - 2\cos x \geq -1$, de $1 - 2\cos x > 0$, így $3 \geq 1 - 2\cos x > 0$, ezért $f(x) \leq \lg 3$.
42. $\operatorname{Dom} f = [-1; 2]; f(x) = \sqrt{-\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}}$. Mivel $-1 \leq x \leq 2$, ezért $-\frac{3}{2} \leq x - \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2};\quad 0 \leq \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{4}; 0 \geq -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq -\frac{9}{4}; \frac{9}{4} \geq -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \geq 0; \frac{3}{2} \geq f(x) \geq 0$.

43. $0 \leq x - 5 \leq 1$, azaz $5 \leq x \leq 6$.

44. $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$.

45. $-1 \leq x \leq 0$.

46. $-\frac{1}{2} \leq x \leq 0$.

47. $0 \leq 3x^2 \leq 1$, azaz $-\frac{\sqrt{3}}{3} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$.

48. $k\pi \leq x \leq \dfrac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$.

49. $\operatorname{Dom} f = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$; az $x^2 + y^2 \leq 1$ körlap pontjainak halmaza.

50. Egyrészt $y \geq 0$, másrészt $x - \sqrt{y} \geq 0$. Az utóbbiból adódik, hogy $x \geq 0$ és $x^2 \geq y$. $\operatorname{Dom} f = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ 0 \leq x, 0 \leq y \leq x^2\}$ (l. **ábra**)

51. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\quad x > 0, y > 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\quad x < 0, y < 0\}$.

52. Azon $P(x, y)$ pontok halmaza, amelyek ordinátájára az $x \geq 0$ esetben $2k\pi \leq y \leq (2k + 1)\pi$, az $x \leq 0$ esetben pedig $(2k + 1)\pi \leq y \leq (2k + 2)\pi$ teljesül, ahol $k \in \mathbf{Z}$.

53. $\ln(\sin x \cos y) \geq 0$ miatt $\sin x \cos y \geq 1$, azaz $\sin x = \cos y = 1$ vagy $\sin x = \cos y = -1$. Így az értelmezési tartományt a $P\left(\frac{(4k+1)\pi}{2}; 2m\pi\right)$ és a $Q\left(\frac{(4r-1)\pi}{2}; (2s + 1)\pi\right)$ pontok halmaza ábrázolja, ahol $k, m, r, s \in \mathbf{Z}$.

54. $\operatorname{Dom} f = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\quad x > 0, y > 0, z > 0\}$

55. Az origó középpontú egységsugarú gömbtartomány belső pontjainak halmaza.

56. $\operatorname{Dom} f = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\quad |x| \leq 1, |y| \geq 1\}$.

57. $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ körgyűrű.

8.3

58. Az $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\geq\frac{1}{4}$ körkülső és az $(x-1)^2+y^2\leq 1$ körlap közös része.

59. $\dfrac{1}{\sqrt{xy}}$ akkor van értelmezve, ha $xy>0$. Ez az első és harmadik síknegyedben igaz (a tengelyeken lévő pontok kivételével). A második tagban az $|x+y|<1$ teljesülése szükséges, azaz $-1<x+y<1$. Ez az $y=-1-x$ és az $y=1-x$ párhuzamos egyenesek közötti nyílt sávot jellemzi. Az értelmezési tartomány képe a két alakzat közös része. (l. a fenti ábrán).

60. $x=ky, \quad y\neq 0, \quad k\in\mathbf{Z}$. Az origón átmenő egyenessereg (az origó nem tartozik bele a tartományba). Megjegyezzük, hogy $\operatorname{Ran} f=\{0\}$.

61. A feltétel: $\sin\pi x\sin\pi y\geq 0$. A kifejezés pontosan akkor 0, ha $\sin\pi x=0$ vagy $\sin\pi y=0$, azaz $x=k$ vagy $y=l \quad (k,l\in\mathbf{Z})$; az előjelváltási pontok tehát az egész koordinátájú helyeken vannak. Ha $0<x<1$ és $0<y<1$, akkor mindkét tényező pozitív; ezért az értelmezési tartomány képe a következő ábrán látható sakktáblaszerű nemkorlátos zárt halmaz.

62. $\operatorname{Dom} f=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3;\quad x^2+y^2\leq z\leq 4-x^2-y^2\}$; két forgási paraboloid közös része.

63. Egyrészt $y>x$, másrészt $x\neq 0$, mégpedig

x és $\ln(y-x)$ egyező előjelű. Ha tehát $x > 0$, akkor $y > x+1$; ha $x < 0$, akkor $x < y < x+1$. Az értelmezési tartomány képe a következő ábrán látható.

64. A két koordináta-tengely.

65. $\sin \pi x = \sin \pi y = 0 \Longrightarrow x, y \in \mathbf{Z}$. Az értelmezési tartomány $\mathbf{Z}^2$.

66. Ha $c < 1$ akkor a számlálót, illetve a nevezőt 0-val egyenlővé téve a következő köregyenletekhez jutunk:

$$k_1 : (x+1)^2 + y^2 = 1 - c$$
$$k_2 : (x-1)^2 + y^2 = 1 - c,$$

és így az értelmezési tartomány képe a két kör belsejének közös részéből, a két kör külsejének közös részéből és a k_1 kör pontjaiból áll. (Ha $0 \le c < 1$, akkor a két kör belsejének közös része üres.) Ha $c = 1$, akkor az értelmezési tartomány az xy-koordinátasík, kivéve az $(1, 0)$ pontot. Ha $c > 1$, akkor az xy-koordinátasík.

67. r sugarú z-tengelyű henger, kizárva belőle az s sugarú origó középpontú gömbtartomány pontjait.

68.

69. $x^{\frac{1}{\lg x}} = x^{\log_x 10} = 10,\ x > 0, x \neq 1.$

70.

71.

72.

73. $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{ha } x \geq 0; \\ 0, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$

74.

75. **76.**

77. $f(x+a)$ és $f(x)+b$: Eltolás $[-a;0]$ illetve $[0;b]$ vektorral.
$f(kx)$: Ha $0<k$, akkor az y-tengelyre vonatkoztatott $\frac{1}{k}$ arányú nyújtás, ha $k<0$, akkor az y-tengelyre vonatkoztatott $\frac{1}{|k|}$ arányú nyújtás és az y-tengelyre vonatkozó tükrözés.
$lf(x)$: Ha $0<l$, akkor az x-tengelyre vonatkoztatott l arányú nyújtás, ha $l<0$, akkor az x-tengelyre vonatkoztatott $|l|$ arányú nyújtás és az x-tengelyre vonatkozó tükrözés.
$|f(x)|$: Ha $f(x)\geq 0$, akkor $|f(x)|=f(x)$, ha $f(x)<0$, akkor $|f(x)|=-f(x)$, ez pedig az x-tengelyre való tükrözést jelent.
$f(|x|)$: Ha $x\geq 0$, akkor $f(|x|)=f(x)$, ha $x<0$, akkor $f(|x|)=f(-x)$, ez pedig az y-tengelyre való tükrözést jelent. Eszerint $f(|x|)$ grafikonja $f(x)$ grafikonjának azon részéből áll amelyre $x\geq 0$ és ennek y-tengelyre vonatkozó tükörképéből.

78. Egy lehetséges sorrend: $f(kx), lf(kx), lf(k(x+a)), lf(k(x+a))+b$.

79. $\dfrac{2x+5}{x+1} = \dfrac{2(x+1)+3}{x+1} = 2 + \dfrac{3}{x+1}$.

80. $3\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \dfrac{1}{2}\sin x\right) = 2\sqrt{3}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

81. $|x^2 - 2x - 4| = |(x-1)^2 - 4|$. **82.**

83.

84. Az x-nívóvonalak a $z = a^2 + y^2 (a \in \mathbf{R})$ egyenletű parabolák, az y-nívóvonalak a $z = x^2 + b^2 \quad (b \in \mathbf{R})$ egyenletű parabolák, a z-nívóvonalak pedig az $x^2 + y^2 = c \quad (c \geq 0)$ egyenletü körök. A függvény grafikonja z-tengelyű forgási paraboloid.

85. A z-nívóvonalak $c^2 = x^2 + y^2 \quad (c \in \mathbf{R})$ egyenletű körök. A felületet messük el a z-tengelyre illeszkedő síkokkal. Ezen síkok egyenlete $ax + by = 0 \quad (a, b \in \mathbf{R}; a^2 + b^2 \neq 0)$ alakú. A metszésvonalak egyenletrendszerét a

$$\begin{aligned} z^2 &= x^2 + y^2 \\ 0 &= ax + by \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldása adja. Ha $b = 0$, akkor $x = 0$ és $z = \pm y$. Ha $b \neq 0$, akkor $y = -\dfrac{a}{b}x$ és $z = \pm\dfrac{a^2+b^2}{b}x$. A metszésvonalak tehát minden esetben az origón átmenő, merőleges, z-tengelyre szimmetrikus egyenespárok. A függvény grafikonja z-tengelyű kettős körkúp (forgáskúp). Megjegyezzük, hogy az x- illetve y-nívóvonalak hiperbolák.

86. Az x- illetve y-nívóvonalak parabolák. A z-nívóvonalak $y^2 - x^2 = c \quad (c \in \mathbf{R})$ egyenletű hiperbolák. (Ha a felületet az yz síkkal metszük, a metszésvonal a $z = y^2$ egyenletű parabola. Az xz síkkal való metszéskor a $z = -x^2$ egyenletű parabolát kapjuk. A felületet úgy képzelhetjük el szemléletesen, hogy a $z = y^2$ egyenletű parabolán "végigcsúszik" a $z = -x^2$ egyenletű parabola.) A felület egy úgynevezett nyeregfelület.

87. Az x- illetve y-nívóvonalak parabolák. A z-nívóvonalak $y = -x \pm c \quad (c \geq 0)$ egyenletű párhuzamos egyenesek. A felület parabola alapú, azaz parabolikus henger.

88. Az x-nívóvonalak a $z = a^2 + y \quad (a \in \mathbf{R})$ egyenletű párhuzamos egyenesek, az y-nívóvonalak a $z = x^2 + b \quad (b \in \mathbf{R})$ egyenletű parabolák, a z-nívóvonalak az $y = c - x^2 \quad (c \in \mathbf{R})$ egyenletű parabolák. (Az yz síkban a metszésvonal a $z = y$ egyenletű egyenes, az xz síkban pedig a $z = x^2$ egyenletű parabola. A felületet a $z = x^2$ egyenletű parabolának a $z = y$ egyenesen való "csúsztatásával" származtathatjuk.) A felület parabolikus henger.

89. Az $y = 0$ egyenletű síkkal (xz sík) metszve a metszésvonal az $x^2 - z^2 = 1$ egyenletű hiperbola. Az yz síkkal metszve a felületet szintén hiperbola adódik. A z-nívóvonalak az $x^2 + y^2 = c^2 + 1 \quad (c \in \mathbf{R})$ egyenletű körök. A felület egy úgynevezett egyköpenyű forgáshiperboloid, amely például az $x^2 - z^2 = 1$ egyenletű hiperbola z-tengely körüli forgatásával adódik.

90. Az xz síkkal metszve a metszésvonal az $z^2 - x^2 = 1$ egyenletű hiperbola. Az yz síkkal metszve, metszésvonalként szintén hiperbola adódik. A z-nívóvonalak az $x^2 + y^2 = c^2 - 1 \quad (|c| \geq 1)$ egyenletű körök. A felület egy úgynevezett kétköpenyű hiperboloid, amely például az $z^2 - x^2 = 1$ egyenletű hiperbola z-tengely körüli forgatásával adódik.

91. $y = 2x - \frac{x^2}{9}$.

92. $y = x - 2$.

93. $y = \sin 2t = 2\sin t \cos t = 2x\sqrt{1 - x^2}$.

94. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

95. $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$.

96. $\sin 2t = \dfrac{2\operatorname{tg} t}{1 + \operatorname{tg}^2 t}, \quad \cos 2t = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 t}{1 + \operatorname{tg}^2 t}; \quad y = \dfrac{2x + 1 - x^2}{1 + x^2}$.

97. $y = \sqrt[3]{(x-1)^2}$.

98. $x^2 + y^2 = a^2$.

99. $x^2 - y^2 = 4, \quad x \geq 2$.

100. Az $f(x) = \dfrac{3x+1}{5x+4}$ függvény értelmezve van 2 valamely (pl. 1 sugarú) környezetében, mivel $\mathrm{Dom}\, f = \mathbf{R} - \{-\frac{4}{5}\}$. Legyen $[x_n]$ tetszőleges olyan sorozat, amely benne van ebben a környezetben és $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$. Akkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3x_n + 1}{5x_n + 4} = \frac{3\lim_{n\to\infty} x_n + 1}{5\lim_{n\to\infty} x_n + 4} = \frac{3 \cdot 2 + 1}{5 \cdot 2 + 4} = \frac{1}{2}.$$

Tehát a Heine-féle definíció értelmében igaz az állítás.
Legyen ε tetszőleges pozitív szám. Azt kell megmutatni, hogy 2-nek van olyan δ sugarú környezete, amelyre, ha $0 < |x - 2| < \delta$, akkor $\left|\dfrac{3x+1}{5x+4} - \dfrac{1}{2}\right| < \varepsilon$, azaz $\left|\dfrac{x-2}{2(5x+4)}\right| < \varepsilon$. Elég csak azokkal az x-ekkel foglalkozni, amelyekre $x > -\frac{4}{5}$; ekkor az előző egyenlőtlenség a következőképpen írható:

$$-2\varepsilon(5x + 4) < x - 2 < 2\varepsilon(5x + 4).$$

Ezt az egyenlőtlenségrendszert megoldva $\varepsilon < \frac{1}{10}$ esetben, kapjuk a következőket:

$$\frac{2 - 8\varepsilon}{1 + 10\varepsilon} < x < \frac{2 + 8\varepsilon}{1 - 10\varepsilon}.$$

Mivel $2 - \dfrac{2-8\varepsilon}{1+10\varepsilon} = \dfrac{28\varepsilon}{1+8\varepsilon}$ és $\dfrac{2+8\varepsilon}{1-10\varepsilon} - 2 = \dfrac{28\varepsilon}{1-8\varepsilon}$, ezért a $\delta = \dfrac{28\varepsilon}{1+10\varepsilon}$ választással teljesül az első egyenlőtlenség $\varepsilon < \frac{1}{10}$ esetben. (Ha $\varepsilon \geq \frac{1}{10}$, akkor egy tetszőleges $0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{10}$ számra az előző meggondolások teljesülnek, s így ε-ra is.) Kaptuk, hogy a Cauchy-féle definíció értelmében is a határérték $\frac{1}{2}$.

101. Heine: Mivel $\operatorname{Dom} f = \mathbf{R} - \{0; 4\}$, ezért például ha $x_n \in (3; 5)$ és $x_n \neq 4 \quad (n = 1, 2, \ldots)$, továbbá $\lim_{n\to\infty} x_n = 4$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n^2 - 16}{x_n^2 - 4x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n + 4}{x_n} = 2$.

Cauchy: Legyen $\varepsilon > 0$. Ha $x \neq 4$, akkor $\left|\dfrac{x^2-16}{x^2-4x} - 2\right| = \left|\dfrac{x-4}{x}\right|$, és az előző feladatnál látott módon adódik, hogy $\varepsilon < 1$-re $\delta = \frac{4\varepsilon}{1+\varepsilon}$ megfelelő. De kevesebb számolással is célhoz érhetünk. Ha most azt is feltesszük, hogy $x \in (2; 5)$, kapjuk a következő egyenlőtlenséget: $\left|\dfrac{x-4}{x}\right| < \dfrac{|x-4|}{2}$. Ha tehát $\delta = 2\varepsilon$, akkor minden $x \in (2; 5) \quad (x \neq 4)$ szám, amely teljesíti a $0 < |x-4| < \delta$ egyenlőtlenségrendszert, teljesíti az $\left|\dfrac{x^2-16}{x^2-4x} - 2\right| < \varepsilon$ egyenlőtlenséget is.

102. Heine: Legyen $[x_n]$ tetszőleges olyan sorozat, amelyre $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. Így

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5x_n + 1}{3x_n + 9} = \lim_{n\to\infty} \frac{5 + \frac{1}{x_n}}{3 + \frac{9}{x_n}} = \frac{5}{3}.$$

103. Cauchy: Bebizonyítjuk, hogy bármely k pozitív számhoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $0 < |x-1| < \delta$, akkor $\left|\dfrac{1}{(1-x)^2}\right| = \dfrac{1}{(1-x)^2} > k$. Oldjuk meg az előbbi egyenlőtlenséget: $|1-x| < \dfrac{1}{\sqrt{k}}$, azaz $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

104. Heine: $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \log_a x_n = -\infty$.
Cauchy: Bebizonyítjuk, hogy tetszőleges k negatív valós számhoz van olyan M pozitív valós szám, hogy ha $M < x$, akkor $\log_a x < k$. Ez utóbbi egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, ha $x > a^k$, azaz $M = a^k$.

105. Heine: Válasszuk ki a következő két nullasorozatot: $[x_n] = \left[\dfrac{1}{n}\right]$, $[x'_n] = \left[\dfrac{2}{4n+1}\right]$. Nyilvánvaló, hogy $\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{4n+1} \in \operatorname{Dom} f \quad (n = 1, 2, \ldots)$. Azonban $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\dfrac{\pi}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sin n\pi = 0$ és $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\dfrac{\pi}{x'_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sin\dfrac{\pi}{2} = 1$.

Cauchy: Tegyük fel, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\dfrac{\pi}{x} = a \geq 0$. Ez azt jelenti, hogy bármely pozitív ε-hoz van olyan pozitív δ, hogy ha $|x| < \delta$, akkor $\left|\sin\dfrac{\pi}{x} - a\right| < \varepsilon$, azaz $a - \varepsilon < \sin\frac{\pi}{x} < a + \varepsilon$. legyen $0 < \varepsilon < 1$. Ha most $-1 < \sin\varphi < -\varepsilon$ és $x = \dfrac{\pi}{\varphi + 2n\pi} \quad (n \in \mathbf{N}^+)$, akkor $\sin\dfrac{\pi}{x} = \sin\varphi$ miatt bármely $\delta > 0$ esetén van olyan $n \in \mathbf{N}^+$, hogy $|x| < \delta$, de $\sin\frac{\pi}{x} < -\varepsilon \leq a-\varepsilon$. Ellentmondás. Hasonlóan, $a < 0$ esetben is ellentmondásra jutunk.

106. A Heine-féle definíció alapján hasonlóan bizonyítható, mint a **7.89** feladat állítása.

107. Az előző feladathoz hasonlóan bizonyítható.

108. 0. **109.** $\frac{1}{2}$. **110.** ∞.

111. 3. **112.** $\left(\frac{3}{2}\right)^{30}$. **113.** 3.

114. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{9x^3+5x^2-4x-2}{(2x+1)(1-2x^2)} = -\dfrac{9}{4}$.

115. $n^{-\frac{n(n+1)}{2}} \quad (n \in \mathbf{N}^+)$. **116.** $\frac{7}{3}$.

117. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{(x-1)(x+5)}{(x+1)(x-1)} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{x+5}{x+1} = 3$.

118. 1. **119.** $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^4+5x^3+1}{x^4+2} = \dfrac{1}{2}$.

120. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{2-x-x^2}{(1-x)(x^2+x+1)} = 1$.

121. $\dfrac{p}{q}$. **122.** $-\frac{1}{2}$. **123.** 10.

124. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{1+\frac{1}{x^2}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}} = 1$. **125.** 1.

126. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+\sqrt[6]{\frac{1}{x}}+\sqrt[4]{\frac{1}{x}}}{\sqrt{2+\frac{1}{x}}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

127. 1.

128. $x \neq 1$ miatt $(x-1)^2$-nel egyszerűsithetünk. Ezután a keresett határérték $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2+x+2}{x+1} = 2$.

129. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^{\frac{4}{3}}\sqrt[3]{1+\frac{3}{x^4}} - x^{\frac{3}{5}}\sqrt[5]{1+\frac{4}{x^3}}}{x^{\frac{7}{3}}\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^7}}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{1+\frac{3}{x^4}} - \frac{1}{\sqrt[15]{x^{11}}}\sqrt[5]{1+\frac{4}{x^3}}}{x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^7}}} = 0$

130. $\lim\limits_{x\to6} \dfrac{x-2-4}{(x-6)(\sqrt{x-2}+2} = \lim\limits_{\frac{1}{\sqrt{x-2}+2}} = \dfrac{1}{4}$.

131. $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{(x+1)(\sqrt{6x^2+3}-3x)}{3-3x^2} = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{\sqrt{6x^2+3}-3x}{3(1-x)} = 1$.

132. $\lim\limits_{x\to5} \dfrac{(6-x-1)(3+\sqrt{4+x})}{(9-4-x)(\sqrt{6-x}+1)} = 3$.

133. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{2}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1-x^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}} = \dfrac{2}{3}$.

134. 1. **135.** $\frac{3}{2}$.

136. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \dfrac{1}{2}$.

137. 0. **138.** 0. **139.** $\frac{2}{3}$.

140. $\frac{1}{2}$. **141.** $\dfrac{a+b}{2}$. **142.** 1.

143. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{(2\sin x-1)(\sin x+1)}{(2\sin x-1)(\sin x-1)} = -3$.

144. $\lim \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{\cos x}-1}{1-\cos^2 x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos x(1+\cos x)} = \dfrac{1}{2}$.

145. Alkalmazzuk a $\cos^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1+\cos x}{2}$ és a $\sin x = \sin 2\dfrac{x}{2} = 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$ azonosságokat:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos^2\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 2\sin^2\frac{x}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg}\frac{x}{2} = 1.$$

146. Végezzük el a $z = x - \dfrac{\pi}{6}$ helyettesítést: $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\sin z}{\sqrt{3} - 2\cos\left(z+\frac{\pi}{6}\right)} =$

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos z + \sin z} = \lim_{z\to 0} \frac{2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}}{2\sqrt{3}\sin^2\frac{z}{2} + 2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}} = 1.$$

147. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left|\dfrac{\cos x\sqrt[3]{(1+\sin x)^2}}{\sqrt[3]{(1-\sin^2 x)^2}}\right| = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left|\dfrac{\sqrt[3]{(1+\sin x)^2}}{\cos x}\right| = \infty$.

148. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2 x}{\sin x(1+\cos x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{1+\cos x} = 0$.

149. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos x)^2\cos^2 x}{\sin^2 x(1-\cos^2 x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^2 x}{(1+\cos x)^2} = \dfrac{1}{4}$.

150. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(1-\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)\dfrac{\sqrt{2}\cos x+1}{2\cos^2 x-1} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt{2}\cos x+1}{\cos^2 x} = 4$.

151. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}^2 x(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})(1+\cos x)}{\cos^2 x} = 4\sqrt{2}$.

152. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{x} = 3\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{3x} = 3$. **153.** $4\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{4x}\dfrac{x}{\sin x}\dfrac{1}{\cos 4x} = 4$.

154. Ha $\alpha = 0$, akkor a határérték 0. Ha $\alpha \neq 0$, akkor $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\alpha x}{\alpha x}\dfrac{\beta x}{\sin\beta x}\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\alpha}{\beta}$.

Ez azt jelenti, hogy minden α-ra $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x} = \frac{\alpha}{\beta}$.

155. Az előző feladat alapján: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\frac{\sin 6x}{\sin x} - \frac{\sin 7x}{\sin x}} = \dfrac{1}{6-7} = -1$.

156. Használjuk fel az $1-\cos 2x = 2\sin^2 x$ azonosságot! A határérték: $\frac{2}{3}$.

157. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}\dfrac{\sin x}{1+\cos x} = 0$.

158. Az előző feladathoz hasonló módon oldható meg. A határérték: 1.

159. Végezzük el az $u = \sin x$ helyettesítést! Felhasználva az előző feladatot, a határérték: 1.

160. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3(\sqrt{1+\operatorname{tg} x} + \sqrt{1+\sin x})} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} + \sqrt{1+\sin x}} \dfrac{\sin x}{x} \dfrac{1-\cos x}{x^2 \cos x}$
$= \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2 x}{x^2 \cos x(1+\cos x)} = \dfrac{1}{4}.$

161. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x \cos x} = \dfrac{1}{2}.$

162. Legyen $z = 1 - x$. Akkor: $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} z)}{z} = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\sin \frac{\pi}{2} z}{z} = \dfrac{\pi}{2}.$

163. A $z = x - 1$ jelölést és a **154.** feladat eredményét használva:
$\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\sin(7\pi + 7\pi z)}{\sin(2\pi + 2\pi z)} = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{-\sin 7\pi z}{\sin 2\pi z} = -\dfrac{7}{2}.$

164. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin x}{(\pi + x)(\pi - x)} = -\dfrac{1}{2\pi} \lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin x}{x - \pi} = -\dfrac{1}{2\pi} \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\sin(z+\pi)}{z} =$
$\dfrac{1}{2\pi} \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\sin z}{z} = \dfrac{1}{2\pi}.$

165. $\pi \lim\limits_{\frac{\pi}{x}\to 0} \dfrac{\sin \frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}} = \pi.$

166. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x\right)^7 = e^7.$

167. $\sqrt[3]{e}.$

168. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\left(1 + \dfrac{3}{x-1}\right)^{x-1}\right)^{\frac{2x+1}{x-1}} = \left(e^3\right)^2 = e^6.$

169. $\sqrt{e}.$

170. $e^3.$

171. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^x \left(\left(1 - \dfrac{1}{2x+1}\right)^{2x+1}\right)^{\frac{x}{2x+1}} = 0 \left(e^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} = 0.$

172. $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{x^2 - 3x + 7 + 8x - 3}{x^2 - 3x + 7}\right)^x =$
$\lim_{x\to -\infty} \left(\left(1 + \frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}\right)^{\frac{x(8x-3)}{x^2-3x+7}} = e^8.$

173. A függvényhatárérték Heine-féle definíciója alapján és **D 7.42** szerint:
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim_{x\to x_0} g(x) \ln f(x)} = e^{b \ln a} = a^b.$

174. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} (1 + (f(x) - 1))^{g(x)} =$
$\lim\limits_{x\to x_0} \left(\left(1 + \dfrac{1}{\frac{1}{f(x)-1}}\right)^{\frac{1}{f(x)-1}}\right)^{g(x)(f(x)-1)} = e^{\lim_{x\to x_0} g(x)(f(x)-1)} = e^b.$

175. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1}{1+\sqrt{x}}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}.$

176. $\frac{1}{4}.$

177. Legyen $f(x) = \dfrac{2x^2+3}{2x^2+5}$ és $g(x) = 8x^2+3$. $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$és
$\lim_{x\to\infty} g(x)(f(x)-1) = -8$, ezért $\lim_{x\to\infty} f(x)^{g(x)} = e^{-8}$.

178. $e^0 = 1$. **179.** e^{-1}.

180. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x = 1$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} |\operatorname{tg} x| = \infty$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x(\sin x - 1) =$
$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{\cos x}\dfrac{\sin^2 x - 1}{\sin x + 1} = -\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x\cos x}{1+\sin x} = 0$. A határérték: 1.

181. $e^{-\frac{1}{2}}$. **182.** $\sqrt{e}$.

183. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x-6+8}{(x^3+8)(\sqrt[3]{(x-6)^2} - \sqrt[3]{(x-6)8} + \sqrt[3]{8^2})} =$
$\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{1}{(x^2-2x+4)(\sqrt[3]{(x-6)^2} - \sqrt[3]{(x-6)8} + \sqrt[3]{4})} = \dfrac{1}{144}$.

184. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(1-x)(1+\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{x^2}+\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[5]{x^4})}{(1-x)(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})} = \dfrac{5}{3}$.

185. $\lim\limits_{x\to\infty} 2\cos\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+1}}{2}\sin\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{2} =$
$\lim\limits_{x\to\infty} 2\cos\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+1}}{2}\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} = 0$.

186. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(2x)^6}{\sin^6 2x}\dfrac{\cos^2 3x^3 - 1}{(2x)^6}\dfrac{1}{\cos 3x^3+1} = -\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x^3}{(3x^3)^2}\dfrac{3^2}{2^6} = -\dfrac{9}{128}$.

187. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin 3x + 4\sin 5x}{\sin 6x(\sqrt{1+2\sin 3x}+\sqrt{1-4\sin 5x})} = \dfrac{13}{6}$ (l. a **154.** feladatot).

188. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2 x\cos 2x}{\operatorname{tg} x^2(1+\cos x\sqrt{\cos 2x})} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x(1-\cos 2x)+\sin^2 x}{\operatorname{tg} x^2} =$
$\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x(2\cos^2 x+1)\cos x^2}{\sin x^2} = \dfrac{3}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}\dfrac{x^2}{\sin x^2} = \dfrac{3}{2}$.

189.
$$\lim_{x\to 0}\left(1+\left(\cos^3 x - 1\right)^{\frac{1}{\cos^3 x - 1}}\right)^{\frac{\cos^3 x - 1}{x\sin x}} =$$
$$\lim_{x\to 0}\left(1+\left(\cos^3 x - 1\right)^{\frac{1}{\cos^3 x - 1}}\right)^{\frac{(\cos x-1)(\cos^2 x+\cos x+1)}{x\sin x}} =$$
$$\lim_{x\to 0}\left(1+\left(\cos^3 x - 1\right)^{\frac{1}{\cos^3 x - 1}}\right)^{\frac{(\cos^2 x-1)(\cos^2 x+\cos x+1)}{x\sin x(1+\cos x)}} = e^{-\frac{3}{2}}.$$

190. Az **174.** feladat szerint: $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sin a}, g(x) = \dfrac{1}{x-a}$ választással,
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to a} |g(x)| = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)(f(x)-1) =$

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}=\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}\frac{1}{\sin a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}=\operatorname{ctg} a,$$

és ezért $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}=e^{\operatorname{ctg} a}$.

191. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\frac{f(x)}{h(x)}h(x)}{\frac{g(x)}{k(x)}k(x)}=\alpha\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{h(x)}{k(x)}$.

192. $\lim_{x\to 1-0} f(x)=1,\quad \lim_{x\to 1+0} f(x)=2$.

193. -2 és 2.

194. 3 és 4.

195. $\sqrt{1-\cos 2x}=\sqrt{2}|\sin x|$ azonosság segítségével: $-\sqrt{2}$ és $\sqrt{2}$.

196. Ha $x_n=\dfrac{1}{2n}$ és $x_n'=\dfrac{2}{2n+1}$ $(n\in\mathbf{N}^+)$, akkor $\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty} x_n'=0$ és $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\cos 2\pi n=1$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n')=\lim\limits_{n\to\infty}\cos(2n+1)\dfrac{\pi}{2}=0$, ezért a függvénynek nincs jobb oldali határértéke a 0 helyen. Mivel a függvény páros, ezért bal oldali határérték sem létezik.

197. $-\infty$ és ∞.

198. $\frac{3}{2}$ és $\frac{1}{4}$.

199. $f(x)=\dfrac{(x+3)(x-1)}{(x+3)(x+2)}=\dfrac{x-1}{x+2}$, $x\neq -3;-2$. Minden $x\in\mathbf{R}-\{-3;-2\}$ helyen folytonos a függvény. $\lim\limits_{x\to -3} f(x)=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x-1}{x+2}=4$, ezért az $x=-3$ helyen a függvénynek hézagpontja van. $\lim\limits_{x\to -2-0} f(x)=\infty$ és $\lim\limits_{x\to -2+0} f(x)=-\infty$, azaz az $x=-2$ helyen a függvénynek pólusa van.

200. Minden $x\in\mathbf{R}-\{-3;3\}$ helyen folytonos; az $x=-3$ és az $x=3$ helyen pólusa van.

201. Mindenütt folytonos.

202. A 0 és 3 helyeken pólusa van, másutt folytonos.

203. Az $x\neq -1$ helyeken folytonos. $\lim_{x\to -1} f(x)=0$, $\lim_{x\to -1+0} f(x)=\infty$, ezért az $x=-1$ helyen lényeges szingularitása van.

204. $x=0$ kivételével mindenütt folytonos. $\lim_{x\to -0} f(x)=1$, $\lim_{x\to +0} f(x)=0$, a függvénynek az $x=0$ helyen lényeges szingularitása van.

205. $x=-2$ kivételével mindenütt folytonos. A függvénynek a -2 helyen lényeges szingularitása van, mert $\lim_{x\to -2-0} f(x)=-3$ és $\lim_{x\to -2+0} f(x)=-1$.

206. Az $x=1$ helyen lényeges szingularitása van, minden más helyen folytonos.

207. Az $x=0$ helyen hézagpontja van, a többi helyen folytonos.

208. Az $x=0$ helyen hézagpontja van, a többi helyen folytonos.

209. Ha $x\neq k\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$, akkor a függvény folytonos. $\lim_{x\to n\pi-0} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to n\pi+0} f(x)=\infty, \lim_{x\to(2n+1)\frac{\pi}{2}-0} f(x)=\infty, \lim_{x\to(2n+1)\frac{\pi}{2}+0} f(x)=-\infty$, $(n\in\mathbf{Z})$, az $x=k\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$ helyeken a függvénynek pólusa van.

210. Ha $x\neq 2k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$, akkor $f(x)=1+\cos x$, s így a függvény folytonos. Az $x=2k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$ helyeken a függvénynek hézagpontja van.

211. Az $x = \dfrac{k}{2}$ $(k \in \mathbf{Z})$ helyek kivételével folytonos. $\lim\limits_{x\to\frac{k}{2}-0} f(x) = k - 1 - k + 2 = 1$,
$\lim\limits_{x\to\frac{k}{2}+0} f(x) = k - k + 2 = 2$, az $x = \frac{k}{2}$ $(k \in \mathbf{Z})$ helyeken lényeges szingularitása van.

212. A határérték minden x helyen 1. Mivel

$$\begin{cases} 1, & \text{ha } x \neq 0; \\ 0, & \text{ha } x = 0, \end{cases}$$

ezért $x = 0$ helyen a függvénynek megszüntethető szakadása van. $x \neq 0$ helyeken a függvény folytonos.

213. A határérték minden x helyen 1. Mivel

$$\begin{cases} 1, & \text{ha } x \neq k\pi; \\ 0, & \text{ha } x = k\pi (k \in \mathbf{Z}), \end{cases}$$

ezért $x = k\pi$ helyeken a függvénynek megszüntethető szakadása van. $x \neq k\pi$ helyeken a függvény folytonos.

214. Mindenütt folytonos.

215. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^2 -1}{x(1+\cos x)} = 0 = f(0)$, azaz a függvény mindenütt folytonos.

216. $\lim_{x\to 0} f(x) = 4 = f(0)$, $\lim_{x\to 2} f(x) = 0 = f(2)$, tehát a függvény folytonos az $x = 0$ és az $x = 2$ helyeken. Legyen $x_0 \in \mathbf{R} - \{0; 2\}$. Ha $[x_n]$ és $[x'_n]$ olyan sorozatok, amelyekre $x_n \in \mathbf{Q}$, $x'_n \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ $(n \in \mathbf{N}^+)$ és $\lim_{x\to\infty} x_n = \lim_{x\to\infty} x'_n = x_0$, akkor $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 4 - x_0^2$ és $\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = 4 - 2x_0$. Mivel $x_0 \in \mathbf{R} - \{0; 2\}$, ezért $4 - x_0^2 \neq 4 - 2x_0$, így az $x = x_0$ helyen a függvénynek lényeges szingularitása van.

217. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-\cos^2 x^2}}{\sqrt{1+\cos x^2}} \dfrac{1+\cos x}{1-\cos^2 x} = \sqrt{2} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x^2}{x^2} \dfrac{x^2}{\sin^2 x} = \sqrt{2}$, azaz az $x = 0$ $(k = 0)$ helyen a függvénynek megszüntethető szakadása van. Ha $x \neq 2k\pi$, akkor a függvény folytonos. Ha $x = 2k\pi$ $(k \neq 0)$, akkor a függvénynek pólusa van.

218. $a = \lim\limits_{x\to 0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0.$ **219.** $a = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1+x}{(1+x)(1-x+x^2)} = \dfrac{1}{3}.$

220. $\lim_{x\to -0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to +0} f(x) = 1$, tehát az a bármilyen választása esetén az $x = 0$ helyen a függvénynek lényeges szingularitása van.

221. $\lim_{x\to -0} f(x) = 1$, $\lim_{x\to +0} f(x) = -a$, ezért $a = -1$.

222. $-1 = \lim_{x\to -0} f(x) = \lim_{x\to +0} f(x) = b$, $a - 1 = \lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} f(x) = 1$, azaz $a = 2$.

223. $1 - a + b = \lim_{x\to -1-0} f(x) = \lim_{x\to -1+0} f(x) = -1$, $1 = \lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} f(x) = 1 + a + b$, ezért $a = 1$, $b = -1$.

224. $\lim\limits_{x\to -1} |f(x)| = \lim\limits_{x\to -1} \left| \dfrac{x-1}{x+1} \right| = \infty$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$. Az a bármely választása esetén az

$x = -1$ helyen a függvénynek pólusa van. (Megjegyezzük, hogy ha $b = 0$, akkor $x = -1$ helyen kívül a függvény folytonos.)

225. $a = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1, \quad b = \lim\limits_{x\to\pi} f(x) = \lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{x}{\sqrt{2}\sqrt{1-\cos x}} = \dfrac{\pi}{2}.$

226. Szakadási helyek lehetnek: -1 és 1. $\lim_{x\to -1-0} f(x) = 0 \neq f(-1) = 1$, $\lim_{x\to -1+0} f(x) = 1 = f(-1)$, $\lim_{x\to 1-0} f(x) = 1 = f(1)$, $\lim_{x\to 1+0} f(x) = 0 \neq f(1)$, a függvény az $x = -1$ helyen jobbról, az $x = 1$ helyen balról folytonos.

227. Szakadási hely lehet: 1. Ha $a \neq 0$, akkor a függvény az $x = 1$ helyen egyik oldalról sem folytonos. Ha $a = 0$, akkor a függvény mindenütt folytonos.

228. Szakadási hely: 0, ahol a függvény bal oldalról folytonos, de jobb oldalról nem.

229. Szakadási helyek: $\pm\sqrt{n}, n \in \mathbf{N}^+$. $\sqrt{2k-1}$ és a $\sqrt{2k}$ helyeken a függvény balról, a $-\sqrt{2k}$ és $\sqrt{2k-1}$ $\quad (k \in \mathbf{N}^+)$ helyeken pedig jobbról folytonos.

230. A függvény szakadási helyei: $x = e^n \quad (n \in \mathbf{Z})$. $\lim_{x\to e^n-0} f(x) = \lim_{x\to e^n-0} \ln x - \lim_{x\to e^n-0} \mathrm{Ent}(\ln x) = n - (n-1) = 1$, $\lim_{x\to e^n+0} f(x) = n - n = 0 = f(e^n)$, azaz az $x = e^n$ helyeken a függvény jobb oldalról folytonos, de bal oldalról nem. A függvény grafikonját a következő ábra szemlélteti.

231. Szakadási helyek lehetnek: $sp0, \frac{1}{2}$, továbbá minden olyan pozitív x, ahol $2 - \dfrac{2}{2x-1} = n \in \mathbf{Z}$. Ebből az egyenletből $x = \dfrac{4-n}{4-2n}$, és a jobb oldal akkor és csak akkor nempozitív, ha $n = 2, 3, 4$. $\lim_{x\to -0} f(x) = -1 = f(0)$, $\lim_{x\to +0} f(x) = 0$, azaz az $x = 0$ helyen a függvény bal oldalról folytonos, de jobb oldalról nem. Az $x = \dfrac{1}{2}$ helyen egyik oldalról sem folytonos. Minden $n \in \mathbf{Z} - \{2; 3; 4\}$ egész számra az $x = \dfrac{4-n}{4-2n}$ helyeken a függvény jobb oldalról folytonos, de bal oldalról nem.

232. $\mathrm{Dom}\, f = (-1, 1)$. Az értelmezési tartomány minden pontjában folytonos a függvény. $\lim_{x\to -1+0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 1-0} f(x) = \infty$, ezért az $x = -1$ és az $x = 1$ egyenesek a függvény függőleges aszimptotái.

233. Dom $f = (0,1]$. A függvény folytonos az értelmezési tartományán. $\lim_{x\to+0} f(x) = \infty$, ezért az $x = 0$ egyenes függőleges aszimptota; $\lim_{x\to 1-0} f(x) = f(1) = 0$.

234. Dom $f = (-\infty,-1]\cup[1,\infty)$. A függvény folytonos az értelmezési tartományon.

$\lim\limits_{x\to-1-0} f(x) = 0$ és $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = 0$, ezért nincs függőleges aszimptota.
$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2 - \dfrac{1}{x^2}} = -\infty$ és $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2 - \dfrac{1}{x^2}} = \infty$, ezért a függvénynek ferde aszimptotája sincs.

235. Dom $f = \mathbf{R}$, folytonos az értelmezési tartományon. $m = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0, c = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx) = 2$, $y = 2$ vízszintes aszimptota.

236. Dom $f = \mathbf{R} - \{0\}$, folytonos az értelmezési tartományon, pólusa van az $x = 0$ helyen, ezért az y tengely függőleges aszimptota. $m = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, $c_1 = \lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - mx) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$, $c_2 = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx) = 1$, így az $y = -1$ és az $y = 1$ egyenletű egyenesek vízszintes aszimptoták.

237. Dom $f = \mathbf{R} - \{1\}$, folytonos az értelmezési tartományon, $x = 1$ függőleges aszimptota, $y = x - 1$ ferde aszimptota.

238. Dom $f = \mathbf{R} - \{0\}$, folytonos az értelmezési tartományon, $x = 0$ függőleges aszimptota.
$m_1 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^4+1}}{x|x|} = -\lim_{x\to-\infty} \sqrt{4 + \frac{1}{x^4}} = -2$,
$m_2 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$, $c_1 = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - m_1x) =$
$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{\sqrt{4x^4+1}}{|x|} + 2x\right) = lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-\sqrt{4x^4+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{x(2x^2+\sqrt{x^4+1})} = 0$.
Hasonlóan $c_2 = \lim_{x\to\infty}(f(x) - m_2x) = 0$. $y = -2x$ és $y = 2x$ ferde aszimptoták.

239. Dom $f = (-\infty;-2] \cup [2;\infty)$, folytonos az értelmezési tartományon, nincs függőleges aszimptota, $y = -\dfrac{3}{2}x$ és $y = \dfrac{3}{2}x$ ferde aszimptoták.

240. Dom $f = \mathbf{R}$, folytonos az értelmezési tartományon, $y = 0$ vízszintes aszimptota.

241. Dom $f = \left(-\infty; \dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}; \infty\right)$, folytonos az értelmezési tartományon, nincs függőleges aszimptota, $y = -x - \dfrac{3}{2}$ és $y = x + \dfrac{3}{2}$ ferde aszimptoták.

242. $f(x) = \dfrac{(x-a)^2(x+a)^2}{x(x-b)(x-2b)}$, Dom $f = \mathbf{R} - \{0; b; 2b\}$, folytonos az értelmezési tartományon, $y = x + 3b$ ferde aszimptota, $x = 0$ függőleges aszimptota. Ha

$a \neq \pm b$, akkor $x = b$ függőleges aszimptota. Ha $a \neq \pm 2b$, akkor $x = 2b$ függőleges aszimptota.

243. Dom $f = \mathbf{R}$, az $x = 0$ hely kivételével folytonos, nincs függőleges aszimptota. $m = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1 + \dfrac{\sin x}{x^2}\right) = 1$, $\quad c = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - mx) = 0$, ezért $y = x$ ferde aszimptota.

244. Dom $f = (-\infty; 0) \cup [1; \infty)$.
$\lim\limits_{x\to n-0} f(x) = \lim\limits_{x\to n-0}\left(\dfrac{x}{\operatorname{Ent} x} - 1\right) = \dfrac{n}{n-1} - 1 = \dfrac{1}{n-1} \quad (n \in \mathbf{Z} - \{1\})$,
$\lim_{x\to n+0} f(x) = \frac{n}{n} - 1 = 0 = f(n) \quad (n \in \mathbf{Z} - \{0\})$. Ezekből következik, hogy az $n \in \mathbf{Z} - \{0\}$ helyeken a függvény csak jobb oldalról folytonos, és nincs függőleges aszimptota. Megmutatható, hogy $y = 0$ vízszintes aszimptota.

245. Dom $f = R$. A folytonosság csak a $\sqrt[3]{n} \quad (n \in \mathbf{Z})$ helyeken kérdéses. Mivel $\lim\limits_{x\to\sqrt[3]{n}-0} f(x) = \dfrac{n-1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$, $\quad \lim\limits_{x\to\sqrt[3]{n^2}+0} f(x) = \dfrac{n}{\sqrt[3]{n^2+1}} = f(n) \quad (n \in \mathbf{Z})$, a függvény ezeken a helyeken csak jobbról folytonos. Nincs függőleges aszimptota. Mivel $\dfrac{x^3-1}{x(x^2+1)} \leq \dfrac{\operatorname{Ent} x^3}{x(x^2+1)} < \dfrac{x^3+1}{x(x^2+1)}$, ezért $m = 1$. Hasonló módon látható, hogy $c = 0$. Ezért $y = x$ ferde aszimptota.

246. A **T 8.16** tétel alapján közvetlen számítással igazolható.

247. Mivel a bal oldal y-ban harmadfokú, a $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}$ határérték meghatározása céljából osszuk el az egyenletet x^3-nal $(x > 0)$, majd képezzük mindkét oldal ∞-beli határértékét: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(2 + \dfrac{y}{x}\right)\left(1 + \dfrac{y}{x}\right)$, így $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2 + \dfrac{y}{x}\right) = 0$ vagy $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \dfrac{y}{x}\right) = 0$, azaz $m = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x} = -2$ vagy $m = -1$. Ha $m = -2$, akkor a $c = \lim_{x\to\infty}(y + 2x)$ határértéket keressük. Osszuk el az eredeti egyenletet x-szel: $(2x + y)^2\left(1 + \dfrac{y}{x}\right) = 1$, azaz $1 = \lim\limits_{x\to\infty}(2x + y)^2\left(1 + \dfrac{y}{x}\right) = -\lim\limits_{x\to\infty}(2x + y)^2$, ami lehetetlen. Ha $m = -1$, akkor a $c = \lim_{x\to\infty}(y + x)$ határértéket keressük. Osszuk el az egyenletet x^2-tel: $\left(2 + \dfrac{y}{x}\right)^2(x + y) = \dfrac{1}{x}$, így $0 = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(2 + \dfrac{y}{x}\right)^2(x + y)$ és $\lim_{x\to\infty}\left(2 + \frac{y}{x}\right)^2 = 1$ miatt $\lim_{x\to\infty}(x + y) = 0$. Ez azt jelenti, hogy a függvény aszimptotája a ∞-ben $y = -x$. Hasonlóan látható, hogy a függvény aszimptotája a $-\infty$-ben szintén $y = -x$.

248. A $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{y}{x}$ meghatározásához osszuk el az egyenletet x^3-nal $(x \neq 0)$. (Megjegyezzük, hogy az egyszerűség kedvéért írunk a számításokban $\pm\infty$-t; ez azt jelenti, hogy mind ∞-ben, mind $-\infty$-ben ki kell számítani a határértéket.) Átrendezés után:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{y}{x}\right)^3 = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1 - \frac{y}{x^3} + \frac{2}{x^2}\right) = 1 - \lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}\frac{1}{x^2}.$$

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \pm\infty$ lehetetlen, mert ebből $\lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{y}{x}\right)^3 = \mp\infty$ adódna, de $\left(\dfrac{y}{x}\right)^3$ és $\dfrac{y}{x}$ előjele megegyezik. Ez azt jelenti, hogy $\dfrac{y}{x}$ korlátos, amiből adódik, hogy $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{y}{x}\dfrac{1}{x^2} = 0$, s így $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\dfrac{y}{x}\right)^3 = 1$, azaz $m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{y}{x} = 1$. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(y - mx) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(y - x)$ kiszámításához alakítsuk az egyenletet a következő módon: $y^3 - x^3 + y - x = x$. Osszuk el az egyenletet x^2-tel. Így: $0 = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(y - x)\left(\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + \dfrac{y}{x} + 1 + \dfrac{1}{x^2}\right) = 3\lim\limits_{x\to\pm\infty}(y - x)$, ezért $c = 0$. Ferde aszimptota a $\pm\infty$-ben: $y = x$.

249. Az egyenletet x^4-nel osztva: $\left(1 - \left(\dfrac{y}{x}\right)^2\right)^2 = \dfrac{2}{x^3}$, azaz $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{y}{x} = 1$ vagy $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{y}{x} = -1$. Ha $m = 1$, akkor a $c = \lim_{x\to\infty}(y - x)$ határértéket kell kiszámítanunk; az egyenletből $(x - y)^2\left(1 + \dfrac{y}{x}\right)^2 = \dfrac{2}{x}$, amiből $c = 0$. Ha $m = -1$, akkor az egyenlet $(x + y)^2\left(1 - \dfrac{y}{x}\right)^2 = \dfrac{2}{x}$ alakjából $c = 0$. A ∞-ben a ferde aszimptoták: $y = x$ és $y = -x$. (Mindkettő valóban aszimptota, mert ha y ielégíti az egyenletet, akkor $-y$ is, így a görbe szimmetrikus az x tengelyre.)

250. $1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^3 = \dfrac{3}{x}, m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{y}{x} = -1$. Az egyenletből: $(y + x)\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x} + 1\right) = 3$, amiből $c = \lim_{x\to\pm\infty}(y + x) = 1$. $y = -x + 1$ ferde aszimptota a ∞-ben és a $-\infty$-ben.

251. $1 - \dfrac{2}{x^2} = \left(\dfrac{y}{x}\right)^3\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$, $m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{y}{x} = 1$. A $c = \lim_{x\to\pm\infty}(y - x)$ meghatározásához alakítsuk az egyenletet a következő módon:

$$\frac{x^4 - 2x}{x - 1} - x^3 = y^3 - x^3,$$
$$\frac{x^3 - 2x}{x - 1} = (y - x)(y^2 + yx + x^2),$$
$$\frac{1 - \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = (y - x)\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} + 1\right),$$

amiből $c = \frac{1}{3}$. (Megjegyezzük, hogy az $x = 1$ egyenletű egyenes függőleges aszimptota.)

252. $\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^4 = \dfrac{4}{x^2}$, $m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{y}{x} = 0$. A $\lim_{x\to\pm\infty}(y - mx) = \lim_{x\to\pm\infty} y$ meghatározásához osszuk el az eredeti egyenletet x^2-tel: $y^2 + y^2\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 = 4$, amiből: $\lim_{x\to\pm\infty} y = \pm 2$. A ferde aszimptoták egyenlete: $y = \pm 2$. (Nyilvánvaló, hogy mind a két érték jó, mert az eredeti egyenletet minden y-nal együtt $-y$ is kielégíti.)

253. Legyen $f(x) = \sin x - x + 1$. Mivel $f(0) = 1$, $f(\frac{3\pi}{2}) = -\frac{3\pi}{2}$, ezért a Bolzano-tétel (**T 8.22**) szerint a függvénynek van zérushelye.

254. $f(-1) = 19$, $f(1) = -15$, a Bolzano-tétel (**T 8.22**) szerint a függvénynek van zérushelye az intervallum belsejében.

255. Az $f(x) = a_0x^{2n+1} + a_1x^{2n} + \cdots + a_{2n}x + a_{2n+1}$ függvény folytonos a valós számok halmazán, továbbá $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ és $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Ezekből a Bolzano-tétel (**T 8.22**) segítségével adódik az állítás, hiszen van olyan $a < b$, hogy $f(a) < 0$ és $f(b) > 0$.

256. A függvény folytonos a $[-2, 2]$ intervallumban. $f(-2) = 1$, $f(2) = 5$. Mivel $1 < \frac{7}{3} < 5$, ezért **T 8.21** szerint van olyan $x \in [-2, 2]$, hogy $f(x) = \frac{7}{3}$.

257. Ha $f(0) = 0$ vagy $f(1) = 1$, akkor $c = 0$ vagy $c = 1$. Tegyük fel, hogy $0 < f(0), f(1) < 1$. Mivel f folytonos a $[0, 1]$ intervallumon, ezért a $g(x) = f(x) - x$ egyenlettel megadott függvény is folytonos a $[0, 1]$ intervallumon. $g(0) > 0$ és $g(1) < 0$, így a Bolzano-tétel (**T 8.22**) szerint van olyan $c \in (0, 1)$, hogy $g(c) = 0$, azaz $f(c) = c$.

258. Definiáljuk az f függvényt a $[0; 1]$ intervallumon a következő módon: $f(x) = y$ akkor és csak akkor, ha mozgatáskor a szalag x pontja y-ba kerül. Az f teljesíti az előző feladat feltételeit.

259. Legyen $g(x)$ a $(0; 0)$ és az $(x; f(x))$ pontok távolsága, azaz $g(x) = \sqrt{x^2 + f^2(x)}$ $(x \in [0, 1])$. g folytonos a $[0, 1]$ intervallumon, $g(0) = 0$, $g(1) = 1$, ezért **T 8.21** szerint minden $d(\in [0, 1])$ számhoz van olyan $c \in [0, 1]$, hogy $g(c) = d$.

260. Vegyük fel a koordinátarendszer origóját a k kör (a vékony körgyűrű) középpontjában. Jelölje t azt a valós függvényt, amely a kör pontjaihoz a hőmérsékletét rendeli, azaz $t : P \mapsto t(P)$ $(P \in k)$. A t nyilvánvalóan folytonos az értelmezési tartomány minden pontjában. Legyen P_0 a k körnek az x-tengely pozitív felére eső pontja. Jelölje φ azt a szöget, amellyel P_0-t az origó körül pozitív forgásirányba elforgatva, a k kör P pontját kapjuk. Legyen továbbá P' a P pont origóra vonatkoztatott tükörképe (l. az ábrát). Definiáljuk az f egyváltozós valós függvényt a $f(\varphi) = t(P) - t(P')$ $(\varphi \in [0; 2\pi])$ képlettel. f folytonos az értelmezési tartományán. Ha $f(0) = 0$, akkor $t(P_0) = t(P_0')$, azaz a P_0 és P_0' pontok hőmérséklete egyenlő. Ha $f(0) \neq 0$, akkor $f(\pi) = -f(0)$ miatt $f(\pi)$ és $f(0)$ ellenkező előjelűek, és ezért a Bolzano-tétel (**T 8.22**) szerint van olyan $\varphi_1 \in (0; \pi)$, hogy $f(\varphi_1) = 0$. Legyen $P_1 \in k$, amelyre $f(\varphi_1) = t(P_1) - t(P_1')$, akkor $t(P_1) = t(P_1')$.