9. fejezet

Differenciálhányados, derivált

A differenciálhányados definíciója

D 9.1 *Az egyváltozós valós f függvény x_0 pontbeli* **differenciálhányados***ának nevezzük a*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

határértéket, ha ez létezik. Ekkor azt mondjuk, hogy f az x_0 **pontban differenciálható***. E határértéket szokás*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

alakban is írni, ahol $x = x_0 + h$. E definícióval ekvivalens az alábbi:

D 9.2 *Azt mondjuk, hogy az f függvény az x_0* **pontban differenciálható***, ha megadható olyan valós szám — amelyet $f'(x_0)$-lal jelölünk — és x_0-nak olyan E teljes környezete, hogy ha $x \in E$, akkor f értelmezve van az x helyen, és*

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+\varepsilon(x)(x-x_0),$$

ahol $\lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$.

D 9.3 *Az f függvény differenciálható a $H \subseteq \operatorname{Dom} f$ halmazon, ha annak minden pontjában differenciálható.*

D 9.4 *Az f függvény* **derivált***jának vagy differenciálhányados-függvényének nevezzük, és f'-vel jelöljük azt a függvényt, melynek értelmezési tartománya az összes olyan x_0 pontok halmaza, ahol f differenciálható, értéke pedig minden ilyen pontban az f függvény x_0 pontbeli differenciálhányadosa. Szokásos jelölések $f'(x_0)$-ra:*

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0},\ \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0},\ Df(x_0),\ \frac{d}{dx}f(x_0),\ \frac{df(x_0)}{dx}.$$

T 9.5 *Ha f differenciálható az x_0 pontban, akkor folytonos is x_0-ban.*

D 9.6 *Ha a többváltozós valós f függvény mindegyik változóját rögzítjük, kivéve az i-ediket, akkor az így kapott egyváltozós valós függvény differenciálhányadosát az f függvény i-edik változója szerinti* **parciális differenciálhányados***ának nevezzük. Például a kétváltozós f függvény (x_0, y_0) pontbeli x szerinti parciális differenciálhányadosán a*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

határértéket értjük, melynek szokásos jelölései:

$$f'_x(x_0, y_0),\ f_x(x_0, y_0),\ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\binom{x=x_0}{y=y_0}},\ D_x f(x_0, y_0),\ \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0).$$

Az $(x, y) \to f(x, y)$ függvény x szerinti **parciális derivált***ján azt a kétváltozós függvényt értjük, melynek értelmezési tartománya az összes olyan (x_0, y_0) pontokból áll, ahol az f függvény x szerinti parciális differenciálhányadosa létezik, értéke pedig minden ilyen pontban ezzel a parciális differenciálhányadossal egyenlő.*

Feladatok

Számítsuk ki az alábbi függvények differenciálhányadosát az $x_0 = 2$ pontban a

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = f'(2)$$

határérték segítségével:

1.$^{\triangleright}$ $f(x) = 4$,
2.$^{\triangleright}$ $f(x) = 4x + 2$,
3. $f(x) = 2x^3 - 1$,
4. $f(x) = \sqrt{x-1}$,
5. $f(x) = x^{-2}$,
6.$^{\bullet}$ $f(x) = \sin x$.

Számítsuk ki az alábbi függvények differenciálhányadosát az x_0 pontban a

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

határérték segítségével:

7.$^{\triangleright}$ $f(x) = x^3$,
8.$^{\triangleright}$ $f(x) = \sqrt{x}$,
9.$^{\bullet}$ $f(x) = \sin x$,
10. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$,
11. $f(x) = \cos x$,
12. $f(x) = \operatorname{tg} x$.

Bizonyítsuk be, hogy

13.$^{\triangleright}$ $(x^n)' = nx^{n-1}, \quad n \in \mathbf{N}^+$,
14.$^{\triangleright}$ $(x^{\frac{1}{m}})' = \dfrac{1}{m} x^{\frac{1}{m}-1}$, $x > 0$, $m \in \mathbf{N}^+$.

Határozzuk meg az alábbi f függvények x_0 pontbeli differenciálhányadosát a törtmentes alak (**D 9.2**) segítségével:

$$\acute{}f = f'(x_0)\acute{}x + \varepsilon(x)\acute{}x,$$

ahol $\acute{}f = f(x) - f(x_0)$, $\acute{}x = x - x_0$, $\varepsilon(x) \to 0$ ha $x \to x_0$. (Ellenőrizzük, hogy $\varepsilon(x) \to 0$ valóban fennáll!)

15.$^{\triangleright}$ $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$,
16. $f(x) = x^3 + x$,
17.$^{\bullet}$ $f(x) = \sin x$, $[f'(x_0) = \cos x_0]$,
18. $f(x) = \cos x$, $[f'(x_0) = -\sin x_0]$.

19.$^{\triangleright}$ Legyen $h(x)$ folytonos az x_0 helyen. Határozzuk meg $f'(x_0)$ értékét, ha

$$f(x) = (x - x_0)h(x),$$

és mutassuk meg, hogy a $g(x) = |x - x_0|h(x)$ függvény csak akkor differenciálható x_0-ban, ha $h(x_0) = 0$.

20.▷ A **D 9.1** definíció felhasználásával mutassuk meg, hogy ha $\operatorname{Dom} f = \mathbf{R}$ és $\forall x \in \mathbf{R}$ esetén $f(x) = f(-x)$, akkor $f'(x) = -f'(-x)$, ha pedig $\forall x \in \mathbf{R}$ esetén $f(x) = -f(-x)$, akkor $f'(x) = f'(-x)$. (Páros függvény deriváltja páratlan, páratlané páros.)

21. Tegyük fel, hogy f differenciálható az a pontban. Fejezzük ki a

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h}$$

kifejezést $f'(a)$ segítségével.

22.• Tegyük fel, hogy f differenciálható az a pontban, és

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{ha } x \neq a \\ f'(a) & \text{ha } x = a. \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy g folytonos a-ban.

Adjunk példát olyan $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényre, mely mindenütt értelmezve van és amely kielégíti az alábbi feltételt:

23. f mindenütt folytonos, de az $x_0 = 1$ pontban nem differenciálható;

24. f mindenütt differenciálható, de az $x_0 = 1$ pontban nem folytonos;

25. f mindenütt differenciálható, és deriváltja mindenütt folytonos;

26. f mindenütt differenciálható, de deriváltja az $x_0 = 0$ pontban nem differenciálható.

A **D 9.6** definíció alapján határozzuk meg az alábbi függvények parciális deriváltjait és azok értékét a megadott P pontban:

27.▷ $f : (x, y) \mapsto xy, \quad P(1, 2)$,

28. $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2, \quad P(0, 0)$,

29. $f(x, y) = 4x + 2y - 1, \quad P(1, 1)$,

30.▷ $f(x, y, z) = xyz, \quad P(1, 2, 3)$,

31. $f : (x, y, z) \mapsto 3x - 4y + 2z - 6, \quad P(0, 0, 0)$,

32. $f : (x, y, z) \mapsto 0, \quad P(1, 1, 1)$.

33.▷ Legyen

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ a, & \text{ha } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Határozzuk meg a értékét úgy, hogy f mindkét parciális differenciálhányadosa létezzék a $(0, 0)$ pontban, és számítsuk ki ezeket a parciális differenciálhányadosokat.

Differenciálási szabályok

T 9.7 *Konstans függvény deriváltja az azonosan 0 függvény. Két differenciálható függvény összege, különbsége, szorzata ugyancsak differenciálható, két differenciálható függvény hányadosa, ill. differenciálható függvény reciproka minden olyan helyen differenciálható, ahol a nevező nem 0. Ha f és g két differenciálható függvény és $c \in \mathbf{R}$, akkor*

$$(f \pm g)' = f' \pm g', \quad (cf)' = cf', \quad (fg)' = f'g + fg',$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \quad \left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}, \quad (f^n)' = nf^{n-1}f' \ (n \in \mathbf{Z}).$$

T 9.8 $(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x.$

T 9.9 $(x^q)' = qx^{q-1}$, *ha q racionális szám, $x > 0$. (l.* **34.** *feladat).*

D 9.10 *Az f külső és g belső függvényből összetett $f \circ g$ függvényen azt a függvényt értjük, melynek értelmezési tartománya g értelmezési tartományának azon x_0 pontjaiból áll, melyekre $g(x_0)$ benne van f értelmezési tartományában, azaz*

$$\operatorname{Dom} f \circ g = \{x_0 \in \operatorname{Dom} g; g(x_0) \in \operatorname{Dom} f\},$$

és amelyre $x_0 \in \operatorname{Dom} f \circ g$ esetén $(f \circ g)(x_0) = f(g(x_0))$.

T 9.11 *Ha g folytonos x_0-ban, f folytonos a $g(x_0)$ pontban, akkor $f \circ g$ folytonos x_0-ban.*

T 9.12 *Ha a $g : x \mapsto g(x)$ függvény differenciálható x_0-ban, az $f : u \mapsto f(u)$ függvény pedig az $u_0 = g(x_0)$ pontban, akkor $f \circ g$ differenciálható x_0-ban, és*

$$\left(\frac{d(f \circ g)}{dx}\right)_{x=x_0} = \left(\frac{df}{du}\right)_{u=g(x_0)} \left(\frac{dg}{dx}\right)_{x=x_0}.$$

Tehát minden ilyen x_0 pontban: $(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$.

Feladatok

34.$^\triangleright$ Bizonyítsuk be a **T 9.9** tételt a **T 9.7**-beli szabályok és a **14.** feladat eredményének felhasználásával.

35.$^\bullet$ Számítsuk ki az $f(x) = x^{\frac{n}{m}}$ függvény deriváltját, ha $m, n \in \mathbf{N}^+$, m páratlan és $x \in \mathbf{R}$.

Deriváljuk az alábbi függvényeket a **T 9.7-9**-beli szabályok felhasználásával.

36. $x^2 - 2x + 3$, **37.** $7 - x - x^3$, **38.** $2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{2}{3}}$,

39. $2x^{\frac{3}{2}} + \sqrt{2x}$, **40.** $\dfrac{1}{x} + \sqrt{x^5}$, **41.** $(x+2)\sqrt{x^3}$,

42. $x \sin x$, **43.** $(x^3 + 1)\cos x$, **44.** $\dfrac{\sin x}{x}$,

45. $\operatorname{tg} x$, **46.** $\operatorname{ctg} x$, **47.** $\dfrac{\sin x + 1}{\cos x - 1}$,

48. $\dfrac{x-1}{x^2}$, **49.** $\dfrac{x^3+4}{1+2x}$, **50.** $(x+3)^4$,

51. $(1-x)^{20}$, **52.** $(x^2+1)^4$, **53.** $(1-x^2)^{10}$,

54. $(7x^2 - \frac{4}{x} + 6)^6$, **55.** $\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$, **56.** $\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}\right)^5$,

57. $(\sin x + 1)^{20}$, **58.** $(\sin^{20} x + 1)^{20}$, **59.** $\operatorname{tg}^n x, \quad n \in \mathbf{N}^+$,

60. $\operatorname{ctg}^5 x$.

Legyen f differenciálható függvény. Írjuk fel f'-vel kifejezve az alábbi függvények deriváltját:

61. $f(-x)$, **62.** $f(x^2)$, **63.** $f(ax)$,

64. $f(1/x)$, **65.** $f(\sin^2 x)$, **66.** $f(\sqrt{1-x^2})$.

Határozzuk meg az alábbi függvény deriváltját:

67. $F(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}$, **68.** $F(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}$.

69. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f'_{11}(x) & f'_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f'_{21}(x) & f'_{22}(x) \end{vmatrix}.$$

Állapítsuk meg, hogy mely függvények összetételéből származnak az alábbi függvények, majd számítsuk ki a deriváltjukat:

70.$\triangleright$ $f(x) = \sin^3 x$, **71.** $f(x) = \sin x^3$, **72.** $f(x) = \sin(\operatorname{tg} x)$,

73. $f(x) = \sin^2(\operatorname{tg} x)$, **74.** $f(x) = \sin(\operatorname{tg}^2 x)$, **75.** $f(x) = \sin(\operatorname{tg} x^2)$.

Határozzuk meg az alábbi függvények deriváltjának értelmezési tartományát! Vegyük észre, hogy ez egyik esetben sem egyezik meg a függvény értelmezési tartományával!

76. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, **77.** $f(t) = \sqrt{1-a^2t^2}, \quad a \neq 0$,

78. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$, **79.** $f(v) = (3v + 18v^2)^{\frac{1}{3}}$,

80. $f(x) = \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{-\frac{2}{3}}$, ahol $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, és $ac \neq 0$,

81. $g(t) = \sqrt{1 + \sin t}$.

Számítsuk ki az alábbi függvények parciális deriváltjait.

82. $f(x,y) = 3x^2 + xy - 2y^3$, **83.** $g(x,y) = \sqrt{x^2 - y}$,

84. $\rho(\varphi, \psi) = \sin\varphi \cos\psi$, **85.** $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$,

86. $f(x,y,z) = xy + yz + zx$, **87.** $f(x,y,z) = x\sin(xyz)$,

88. $g(x,y) = \dfrac{ax+by}{cx+dy}$, **89.** $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,

90. $h(x,y) = f^2(x)g(y)$,

91. $h(x,y,z) = f^2(x,y)g^3(y,z)$,

92. $f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2x_3$,

93. $f(x_1,x_2,\dots,x_n) = x_1x_2\dots x_n$,

94. $f(x_1,x_2,\dots,x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n,\ (a_i \in \mathbf{R},\ i = 1,2,\dots,n)$.

Határozzuk meg $f_x(0,0)$ és $f_y(0,0)$ értékét, ha

95. $f(x,y) = \sqrt[3]{(x+1)(y-1)}$,

96.• $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$,

97. $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$,

98. $f(x,y) = \sqrt{|x|}$.

99.▷ Mutassuk meg, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény differenciálható minden $x \in \mathbf{R}$ pontban, de a derivált nem folytonos az $x_0 = 0$ pontban.

100. Mutassuk meg, hogy az $x_0 = 0$ pont tetszőleges környezetében található olyan hely, ahol az

$$f(x) = \begin{cases} x^2 |\sin \frac{1}{x}|, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény nem differenciálható, de a 0-ban mégis differenciálható.

A mértani sorozat összegképletéből, azaz az

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad (x \neq 1)$$

képletből vezessünk le formulát az alábbi két összegre:

101.▷ $1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$,

102.⋆ $1 + 4x + 9x^2 + \dots + n^2x^{n-1}$.

103.▷ A $2\sin x \cos kx = \sin(k+1)x - \sin(k-1)x$ azonosság felhasználásával bizonyítsuk be, hogy

$$\cos x + \cos 3x + \dots + \cos(2n-1)x = \frac{\sin 2nx}{2\sin x} \quad (x \neq k\pi),$$

és ennek segítségével számítsuk ki az alábbi összeget:

$$\sin x + 3\sin 3x + \dots + (2n-1)\sin(2n-1)x.$$

Számítsuk ki az alábbi magasabb rendű deriváltakat:

104. $(\sin(3x+1))^{(4)}$,

105. $(\cos(4-2x))^{(7)}$,

106. $\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^{(5)}$,

107. $\left(\sqrt{x}\right)^{(10)}$.

Számítsuk ki az alábbi függvények másodrendű parciális deriváltjait:

108. $f(x,y) = x^4 + xy^3$,

109. $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$,

110. $f(x,y) = \sin x^2y$,

111. $f(x,y) = \dfrac{\cos x^2}{y}$,

112. $f(x,y,z) = (x + y^2 + z^3)^2$.

Számítsuk ki az alábbi függvények megadott magasabbrendű parciális deriváltjait:

113. $g(x,y) = x^3 \sin y + y^3 \sin x, \quad \dfrac{\partial^6 g}{\partial x^3 \partial y^3}$,

114. $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \ \dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$,

115. $f(x,y) = (x-x_0)^n (y-y_0)^m, \quad \dfrac{\partial^{n+m} f}{\partial x^n \partial y^m} \quad (m, n \in \mathbf{N})$,

116.* $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}, \quad \dfrac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n} \quad (m, n \in \mathbf{N},\ m+n > 0)$.

Mutassuk meg, hogy tetszőleges $c, c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R}$ konstansok esetén az alábbi függvények kielégítik a megadott egyenleteket:

117.$^\triangleright$ $y(x) = cx^2, \qquad y'(x)x - 2y(x) = 0 \ (x \in \mathbf{R})$,

118. $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x, \qquad y'' + y = 0 \ (x \in \mathbf{R})$,

119. $y(x) = c_1 x + \dfrac{c_2}{x}, \qquad x^2 y''(x) + xy'(x) - y(x) = 0 \ (x \in \mathbf{R} \setminus \{0\})$,

120. $f(x,y) = x^3 - 3xy^2, \qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ (**Laplace egyenlet**),

121. $f(x,t) = (c_1 x + c_2)(c_3 t + c_4) \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ (**hullámegyenlet**),

122. $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$

Igazoljuk az alábbi egyenlőségeket $(m, n \in \mathbf{N},\ a \in \mathbf{R})$!

123.$^\triangleright$ $(x^m)^{(n)} = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)x^{m-n} \qquad (m \geq n)$,

124. $(x^n)^{(n)} = n!$,

125.$^\triangleright$ $\left(\dfrac{1}{x-a}\right)^{(n)} = (-1)^n \dfrac{n!}{(x-a)^{n+1}}$,

126.$^\triangleright$ $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \dfrac{n\pi}{2})$,

127. $(\cos ax)^{(n)} = a^n \cos(ax + \dfrac{n\pi}{2})$.

Alkalmas átalakítás után, az előző feladatok eredményeit felhasználva számítsuk ki az alábbi függvények n-edik deriváltját:

128.$^\bullet$ $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$,

129. $\sin x \cos x$,

130.* $\sin 3x \cos 2x$,

131.* $\cos ax \cos bx$,

132. $\dfrac{x}{x^2-1}, \ |x| \neq 1$,

133. $\dfrac{2x+1}{x^2+x-2}, \ x \neq -2, \ x \neq 1$.

134. Határozzuk meg az $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ függvény n-edik deriváltját! Ehhez bizonyítsuk be és használjuk fel, hogy $c \neq 0$ esetén $\dfrac{ax+b}{cx+d} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{bc-ad}{c}(cx+d)^{-1}$.

135.$^\triangleright$ **Leibniz formula:** Ha f és g n-szer differenciálható függvények, akkor fg is:

$$(fg)^{(n)} = \binom{n}{0} f^{(n)} g + \binom{n}{1} f^{(n-1)} g' + \dots + \binom{n}{n} f g^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

Az előző feladatbeli Leibniz-formulát felhasználva határozzuk meg az alábbi deriváltakat:

136.▷ $(x^2 \sin x)''$, **137.** $(x \sin x)^{(25)}$,

138. $(x^2 \sin x)^{(25)}$, **139.** $(\sin 2x \cos(x+1))'''$.

Számítsuk ki az alábbi f függvények összes magasabb rendű deriváltját, és azok értékét az $x = 0$ pontban:

140. $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 1$, **141.**• $f(x) = x|x|$,

142. $f(x) = \sin x$, **143.** $f(x) = \cos x$.

144.▷ Mutassuk meg, hogy az $f_1(x) = x^{\frac{4}{3}}$ függvény differenciálható 0-ban, de kétszer nem, az $f_2(x) = x^{\frac{7}{3}}$ függvény kétszer differenciálható 0-ban, de háromszor nem. Keressünk olyan k számot, hogy az $f_3(x) = x^k$ függvény $(n-1)$-szer legyen differenciálható 0-ban, de ne legyen differenciálható n-szer.

A differenciálszámítás középértéktételei

T 9.13 (**Rolle**-*féle középértéktétel)*
Ha az egyváltozós valós f függvény
1. folytonos az $[a,b]$ intervallumon,
2. differenciálható az (a,b) intervallumon,
3. $f(a) = f(b)$,
akkor van legalább egy olyan $c \in (a,b)$ hely, ahol

$$f'(c) = 0.$$

T 9.14 (**Lagrange**-*féle középértéktétel)*
Ha az egyváltozós valós f függvény
1. folytonos az $[a,b]$ intervallumon,
2. differenciálható az (a,b) intervallumon,
akkor van legalább egy olyan $c \in (a,b)$ hely, ahol
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

T 9.15 (**Cauchy**-*féle középértéktétel)*
Ha az egyváltozós valós f és g függvények
1. folytonosak az $[a,b]$ intervallumon,
2. differenciálhatóak az (a,b) intervallumon,
3. és $x \in (a,b)$ esetén $g'(x) \neq 0$,
akkor van legalább egy olyan $c \in (a,b)$ hely, ahol $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Feladatok

Eleget tesznek-e az alábbi függvények a Rolle-tétel feltételeinek az adott intervallumon? Ha igen, adjunk meg egy c értéket, ahol $f'(c) = 0$.

145. $f(x) = 1 - |x|, \quad [-1, 1],$

146. $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}, \quad [-1, 1],$

147. $f(x) = \sin x, \quad [0, \pi],$

148. $f(x) = |\sin x|, \quad [0, 2\pi].$

Ellenőrizzük a Lagrange-tétel feltételeit és konklúzióját az alábbi függvényekkel, a megadott intervallumokon:

149.$^{\triangleright}$ $f(x) = 3x^2 - 5,\ [-2, 0],$

150. $f(x) = \dfrac{1}{x},\ [-1, 1],$

151.$^{\bullet}$ $f(x) = \sqrt[3]{x},\ [-1, 8],$

152. $f(x) = \sqrt[3]{x^2},\ [-1, 8].$

Ellenőrizzük a Cauchy-tétel feltételeit és konklúzióját az alábbi függvényekkel, a megadott intervallumokon:

153.$^{\triangleright}$ $f(x) = x^2 - 2x + 3,\ g(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 5,\ [1, 4],$

154. $f(x) = \sqrt[3]{x^2},\ g(x) = x,\ [-1, 8],$

155. $f(x) = x^2,\ g(x) = x^3,\ [-1, 1].$

A Rolle-tétel segítségével bizonyítsuk be az alábbi állításokat:

156.$^{\triangleright}$ a $3x^5 + 15x - 2 = 0$ egyenletnek pontosan egy valós gyöke van;

157.$^{\triangleright}$ az

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{\pi}{x}, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény deriváltjának végtelen sok zérushelye van a $(0, 1)$ intervallumban;

158.$^{\triangleright}$ a $c_1 + c_2 x + \cdots + c_n x^{n-1} = 0$, $(c_1, \ldots, c_n \in \mathbf{R})$ egyenletnek van gyöke a $(0, 1)$ intervallumban, ha $c_1 + \dfrac{c_2}{2} + \cdots + \dfrac{c_n}{n} = 0$.

A Lagrange-féle középértéktétel segítségével bizonyítsuk be az alábbi egyenlőtlenségeket:

159.$^{\triangleright}$ $|\sin x - \sin y| \le |x - y|, \quad x, y \in \mathbf{R},$

160.$^{\triangleright}$ $|\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y| \ge |x + y|, \quad x, y \in (-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}),$

161.$^{\triangleright}$ $\sqrt{xy} < \frac{x+y}{2}, \quad x, y > 0,\ x \ne y.$

162.* Tegyük fel, hogy f értelmezve van és differenciálható minden $x > 0$ esetén, és hogy $f'(x) \to 0$, ha $x \to \infty$. Bizonyítsuk be, hogy $f(x+1) - f(x) \to 0$, ha $x \to \infty$.

Differenciálható függvények monotonitása

T 9.16 *Legyen f differenciálható az (a, b) intervallumon. Az f függvény pontosan akkor monoton növekvő [csökkenő] az (a, b) intervallumon, ha $f'(x) \geq 0$ [$f'(x) \leq 0$] az (a, b) minden x pontjában.*

T 9.17 *Ha az (a, b) intervallumon f differenciálható, és minden $x \in (a, b)$ esetén $f'(x) > 0$ [$f'(x) < 0$], akkor f szigorúan monoton növekszik [csökken] az (a, b) intervallumon.*

T 9.18 *Ha az f függvény deriváltja az (a, b) intervallum minden pontjában 0, akkor f konstans az (a, b) intervallumon.*

Feladatok

A deriváltak segítségével állapítsuk meg, hogy az alábbi függvények értelmezési tartományuk mely részhalmazán (szigorúan) monoton növekvőek és melyeken (szigorúan) monoton csökkenőek:

163. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$,

164. $f(x) = (x + 2)^3$,

165. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$,

166. $f(x) = \sin^2 2x,\ 0 < x < \pi$,

167. $f(x) = \sqrt[3]{x + 2}$,

168. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(x + 4)$.

Igazoljuk a következő egyenlőtlenségeket:

169.$^{\triangleright}$ $x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x < x$, ha $x > 0$,

170. $x + \dfrac{x^3}{3} > \operatorname{tg} x$, ha $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$,

171. $x^\alpha - 1 > \alpha(x - 1)$, ha $\alpha > 1,\ x > 1$.

172.* Bizonyítsuk be, hogy a

$$p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n, \quad (n \geq 1,\ a_0 \neq 0)$$

polinomfüggvény szigorúan monoton a $(-\infty, -b)$ és a (b, ∞) intervallumokon, ha b elegendően nagy pozitív szám.

Implicit és inverz függvény differenciálása

P 9.19 *Ha egy $F(x, y) = 0$ egyenlettel implicit módon megadott $x \mapsto y(x)$ függvény az egyenletből kifejezhető egy I intervallum fölött, akkor ott az $y'(x)$ derivált a már ismert módon számítható. Például:*

$$xy - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y(x) = \frac{1}{x} \quad \Longrightarrow \quad y'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Az $y'(x)$ függvény úgy is kiszámítható, hogy $F(x, y(x))$-et összetett függvényként x szerint differenciáljuk. Például:

$$(xy(x) - 1)' = y(x) + xy'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y'(x) = -\frac{y(x)}{x}.$$

Ez megegyezik az előző eredménnyel, hisz $y(x) = 1/x$ behelyettesítése után $y'(x) = -1/x^2$ adódik. Azzal a kérdéssel, hogy egy $F(x, y) = 0$ alakú egyenlet mikor ír le függvénykapcsolatot és hogy $y(x)$ mikor fejezhető ki ebből az egyenletből, nem foglalkozunk.

D 9.20 *Az f függvény az értelmezési tartományának egy H részhalmazán* **invertálható**, *ha tetszőleges két $x_1, x_2 \in H$ elem esetén*

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = x_2.$$

Ha f invertálható a H halmazon, akkor a $f|_H$ (azaz a H-ra korlátozott f) függvény **inverzén** *azt a φ függvényt értjük, melyre*
1. $\operatorname{Dom}\varphi = \{f(x); x \in H\}$,
2. $y_0 \in \operatorname{Dom}\varphi$ *esetén* $\varphi(y_0) = x_0 \quad :\Longleftrightarrow \quad f(x_0) = y_0$.
Az f függvény inverzére az f^{-1} jelölés használatos. Ez összetéveszthető a reciprok jelölésével, ezért példatárunk e pontját kivéve e jelölést külön említés nélkül nem használjuk.

T 9.21 *Az egyváltozós valós f függvény legyen invertálható az x_0 pontot tartalmazó valamely $H \subseteq \operatorname{Dom} f$ halmazon, és legyen g az $f|_H$ függvény inverze. Ha az f függvény differenciálható az x_0 pont valamely teljes környezetében, és $f'(x_0) \neq 0$, akkor g differenciálható az $y_0 = f(x_0)$ pontban, és*

$$\left(\frac{dg}{dy}\right)_{y=y_0} = \frac{1}{\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0}}.$$

Feladatok

Számítsuk ki az alábbi, implicit alakban adott $x \mapsto y(x)$ függvények deriváltját:

173. $x^2y + 3xy^3 - x = 3$,

174. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1$,

175.• $3xy = (x^3 + y^2)^{\frac{3}{2}}$,

176.▷ $\sin(x^2y^2) = x$.

Számítsuk ki az alábbi, implicit alakban adott $x \mapsto y(x)$ függvények második deriváltját:

177.▷ $2xy - y^2 = 3$,

178. $x \cos y = y$.

Határozzuk meg az alábbi $f(x)$ függvények $f^{-1}(x)$ inverzét:

179. $f(x) = x^2 + 1,\ x \geq 0$,

180.• $f(x) = x^2 - 6x + 8,\ x \geq 3$,

181.• $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ $(a, b, c, d \in \mathbf{R},\ ad - bc \neq 0)$.

Az eredeti és az inverz függvény közötti kapcsolat segítségével mutassuk meg, hogy az alábbi függvények grafikonja szimmetrikus az $y = x$ egyenesre:

182.$^\triangleright$ $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx-a}$, $(a, b, c \in \mathbf{R})$, **183.** $f(x) = \dfrac{3-x}{1-x}$.

184. Mutassuk meg, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \text{ irracionális,} \\ -x, & \text{ha } x \text{ racionális} \end{cases} \qquad x \in \mathbf{R}$$

függvény invertálható, de nem monoton $\mathbf{R}$-en.

185. Mutassuk meg, hogy ha f nem monoton, akkor van három olyan x_1, x_2, x_3 pont, hogy $x_2 \in (x_1, x_3)$, de $f(x_2) \notin (f(x_1), f(x_3))$.

186. Mutassuk meg, hogy egy intervallumon értelmezett folytonos f függvény pontosan akkor invertálható, ha szigorúan monoton.

Határozzuk meg az alábbi függvények inverzének deriváltját és annak értékét a megadott x_0-hoz tartozó $y_0 = f(x_0)$ pontban, és ellenőrizzük az eredményt implicit függvény deriválásával:

187.$^\bullet$ $f(x) = 5x^3 + x - 7, \quad x \in \mathbf{R}, \quad x_0 = 1,$

188. $f(x) = \operatorname{tg} 2x, \quad x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}), \quad x_0 = \frac{\pi}{8},$

189. $f(x) = 7x - \sin 3x, \quad x \in \mathbf{R}, \quad x_0 = 0,$

190. $f(x) = 2x^5 + x^3 + 1, \quad x \in \mathbf{R}, \quad x_0 = 1.$

191.$^\triangleright$ Tegyük fel, hogy az $f : B \to C$ és a $g : A \to B$ függvények kölcsönösen egyértelmű leképezések az adott halmazok között. Mutassuk meg, hogy $f \circ g$ is kölcsönösen egyértelmű függvény, és

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

192.$^\triangleright$ Igazoljuk, hogy az $f : x \mapsto x^4 + x^3 + 1$, $x \in (0, 3)$ függvény szigorúan monoton növekedő. Képezzük az $F(x) = f(2g(x))$ függvényt, ahol g az f inverze, és határozzuk meg az $F'(3)$ értéket.

Görbék érintkezése, érintő, simulókör

T 9.22 *Ha az egyváltozós valós f függvény az x_0 helyen differenciálható, akkor az f grafikonjának az x_0 abszcisszájú pontban van érintője, és az érintő iránytangense éppen $f'(x_0)$. Így az érintő egyenlete: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, míg az érintőre merőleges u.n. normális egyenes egyenlete: $y - f(x_0) = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$, ha $f'(x_0) \neq 0$, és $x = x_0$, ha $f'(x_0) = 0$.*

D 9.23 *Ha két görbe közös pontja M, és mindkettőnek van érintője e pontban, akkor a görbék M pontnál bezárt* **szögén** *az érintőik által bezárt szöget értjük. Ha e szög 0, akkor azt mondjuk, hogy a két görbe az M pontban* **érinti** *egymást.*

D 9.24 *Legyenek f és g az x_0 helyen legalább r-szer differenciálható valós függvények, amelyekre $0 \le k \le r$ esetén $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0)$. Ha az $f^{(r+1)}(x_0)$ és a $g^{(r+1)}(x_0)$ differenciálhányadosok nem mindketten léteznek, vagy ha mindkettő létezik, nem egyeznek meg, akkor azt mondjuk, hogy az $y = f(x)$ és az $y = g(x)$ egyenletű görbék az x_0 helyen r-**edrendben érintik** egymást.*

T 9.25 *Ha az egyváltozós valós f függvény az x_0 helyen legalább kétszer differenciálható, és $f''(x_0) \neq 0$, akkor az $y = f(x)$ egyenletű görbének az x_0 helyen egyértelműen meghatározott simulóköre — azaz a görbét legalább másodrendben érintő köre — van, és ennek a körnek a sugara és középpontjának koordinátái:*

$$r(x_0) = \frac{(1 + f'^2(x_0))^{3/2}}{|f''(x_0)|}, \quad \left(x_0 - \frac{f'(x_0)(1 + f'^2(x_0))}{f''(x_0)}, f(x_0) + \frac{1 + f'^2(x_0)}{f''(x_0)}\right).$$

T 9.26 *Ha az f függvény legalább n-szer differenciálható és $f(c) \neq 0$, akkor az*

$$y = (x - c)^n f(x), \text{ és az } y = (x - c)^n f(c)$$

egyenletű görbék legalább n-edrendben érintik egymást.

Feladatok

Határozzuk meg az alábbi függvények grafikonjának érintőjét és normálisát az adott x_0 abszcisszájú pontban:

193. $f(x) = \sin\sqrt{x},\ x_0 = \pi^2,$ **194.** $f(x) = \sin\dfrac{\pi^2}{x},\ x_0 = \pi,$

195. $f(x) = x^3 - 8x,\ x_0 = 3.$

Írjuk fel az alábbi egyenletű síkgörbék adott pontbeli érintőjének és normálisának egyenletét:

196.▷ $x^3 + y^3 - 6xy = 0, \quad (3, 3),$ **197.** $y = \sin(x + y), \quad (\pi, 0).$

198.▷ Legyen f pozitív értékű, differenciálható függvény. Mutassuk meg, hogy az $f(x)$ és az $f(x)\sin ax$ $(a \neq 0)$ függvények grafikonjai metszéspontjaikban érintik egymást.

199.▷ Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, mely átmegy az origón és érinti az $x^2 - 4x + y^2 + 3 = 0$ egyenletű görbét.

200. Milyen összefüggés áll fenn a, b és c között, ha az $f(x) = ax^2 + bx + c$ egyenletű parabola érinti az x-tengelyt?

201.▷ Igazoljuk, hogy ha az $y(x) = x^3 + px + q$ egyenletű harmadfokú görbe érinti az x-tengelyt, akkor $\left(\dfrac{p}{3}\right)^3 + \left(\dfrac{q}{4}\right)^2 = 0.$

Mutassuk meg, hogy az alábbi függvények grafikonjai k-adrendben érintik egymást az $x_0 = 0$ helyen:

202. $f(x) = \sin x,\ g(x) = x - \dfrac{x^3}{3!},\ k = 4,$

203. $f(x) = \cos x,\ g(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!},\ k = 5,$

204. $f(x) = 1 + x + x^2,\ g(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4,\ k = 2,$

205. $f(x) = \sin x,\ g(x) = \operatorname{tg} x,\ k = 2.$

Hányad rendben érintik egymást az alábbi függvények grafikonjai a megadott pontban:

206. $x^2 \cos x, \quad x^2, \quad a = 0,$

207. $(x-1)(|x-1|+1), \quad x-1, \quad a = 1.$

Határozzuk meg az alábbi egyenletekkel adott görbék metszési szögeit:

208.▷ $y^2 = 4x - x^2, \quad x^2 + y^2 = 8,$

209.▷ $2x^2 + y^2 = 20, \quad 4y^2 - x^2 = 8,$

210.▷ $xy = 12, \quad x^2 + y^2 = 25.$

Az alábbi görbék adott P pontjaiban számítsuk ki a görbületi sugarat és a simulókör középpontjának koordinátáit:

211. $6y = x^3 - 12x - 2, \quad P(2, -3),$

212.▷ $y^2 = 2px,\ (p > 0),\ P(x, y),$

213. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \quad P(0, b),$

214. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \quad P(a, 0).$

Vegyes feladatok

215. Vázoljuk fel szabad kézzel az alábbi grafikonokról leolvasható információk, valamint a differenciálhányados geometriai jelentése alapján az ábrázolt függvények deriváltfüggvényét!

216.▷ Határozzuk meg a és b értékét úgy, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \le x_0 \\ ax + b, & \text{ha } x > x_0 \end{cases}$$

függvény differenciálható legyen x_0-ban.

217.▷ Legyen f differenciálható x_0-ban. Mutassuk meg, hogy a

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{ha } x \le x_0 \\ f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) & \text{ha } x > x_0 \end{cases}$$

függvény differenciálható x_0-ban. Határozzuk meg $g'(x_0)$-t! Vázoljuk fel g grafikonját!

218.▷ Határozzuk meg az a és b paraméterek értékét úgy, hogy az

$$y = \begin{cases} m^2/|x|, & \text{ha } |x| > c \\ ax^2 + b, & \text{ha } |x| \le c \end{cases}$$

egyenletű görbe folytonos, és minden pontjában érintővel rendelkező legyen.

219.▷ Legyen f kétszer differenciálható minden $x \le x_0$ pontban. Határozzuk meg az a, b és c paraméterek értékét úgy, hogy a

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \le x_0 \\ a(x - x_0)^2 + b(x - x_0) + c, & \text{ha } x > x_0 \end{cases}$$

függvény kétszer legyen differenciálható x_0-ban.

220. Igaz-e, hogy az $F(x) = f(x) + g(x)$ függvény nem differenciálható x_0-ban, ha
a) $f(x)$ differenciálható x_0-ban, de $g(x)$ nem,
b) sem $f(x)$, sem $g(x)$ nem differenciálható x_0-ban.

221. Igaz-e, hogy az $F(x) = f(x)g(x)$ függvény nem differenciálható x_0-ban, ha
a) $f(x)$ differenciálható x_0-ban, de $g(x)$ nem,
b) sem $f(x)$, sem $g(x)$ nem differenciálható x_0-ban.
Vizsgáljuk me az a) $f(x) = x$, $g(x) = |x|$, b) $f(x) = g(x) = |x|$ függvényeket a 0 pontban.

222. Igaz-e, hogy az $F(x) = f(g(x))$ függvény nem differenciálható x_0-ban, ha
a) $f(x)$ differenciálható $g(x_0)$-ban, de $g(x)$ nem differenciálható x_0-ban,
b) $f(x)$ nem differenciálható $g(x_0)$-ban, de $g(x)$ differenciálható x_0-ban,
c) $f(x)$ nem differenciálható $g(x_0)$-ban, és $g(x)$ sem differenciálható x_0-ban,
Vizsgáljuk me az a) $f(x) = x^2$, $g(x) = |x|$, b) $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2$, c) $f(x) = 2x + |x|$, $g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}|x|$ függvényeket a 0 pontban.

223. Legyenek f és g háromszor differenciálható függvények, és legyen $F : x \mapsto f(g(x))$. Határozzuk meg az F'' és F''' függvényeket.