9. Differenciálhányados, derivált (megoldások)

1. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{4-4}{h}=0$, tehát $f'(2)=0$.

2. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{4(2+h)+2-(4\cdot 2+2)}{h}=4$, tehát $f'(2)=4$.

3. 24. **4.** $\frac{1}{2}$. **5.** $-\frac{1}{4}$.

6. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(2+h)-\sin 2}{h}=$
$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin 2\cos h+\cos 2\sin h-\sin 2}{h}=\cos 2$,
mivel $\dfrac{\cos h-1}{h}\to 0$ és $\dfrac{\sin h}{h}\to 1$, ha $h\to 0$.

7. $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^3-x_0^3}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}(x^2+xx_0+x_0^2)=3x_0^2$.

8. $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

9. $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2\sin(\frac{x-x_0}{2})\cos(\frac{x+x_0}{2})}{x-x_0}=\cos x_0$, ugyanis
$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin(\frac{x-x_0}{2})}{\frac{x-x_0}{2}}=1$.

10. $-\frac{1}{2}x_0^{-\frac{3}{2}}$. **11.** $-\sin x_0$. **12.** $\cos^{-2}x_0$.

13. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^n-x_0^n}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{(x-x_0)(x^{n-1}+x^{n-2}x_0+\cdots+x_0^{n-1})}{x-x_0}=nx_0^{n-1}$.

14. Mivel $x-x_0=(x^{\frac{1}{m}})^m-(x_0^{\frac{1}{m}})^m=(x^{\frac{1}{m}}-x_0^{\frac{1}{m}})(x^{\frac{m-1}{m}}+x^{\frac{m-2}{m}}x_0^{\frac{1}{m}}+\cdots+(x_0^{\frac{m-1}{m}})$,
ezért $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^{\frac{1}{m}}-x_0^{\frac{1}{m}}}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^{\frac{1}{m}}-x_0^{\frac{1}{m}}}{(x^{\frac{1}{m}}-x_0^{\frac{1}{m}})(x^{\frac{m-1}{m}}+x^{\frac{m-2}{m}}x_0^{\frac{1}{m}}+\cdots+(x_0^{\frac{m-1}{m}})}=$
$\dfrac{1}{m}x_0^{\frac{1}{m}-1}$.

15. $´f=3(x_0+´x)^2-2(x_0+´x)+1-3x_0^2+2x_0-1=6x_0´x+3(´x)^2-2´x=$
$(6x_0-2)´x+(3´x)´x$, tehát $f'(x_0)=6x_0-2$, $\varepsilon(x)=3´x=3(x-x_0)$.

16. $f'(x_0)=3x_0^2+1$, $\varepsilon(x)=3x_0(x-x_0)+(x-x_0)^2$.

17. $´f=\sin(x_0+´x)-\sin x_0=\sin x_0\cos ´x+\cos x_0\sin ´x-\sin x_0=$
$\cos x_0\,´x+\left(\dfrac{\sin x_0(\cos ´x-1)}{´x}+\dfrac{\cos x_0(\sin ´x-´x)}{´x}\right)´x$, tehát
$f'(x_0)=\cos x_0$, és $\varepsilon(x)\to 0$, ugyanis $\frac{\cos ´x-1}{´x}\to 0$, és $\frac{\sin ´x-´x}{´x}\to 0$.

18. $f'(x_0)=-\sin x_0$, $\varepsilon(x)=\dfrac{\cos x_0(\cos ´x-1)}{´x}+\dfrac{\sin x_0(´x-\sin ´x)}{´x}$.

19. $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{(x - x_0)h(x) - 0}{x - x_0} = h(x_0)$. Másrészt a $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{|x - x_0|h(x) - 0}{x - x_0}$ határérték csak $h(x_0) = 0$ esetén létezik, és akkor 0.

20. Tegyük fel, hogy $f(x) = f(-x)$ ($\forall x \in \mathbf{R}$), ekkor
$f'(-x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-x+h)-f(-x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x-h)-f(x)}{h}$ (legyen $k = -h$)
$= \lim_{k \to 0} \frac{f(x+k)-f(x)}{-k} = -f'(x)$.
A másik összefüggés hasonlóan bizonyítható.

21. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \left(\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} + \dfrac{f(a)-f(a-h)}{h} \right) = 2f'(a)$,
mivel $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a) - f(a-h)}{h} = \begin{Bmatrix} \text{helyettesítés} \\ k = -h \end{Bmatrix} = \lim\limits_{k \to 0} \dfrac{f(a+k) - f(a)}{k} = f'(a)$.

22. g folytonos a-ban, mert $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) = g(a)$.

23. $f(x) = |x - 1|$.

24. Ilyen függvény **T 9.5** szerint nincs.

25. Pl.: $f(x) = 0$, vagy $f(x) = x^2$.

26. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0 \\ x^2, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$, deriváltja $f'(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0 \\ 2x, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$, amely nem differenciálható 0-ban. Két másik példa: $f(x) = x|x|$ (lásd **141.** feladat); $f(x) = x^\alpha$, ahol $1 < \alpha < 2$ (lásd **144.** feladat).

27. $f'_x(x, y) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)y - xy}{h} = y$,
$f'_y(x, y) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{x(y+h) - xy}{h} = x$,
tehát a deriváltak: $f'_x : (x, y) \mapsto y$, $f'_y : (x, y) \mapsto x$. Ezek értéke a P pontban: $f'_x(1, 2) = 2$, $f'_y(1, 2) = 1$.

28. $f'_x : (x, y) \mapsto 2x$, $f'_y : (x, y) \mapsto 2y$, $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$.

29. $f'_x(x, y) = 4$, $f'_y(x, y) = 2$, $f'_x(1, 1) = 4$, $f'_y(1, 1) = 2$.

30. $f'_x(x, y, z) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)yz - xyz}{h} = yz$.
Hasonlóképpen kapjuk a másik két parciális deriváltat is, tehát:
$f'_x : (x, y, z) \mapsto yz$, $f'_y : (x, y, z) \mapsto xz$, $f'_z : (x, y, z) \mapsto xy$. Ezek értéke a P pontban: $f'_x(1, 2, 3) = 6$, $f'_y(1, 2, 3) = 3$, $f'_z(1, 2, 3) = 2$.

31. $f'_x : (x, y, z) \mapsto 3$, $f'_y : (x, y, z) \mapsto -4$, $f'_z : (x, y, z) \mapsto 2$, $f'_x(0, 0, 0) = 3$, $f'_y(0, 0, 0) = -4$, $f'_z(0, 0, 0) = 2$.

32. $f'_x : (x, y, z) \mapsto 0$, $f'_y : (x, y, z) \mapsto 0$, $f'_z : (x, y, z) \mapsto 0$, $f'_x(1, 1, 1) = f'_y(1, 1, 1) = f'_z(1, 1, 1) = 0$.

33. Mivel $f(h, 0) = 0$, ha $h \neq 0$, ezért

$$f'_x(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h - 0} = \lim_{h \to 0} \frac{0 - a}{h - 0},$$

ami csak akkor létezik, ha $a = 0$, és ekkor $f'_x(0,0) = 0$. Hasonlóképpen $f'_y(0,0) = 0$.

34. Legyen $q = \frac{n}{m}$, és alkalmazzuk az $f(x) = x^{1/m}$ ($m \in \mathbf{N}^+$) függvényre az $(f^n)' = nf^{n-1}f'$ szabályt:
$(x^q)' = (x^{\frac{n}{m}})' = ((x^{\frac{1}{m}})^n)' = nx^{\frac{n-1}{m}}(\frac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}) = \frac{n}{m}x^{\frac{n}{m}-1} = qx^{q-1}$.

35. Hasonlóan az előző feladathoz, $f'(x) = \frac{n}{m}x^{\frac{n}{m}-1}$. Ha $n \geq m$, akkor e függvény értelmezési tartománya $\mathbf{R}$, ha $n < m$, akkor nincs értelmezve az $x = 0$ helyen, ezért kiszámítjuk $f'(0)$ értékét a definíció alapján:
$f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{n-m}{m}} = \infty$.
Tehát $n < m$ esetén f nem differenciálható a 0 pontban.

36. $2x - 2$. **37.** $-1 - 3x^2$. **38.** $x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{1}{3}}$.

39. $3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{2x}}$. **40.** $-\frac{1}{x^2} + \frac{5}{2}\sqrt{x^3}$. **41.** $(\frac{5x}{2} + 3)\sqrt{x}$.

42. $\sin x + x\cos x$. **43.** $3x^2\cos x - (x^3 + 1)\sin x$.

44. $\dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$. **45.** $\operatorname{tg}' x = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

46. $-\dfrac{1}{\sin^2 x}$. **47.** $\dfrac{\sin x - \cos x + 1}{(\cos x - 1)^2}$. **48.** $\dfrac{2 - x}{x^3}$.

49. $\dfrac{4x^3 + 3x^2 - 8}{(1 + 2x)^2}$. **50.** $4(x + 3)^3$. **51.** $-20(1 - x)^{19}$.

52. $8x(x^2 + 1)^3$. **53.** $-20x(1 - x^2)^9$.

54. $6(7x^2 - \dfrac{4}{x} + 6)^5(14x + \dfrac{4}{x^2})$. **55.** $\dfrac{-4(x + 1)}{(x - 1)^3}$.

56. $\dfrac{5(x^2 + 1)^4(x^2 + 2x - 1)}{(x + 1)^6}$. **57.** $20(\sin x + 1)^{19}\cos x$.

58. $400(\sin^{20} x + 1)^{19}\sin^{19} x\cos x$.

59. $n\operatorname{tg}^{n-1} x/\cos^2 x$. **60.** $-5\cos^4 x/\sin^6 x$. **61.** $-f'(-x)$.

62. $2xf'(x^2)$. **63.** $af'(ax)$. **64.** $-f'(1/x)/x^2$.

65. $f'(\sin^2 x)\sin 2x$. **66.** $\dfrac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}f'(\sqrt{1 - x^2})$. **67.** $F'(x) = 6x^2$.

68. $F'(x) = 0$.

70. $f(u) = u^3,\ u(x) = \sin x,\ f'(x) = f'(u(x))u'(x) = 3\sin^2 x\cos x$.

71. $f(u) = \sin u,\ u(x) = x^3,\ f'(x) = 3x^2\cos x^3$.

72. $f(u) = \sin u,\ u(x) = \operatorname{tg} x,\ f'(x) = \cos(\operatorname{tg} x)/\cos^2 x$.

73. $f(u) = u^2,\ u(t) = \sin t,\ t(x) = \operatorname{tg} x,\ f'(x) = \sin(2\operatorname{tg} x)/\cos^2 x$.

74. $f(u) = \sin u,\ u(t) = t^2,\ t(x) = \operatorname{tg} x,\ f'(x) = 2\cos(\operatorname{tg}^2 x)\sin x/\cos^3 x$.

75. $f(u) = \sin u,\ u(t) = \operatorname{tg} t,\ t(x) = x^2,\ f'(x) = 2x\cos(\operatorname{tg} x^2)/\cos^2 x^2$.

76. $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1 - x^2}},\ x \in (-1, 1)$. **77.** $f'(t) = \dfrac{-a^2 t}{\sqrt{1 - a^2t^2}},\ t \in \left(\dfrac{-1}{|a|}, \dfrac{1}{|a|}\right)$.

78. $f'(x) = -\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{1}{(x-1)^2},\quad x < -1$ vagy $x > 1$.

79. $f'(v) = \frac{1}{3}(3v + 18v^2)^{-\frac{2}{3}}(3 + 36v), \quad v \neq 0, -\frac{1}{6}.$

80. $f'(x) = -\frac{2}{3}\frac{ad - bc}{(ax + b)^{5/3}(cx + d)^{1/3}}, \quad x \neq -\frac{b}{a}, -\frac{d}{c}.$

81. $g'(t) = \frac{\cos t}{2\sqrt{1 + \sin t}}, \quad t \neq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$

82. $f_x(x, y) = 6x + y,\ f_y(x, y) = x - 6y^2.$

83. $g_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y}},\ g_y(x, y) = \frac{-1}{2\sqrt{x^2 - y}}.$

84. $\rho_\varphi(\varphi, \psi) = \cos\varphi\cos\psi,\ \rho_\psi(\varphi, \psi) = -\sin\varphi\sin\psi.$

85. $f_x(x, y) = 2ax + by,\ f_y(x, y) = bx + 2cy.$

86. $f_x(x, y, z) = y + z,\ f_y(x, y, z) = x + z,\ f_z(x, y, z) = x + y.$

87. $f_x(x, y, z) = \sin(xyz) + xyz\cos(xyz),\ f_y(x, y, z) = x^2z\cos(xyz),$
$f_z(x, y, z) = x^2y\cos(xyz).$

88. $g_x(x, y) = \frac{(ad - bc)y}{(cx + dy)^2},\ g_y(x, y) = \frac{(bc - ad)x}{(cx + dy)^2}.$

89. $f_x(x, y, z) = x(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}.$

90. $h_x(x, y) = 2f(x)f'(x)g(y),\ h_y(x, y) = f^2(x)g'(y).$

91. $h_x(x, y, z) = 2f(x, y)f_x(x, y)g^3(y, z),$
$h_y(x, y, z) = 2f(x, y)f_y(x, y)g^3(y, z) + 3g^2(y, z)g_y(y, z)f^2(x, y),$
$h_z(x, y, z) = 3g^2(y, z)g_z(y, z)f^2(x, y).$

92. $f_{x_1}(x_1, x_2, x_3) = x_2x_3.$

93. $f_{x_k}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1x_2\ldots x_{k-1}x_{k+1}\ldots x_n,\ (k = 1, 2, \ldots, n).$

94. $f_{x_k}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_k,\ (k = 1, 2, \ldots, n).$

95. $f_x(0, 0) = -\frac{1}{3},\ f_y(0, 0) = \frac{1}{3}.$

96. A differenciálási szabályok szerint $x \neq 0,\ y \neq 0$ esetén
$f_x(x, y) = \frac{\sqrt[3]{y}}{3\sqrt[3]{x^2}},\ f_y(x, y) = \frac{\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{y^2}}$. Ezek a $(0, 0)$ pontban nincsenek értelmezve, így a definíció alapján kell számolnunk.
$f_x(0, 0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0$, hasonlóképpen $f_y(0, 0) = 0$.

97. $f_x(x, y) = \frac{x^2}{(x^3 + y^3)^{3/2}},\ f_y(x, y) = \frac{y^2}{(x^3 + y^3)^{3/2}}$. Ezek a $(0, 0)$ pontban nincsenek értelmezve, így a definíció alapján számolva: $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 1$.

98. $f_x(0, 0)$ nincs értelmezve, $f_y(0, 0) = 0$.

99. $f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases},$
ugyanis $f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{h} = 0.$
Az f' függvény nem folytonos 0-ban, mert a $\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ határérték nem létezik, így a $\lim_{x\to 0}(2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x})$ határérték sem.

100. f nem differenciálható az $x_k = 1/(k\pi)$ helyeken. A 0 pontbeli differenciálhatóság a definíció alapján, az előző feladathoz hasonlóan bizonyítható.

101. A sorozat összegképletének mindkét oldalát deriválva kapjuk, hogy

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} = \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)' = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.$$

102. Az előző feladat összegképletének mindkét oldalát x-szel szorozva, majd mindkét oldalt deriválva azt kapjuk, hogy

$$1 + 4x + 9x^2 + \cdots + n^2x^{n-1} = \left(\frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}\right)' =$$

$$= \frac{1 + x - (n+1)^2x^n + (2n^2+2n-1)x^{n+1} - n^2x^{n+2}}{(1-x)^3}.$$

103. A $2\sin u \cos v = \sin(u+v) + \sin(u-v)$ azonosságot felhasználva:
$2\sin x(\cos x + \cos 3x + \ldots + \cos(2n-1)x) =$
$2\sin x\cos x + 2\sin x\cos 3x + \ldots + 2\sin x\cos(2n-1)x =$
$\sin 2x + (\sin 4x - \sin 2x) + \ldots + (\sin 2nx - \sin(2n-2)x) = \sin 2nx,$
ami bizonyítja a feladatbeli első formulát. Ennek mindkét oldalát deriválva megkapjuk a kívánt összegképletet:

$$(\cos x + \cos 3x + \ldots + \cos(2n-1)x)' = \left(\frac{\sin 2nx}{2\sin x}\right)', \text{ azaz}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\sin(2k-1)x = \frac{(2n+1)\sin(2n-1)x - (2n-1)\sin(2n+1)x}{4\sin^2 x}.$$

104. $3^4\sin(3x+1)$. **105.** $-2^7\sin(4-2x)$. **106.** $\dfrac{5!}{(1-x)^6}$.

107. $f^{(10)}(x) = -\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot 17}{2^{10}x^9\sqrt{x}}$, $(x > 0)$.

108. $f_{xx}(x,y) = 12x^2,\ f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 3y^2,\ f_{yy}(x,y) = 6xy.$

109. $f_{xx}(x,y) = 2a,\ f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 2b,\ f_{yy}(x,y) = 2c.$

110. $f_{xx}(x,y) = -4x^2y^2\sin x^2y + 2y\cos x^2y,\ f_{yy}(x,y) = -x^4\sin x^2y,$
$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -2x^3y\sin x^2y + 2x\cos x^2y.$

111. $f_{xx}(x,y) = -\dfrac{2\sin x^2 + 4x^2\cos x^2}{y},\ f_{xy}(x,y) = \dfrac{2x\sin x^2}{y^2},\ f_{yy}(x,y) = \dfrac{2\cos x^2}{y^3}.$

112. $f_{xx}(x,y,z) = 2,\ f_{yy}(x,y,z) = 4(x+3y^2+z^3),\ f_{zz}(x,y,z) = 6z(2x+2y^2+5z^3),$
$f_{xy}(x,y,z) = f_{yx}(x,y,z) = 4y, f_{xz}(x,y,z) = f_{zx}(x,y,z) = 6z^2,$
$f_{yz}(x,y,z) = f_{zy}(x,y,z) = 12yz^2.$

113. $\dfrac{\partial^6 g}{\partial x^3\partial y^3}(x,y) = -6(\cos x + \cos y).$

114. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \dfrac{-2(x+y)}{(x-y)^3},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{4y}{(x-y)^3},\ \dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x,y) = \dfrac{4(x+2y)}{(x-y)^4}.$

115. $\dfrac{\partial^{n+m} f}{\partial x^n\partial y^m}(x,y) = n!m!.$

116. $\dfrac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}(x,y) = \dfrac{2(-1)^m(m+n-1)!(nx+my)}{(x-y)^{m+n+1}}$. (Ha az eredményt nem tudtuk direkt módon kiszámítani, akkor bizonyítsuk be külön n-re majd külön m-re vonatkozó teljes indukcióval!)

117. $y'(x) = 2cx$, így $y'(x)x - y(x) = 2cx^2 - 2cx^2 = 0$ valóban fennáll.

120. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x - 6x = 0$.

121. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - c^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 - 0 = 0$.

122. $\dfrac{2x^2 - y^2 - z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \dfrac{-x^2 + 2y^2 - z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \dfrac{-x^2 - y^2 + 2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = 0$.

123. $(x^m)' = mx^{m-1}, \quad (x^m)'' = m(m-1)(x^{m-2}), \ldots,$
$(x^m)^{(n)} = m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n}$.
(A pontosság kedvéért megjegyezzük, hogy $n = 0$ esetén $m < m-n+1$ miatt az $m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)$ szorzatot úgy kell tekintenünk, mint aminek egyetlen tényezője sincs, így értéke 1. Mivel nem értelmeztük a 0^0 hatványt, ezért $m = 0$ esetén az összefüggés nincs értelmezve az $x = 0$ helyen.)

124. Az előző feladatbeli egyenlőségből következik.

125. $((x-a)^{-1})' = -1(x-a)^{-2}$, $((x-a)^{-1})'' = (-1)(-2)(x-a)^{-3}, \ldots,$
$((x-a)^{-1})^{(n)} = (-1)(-2)\ldots(-n)(x-a)^{-n-1} = (-1)^n n!/x^{n+1}$.

126. $(\sin x)' = \cos x = \sin(x+\frac{\pi}{2})$, $(\sin x)'' = (\sin(x+\frac{\pi}{2}))' = \sin(x+\frac{2\pi}{2})$, hasonlóan $(\sin(x+\frac{k\pi}{2}))' = \sin(x+\frac{(k+1)\pi}{2})$, így teljes indukcióval kapjuk, hogy $(\sin x)^{(n)} = \sin(x+\frac{n\pi}{2})$.

127. Hasonló az előzőhöz.

128. $a_0 n!$.

129. $\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$, $(\sin x \cos x)^{(n)} = 2^{n-1}\sin(2x+\frac{n\pi}{2})$.

130. $\sin 3x \cos 2x = \frac{1}{2}(\sin 5x + \sin x)$,
$(\sin 3x\cos 2x)^{(n)} = \frac{1}{2}(5^n \sin(5x+\frac{n\pi}{2}) + \sin(x+\frac{n\pi}{2}))$.

131. $\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}(\cos(a-b)x + \cos(a+b)x)$, $\quad (\cos ax\cos bx)^{(n)} =$
$\frac{1}{2}\Big((a-b)^n\cos((a-b)x+\frac{n\pi}{2}) + (a+b)^n\cos((a+b)x+\frac{n\pi}{2})\Big)$.

132. $\left(\dfrac{x}{x^2-1}\right)^{(n)} = \left(\dfrac{\frac{1}{2}}{x-1} + \dfrac{\frac{1}{2}}{x+1}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{2}\left(\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}} + \dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}\right)$.

133. $\left(\dfrac{2x+1}{x^2+x-2}\right)^{(n)} = \left(\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+2}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} + \dfrac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}}$.

134. $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{(n)} = (-1)^n\dfrac{n!c^{n-1}(bc-ad)}{(cx+d)^{n+1}}$, ha $c \neq 0$ és $n \in \mathbf{N}^+$. A $c = 0$ eset triviális. (Vegyük észre, hogy a számlálóban az a, b, c, d számokból álló determináns értéke áll.)

135. Teljes indukcióval bizonyítunk. $n = 1$ esetén: $(fg)' = f'g + fg'$, tehát az állítás igaz. Tegyük fel, hogy az állítás n-re igaz, bizonyítjuk, hogy $(n+1)$-re

is:
$(fg)^{(n+1)} = ((fg)^{(n)})' = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}g^{(k)}\right)'$
$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n+1-k)}g^{(k)} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}g^{(k+1)}.$
Felhasználva, hogy $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = 1$, $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1$, továbbá hogy $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ kapjuk, hogy
$\binom{n}{0}f^{(n+1)}g + \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right)f^{(n)}g' + \dots + \binom{n}{n}fg^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}f^{(n+1-k)}g^{(k)}.$

136. $(x^2\sin x)'' = (x^2)''\sin x + 2(x^2)'(\sin x)' + x^2(\sin x)' = 2\sin x + 4x\cos x - x^2\sin x.$

137. $(x\sin x)^{(25)} = x\cos x + 25\sin x$, mert x minden további deriváltja 0.

138. $x^2\cos x + 50x\sin x - 300\cos x.$

139. $13\sin 2x\sin(x+1) - 14\cos 2x\cos(x+1).$

140. $f'(x) = 12x^3 - 4x$, $f'(0) = 0$, $f''(x) = 36x^2 - 4$, $f''(0) = -4$, $f'''(x) = 72x$, $f'''(0) = 0$, $f^{(4)}(x) = 72$, $f^{(4)}(0) = 72$, $f^{(n)}(x) = 0$, $f^{(n)}(0) = 0$, ha $n > 4$.

141. $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \ge 0 \\ -x^2, & \text{ha } x < 0 \end{cases} = x|x|, \qquad \operatorname{Dom} f = \mathbf{R}$

$f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{ha } x \ge 0 \\ -2x, & \text{ha } x < 0 \end{cases} = 2|x|, \qquad \operatorname{Dom} f' = \mathbf{R}$

$f''(x) = \begin{cases} 2, & \text{ha } x > 0 \\ -2, & \text{ha } x < 0 \end{cases}, \qquad \operatorname{Dom} f'' = \mathbf{R}\setminus\{0\}$

$f^{(n)}(x) = 0$, ha $n \ge 3$ és $x \ne 0$, $\quad \operatorname{Dom} f^{(n)} = \mathbf{R}\setminus\{0\}$.
Tehát $f(0) = f'(0) = 0$, de $f^{(n)}(0)$ nincs értelmezve, ha $n \ge 2$.

142. $f^{(2n)}(x) = (-1)^n\sin x$, $f^{(2n)}(0) = 0$,
$f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n\cos x$, $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$.

143. $f^{(2n)}(x) = (-1)^n\cos x$, $f^{(2n)}(0) = (-1)^n$,
$f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n\sin x$, $f^{(2n+1)}(0) = 0$.

144. A **35.** feladat szerint: $(x^{\frac{4}{3}})'|_0 = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}|_0 = 0$, $(x^{\frac{4}{3}})'' = \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}}$, tehát e függvény differenciálható 0-ban, de kétszer nem. $(x^{\frac{7}{3}})'|_0 = 0$, $(x^{\frac{7}{3}})''|_0 = 0$, $(x^{\frac{7}{3}})''' = \frac{28}{27}x^{-\frac{2}{3}}$, tehát e függvény kétszer differenciálható 0-ban, de háromszor nem. Legyen $k = n + \varepsilon - 1$, ahol $\varepsilon = \frac{n}{m}$, $n, m \in \mathbf{N}^+$, m páratlan, $n < m$ (tehát $0 < \varepsilon < 1$, pl. $\varepsilon = 1/3$ az előző függvényeknél).
$(x^{n+\varepsilon-1})^{(i)} = (n+\varepsilon-1)(n+\varepsilon-2)\dots(n+\varepsilon-i)x^{n+\varepsilon-i-1}$, $(i < n)$,
$(x^{n+\varepsilon-1})^{(n)} = (n+\varepsilon-1)(n+\varepsilon-2)\dots(1+\varepsilon)\varepsilon x^{\varepsilon-1}$,
és ez utóbbi függvény nincs értelmezve 0-ban, míg az előző deriváltak értéke 0-ban 0.

145. $f(-1) = f(1) = 0$, f folytonos $[-1,1]$-en, de f nem differenciálható 0-ban, vagyis nem differenciálható a $(-1,1)$ intervallum minden pontjában. Tehát a tétel feltételei nem teljesülnek, és olyan c sincs, melyre a tétel konklúziója igaz lenne.

146. $f(-1) = f(1) = 0$, f folytonos $[-1,1]$-en, de nem differenciálható 0-ban (lásd **35.** feladat). Egyébként nincs olyan $c \in (-1,1)$, melyre $f'(c) = 0$ lenne.

147. $f(0) = f(\pi) = 0$, f folytonos a $[0, \pi]$-n, és differenciálható a $(0, \pi)$ intervallumon; $f'(\pi/2) = 0$.

148. $f(0) = f(2\pi) = 0$, f folytonos a $[0, 2\pi]$-n, de nem differenciálható π-ben, vagyis a tétel feltételei nem teljesülnek. Ettől függetlenül van olyan pont a $(0, 2\pi)$ intervallumban, ahol a differenciálhányados 0, nevezetesen $f'(\pi/2) = f'(3\pi/2) = 0$.

149. f folytonos a $[-2, 0]$ intervallumon, differenciálható a $(-2, 0)$ intervallumon, így van olyan $c \in (-2, 0)$, hogy $f'(c) = (f(0) - f(-2))/(0 - (-2)) = -6$. $f'(x) = 6x$, ezért $c = -1$.

150. f nem folytonos 0-ban, és olyan c sincs melyre a tétel konklúziója igaz lenne.

151. Bár f nem differenciálható 0-ban, és így a tétel feltételei nem teljesülnek, de van olyan c, melyre a tétel konklúziója igaz, nevezetesen $c = 1$.

152. f nem differenciálható 0-ban, és olyan c sincs, melyre a tétel konklúziója igaz lenne.

153. f és g folytonos és differenciálható mindenütt, $g'(x) = 3x^2 - 14x + 20$, és ennek nincs valós zérushelye, tehát a Cauchy-tétel feltételei fennállnak, így van olyan $c \in (1, 4)$, hogy $\dfrac{f(4) - f(1)}{g(4) - g(1)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$, azaz $\dfrac{11 - 2}{27 - 9} = \dfrac{2c - 2}{3c^2 - 14c + 20}$. Ennek megoldásai $c_1 = 2$ és $c_2 = 4$, de $4 \notin (1, 4)$, tehát $c = 2$ az egyetlen ilyen érték.

154. f nem differenciálható 0-ban, és olyan c sincs, melyre a tétel konklúziója igaz lenne. (A feladat lényegében megegyezik a kettővel ezelőttivel.)

155. A tétel feltételei nem teljesülnek, mivel $g'(0) = 0$. Olyan c sincs melyre a tétel konklúziója igaz lenne, mert $(f(1) - f(-1))/(g(1) - g(-1)) = 0$, és az $f'(c)/g'(c) = 0$ egyenlet csak $c = 0$ esetén teljesülhetne, ahol ennek az egyenletnek nincs értelme.

156. Az $f(x) = 3x^5 + 15x - 2$ függvény folytonos, és például $f(0) < 0$, $f(1) > 0$, így a Bolzano-tétel (**T 8.22**) szerint a feladatbeli egyenletnek a $(0, 1)$ intervallumon van gyöke. Tegyük fel, hogy $x_1 < x_2$ két különböző valós gyök. Ekkor f kielégíti a Rolle-tétel feltételeit az $[x_1, x_2]$ intervallumon, így van olyan $c \in (x_1, x_2)$ szám, hogy $f'(c) = 0$. Másrészt $f'(x) = 15(x^4 + 1) > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Indirekt feltevésünkből ellentmondásra jutottunk, tehát az egyenletnek nincs két valós gyöke.

157. $f(x) = 0$, ha $\sin \frac{\pi}{x} = 0$, azaz ha $x = 1/k$, $k \in \mathbf{N}^+$. Mivel f folytonos $[0, 1]$-en, és differenciálható $(0, 1)$-en, ezért a Rolle-tétel alkalmazható az $[\frac{1}{2}, 1], [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}], \ldots, [\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}], \ldots$ intervallumokra, azaz létezik olyan c_k, hogy $\frac{1}{k+1} < c_k < \frac{1}{k}$ és $f'(c_k) = 0$.

158. Legyen $f(x) = c_1 x + \dfrac{c_2}{2} x^2 + \cdots + \dfrac{c_n}{n} x^n$. E függvény kielégíti a Rolle-tétel feltételeit a $[0, 1]$ intervallumon, hisz $f(0) = f(1) = 0$, így van olyan $c \in (0, 1)$, melyre $f'(c) = 0$.

159. A Lagrange-tételt a sin függvényre felírva kapjuk, hogy $\dfrac{\sin x - \sin y}{x - y} = \cos c$, valamely $c \in (x, y)$ (ill. $c \in (y, x)$) számra. Vegyük mindkét oldal abszolút értékét, és használjuk ki, hogy $|\cos c| \le 1$. Ekkor kapjuk, hogy $|\sin x - \sin y| \le |x-y|$.

160. A Lagrange tétel szerint van olyan c az x és a $-y$ számok között, hogy $\dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}(-y)}{x-(-y)} = \dfrac{1}{\cos^2 c}$. Átrendezve és felhasználva, hogy $|\cos c| \le 1$, kapjuk, hogy $|\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y| \ge |x+y|$.

161. Tegyük fel, hogy $0 < x < y$, és írjuk fel a Lagrange tételt az $[x,y]$ intervallumra és a négyzetgyök-függvényre, valamint használjuk ki azt, hogy mivel $x < c$, ezért $1/\sqrt{c} < 1/\sqrt{x}$.

$$\frac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{y-x} = \frac{1}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ amiből átszorzás után } \sqrt{xy} < \frac{x+y}{2}.$$

162. A Lagrange tételt felírva az f függvényre és az $[x, x+1]$ intervallumra, kapjuk hogy van olyan $c \in (x, x+1)$ szám, hogy $f(x+1) - f(x) = f'(c)$. Ez bizonyítja állításunkat.

163. $f'(x) = 3x(x-2)$, f szigorúan monoton nő, ha $x < 0$, $x > 2$, szigorúan monoton csökken, ha $0 < x < 2$.

164. $f'(x) = 3(x+2)^2 \ge 0$, továbbá $f(x) < 0$, ha $x < -2$ és $f(x) > 0$, ha $x > -2$, így f mindenütt szigorúan monoton növekvő.

165. $f'(x) = (2-x)(2+x)/(x^2+4)^2$, f szigorúan monoton nő, ha $-2 < x < 2$, szigorúan monoton csökken, ha $x < -2$, $2 < x$.

166. $f'(x) = 2\sin 4x$, f szigorúan monoton nő, ha $0 < x < \pi/4$, $\pi/2 < x < 3\pi/4$, szigorúan monoton csökken, ha $\pi/4 < x < \pi/2$, $3\pi/4 < x < \pi$.

167. $f'(x) = \frac{1}{3}(x+2)^{-2/3} > 0$, f szigorúan monoton nő, ha $x < -2$, $x > -2$.

168. $f'(x) = \frac{4}{3}x^{-2/3}(x+1)$, f szigorúan monoton nő, ha $-1 < x < 0$ vagy $0 < x$, szigorúan monoton csökken, ha $x < -1$.

169. Tekintsük az $f(x) = x - \sin x$ függvényt. Ha $0 < x < \pi$ akkor $f'(x) > 0$, így f szigorúan monoton nő; ebből, mivel $f(0) = 0$, következik, hogy $f(x) > 0$, ha $0 < x < \pi$. Ha pedig $x \ge \pi$, akkor $f(x) \ge \pi - 1 > 0$. Tehát $f(x) > 0$, ha $x > 0$, azaz $x - \sin x > 0$. Ez bizonyítja az egyik egyenlőtlenséget. A másik hasonlóan adódik, csak az előző gondolatmenet kétszeri alkalmazásával: $f(x) = \sin x - x + x^3/3 > 0$, ha $x > 0$, ugyanis $f(0) = 0$ és $f'(x) = \cos x - 1 + x^2 > 0$, ami azért igaz, mert $f'(0) = 0$ és $f''(x) = -\sin x + x > 0$, amint azt már bizonyítottuk.

170. Az előző feladathoz hasonlóan oldható meg.

171. Legyen $f(x) = x^\alpha - 1 - \alpha(x-1)$. Mivel $f(1) = 0$ és $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} - \alpha > 0$, ha $\alpha > 1$ és $x > 1$, ezért $f(x) > 0$, ami bizonyítja az egyenlőtlenséget.

172. A p' polinomnak legfeljebb $n-1$ valós gyöke van, ezek közül jelölje a a legkisebbiket, c a legnagyobbikat, és legyen b az $|a|$ és $|c|$ maximuma. Ekkor p'-nek nincs gyöke a $(-\infty, -b)$ és a (b, ∞) intervallumokban, tehát egyikben sem vált előjelet, így p mindkettőben szigorúan monoton.

173. $y'(x) = \dfrac{1 - 2xy(x) - 3y^3(x)}{x^2 + 9xy^2(x)}$. **174.** $y'(x) = -\dfrac{y^2(x)}{x^2}$.

175. Az is megtehető, hogy az egyenletet nem rendezzük 0-ra, hanem mindkét oldalát külön-külön differenciáljuk x szerint:

$$(3xy(x))' = (((x^3 + y^2(x))^{\frac{3}{2}})', \text{ amiből } y'(x) = \frac{\frac{3}{2}x^2\sqrt{x^3 + y^2(x)} - y(x)}{x - y(x)\sqrt{x^3 + y^2(x)}}.$$

176. $\cos(x^2y^2(x))(2xy^2(x) + 2x^2y(x)y'(x)) = 1$, amiből $y'(x)$ kifejezhető.

177. $2y(x) + 2xy'(x) - 2y(x)y'(x) = 0$, amiből $y'(x) = \dfrac{y(x)}{y(x) - x}$. Ebből

$$y''(x) = \frac{y'(x)(y(x) - x) - y(x)(y'(x) - 1)}{(y(x) - x)^2} = \frac{y^2(x) - 2xy(x)}{(y(x) - x)^3} = \frac{3}{(x - y(x))^3}.$$

178. $y'(x) = \dfrac{\cos y(x)}{1 + x\sin y(x)}$, $y''(x) = -\dfrac{\sin 2y(x) + x\cos y(x)(\sin^2 y(x) + 1)}{(1 + x\sin y(x))^3}$.

179. $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 1}$,

180. Az inverz kiszámításához $f(x)$ helyébe y-t írunk ($y = x^2 - 6x + 8$), és az így kapott egyenletből kifejezzük x-et: $x = 3 \pm \sqrt{1 + y}$. Mivel a feladat szerint $x \geq 3$, ezért $x = 3 + \sqrt{1 + y}$, azaz az inverz függvénykapcsolat: $f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{1 + x}$ (itt x helyébe $f^{-1}(x)$-et, y helyébe x-et írtunk). $\operatorname{Dom} f^{-1} = [-1, \infty)$ és $\operatorname{Ran} f^{-1} = [3, \infty)$, mivel $\operatorname{Dom} f = [3, \infty)$ és $\operatorname{Ran} f = [-1, \infty)$. (lásd ábra)

181. Az $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ egyenletből kapjuk, hogy $x = \frac{-dy+b}{cy-a}$, azaz $f^{-1}(x) = \dfrac{-dx + b}{cx - a}$. Az $ad - bc = 0$ pontosan akkor áll fenn, ha $ax + b$ és $cx + d$ egyike konstansszorosa a másiknak, azaz f vagy nincs értelmezve egyetlen x pontban sem, vagy f egy konstansfüggvény és akkor nem invertálható. Könnyen ellenőrizhető, hogy $ad - bc \neq 0$ esetén a fenti egyenletből x egyértelműen kifejezhető, tehát f egész értelmezési tartományán invertálható.

182. Egy függvény inverzének grafikonja a függvény grafikonjának tükörképe az $y = x$ egyenletű egyenesre. Így egy függvény pontosan akkor inverze önmagának, ha grafikonja szimmetrikus az $y = x$ egyenletű egyenesre. Meg kell tehát mutatnunk, hogy $f^{-1}(x) = f(x)$. f inverzét megkapjuk a következő egyenletből: $x = \dfrac{af^{-1}(x) + b}{cf^{-1}(x) - a}$, amiből $f^{-1}(x) = \dfrac{ax + b}{cx - a}$.

183. Az előző feladat speciális esete.

184. $f^{-1} = f$.

185. Ha f nem monoton, akkor van négy olyan $x_1 < x_2$, $x_3 < x_4$ pont, hogy $f(x_1) < f(x_2)$, de $f(x_3) > f(x_4)$. Könnyen látható, hogy e négy pont közül mindig kiválasztható a feladat feltételeit kielégítő három.

186. Az állítás az előző feladatból és a **T.8.21** tételből következik.

187. $y_0 = f(1) = -1$, $f'(x) = 15x^2 + 1$, $f'(1) = 16$. Mivel $f'(x) > 0$, ha $x \in \mathbf{R}$, ezért f szigorúan monoton növő, s ezért invertálható. Inverz függvény grafikonja az eredetinek az $y = x$ egyenesre való tükrözése által kapható, a 16 iránytangensű egyenes tükörképének iránytangense pedig $1/16$, tehát $f^{-1}(-1) = 1/16$, míg általában $f^{-1}(y_0) = 1/(15x_0^2 + 1)$. Ugyanezt kapjuk az inverzfüggvény tételből is, hisz

$$\left(\frac{df^{-1}}{dy}\right)_{y=-1} = \frac{1}{\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=1}} = \frac{1}{(15x^2+1)_{x=1}} = \frac{1}{16}.$$

Az inverz függvényt leíró implicit alak: $y = 5(f^{-1}(y))^3 + f^{-1}(y) - 7$, vagy az $x = f^{-1}(y)$ jelöléssel: $y = 5x^3 + x - 7$. Mindkét oldal y szerinti differenciálásával kapjuk, hogy $1 = 15x^2 \frac{dx}{dy} + \frac{dx}{dy}$. Ebből f^{-1} deriváltja: $(f^{-1})'(y) = \frac{dx}{dy} = 1/(15x^2 + 1)$.

188. $y_0 = f(\frac{\pi}{8}) = 1$, $(f^{-1}(y))'_{y=1} = \left.\frac{\cos^2 2x}{2}\right|_{x=\pi/8} = \frac{1}{4}$.

189. $y_0 = f(0) = 0$, $(f^{-1}(y))'_{y=0} = 1/(7 - 3\cos 3x)|_{x=0} = 1/4$.

190. $y_0 = f(1) = 4$, $(f^{-1}(y))'_{y=4} = 1/(10x^4 + 3x^2)\Big|_{x=1} = 1/13$.

191. Ha $a \in A$, akkor $b = g(a) \in B$ és $c = f(b) = f(g(a)) \in C$. Mivel f és g invertálhatók, ezért $f^{-1}(c) = b$, $g^{-1}(b) = a$ és ezért $(g^{-1} \circ f^{-1})(c) = g^{-1}(f^{-1}(c)) = g^{-1}(b) = a$. Másrészt $(f \circ g)(a) = c$, ezért $(f \circ g)^{-1}(c) = a$, tehát $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

192. $f'(x) > 0$, ha $x \in (0, \infty)$, így f a $(0, 3)$ intervallumon is szigorúan monoton növő. Mivel $f(1) = 3$, ezért $g(3) = 1$, továbbá $\left(\frac{dg}{dy}\right)_{y=3} = \left.\frac{1}{f'(x)}\right|_{x=1} = \left.\frac{1}{4x^3 + 3x^2}\right|_{x=1} = \frac{1}{7}$, ahol $y = f(x)$. $F'(x) = (f(2g(x)))' = f'(2g(x))2g'(x)$, tehát $F'(3) = \left(4(2g(3))^3 + 3(2g(3))^2\right)2g'(3) = 88/7$.

193. $f(\pi^2) = 0$, $f'(\pi^2) = \left.\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right|_{x=\pi^2} = \frac{-1}{2\pi}$,
érintő: $y = -\frac{x}{2\pi} + \frac{\pi}{2}$, normális: $y = 2\pi x - 2\pi^3$.

194. $f(\pi) = 0$, $f'(\pi) = \left.\left(-\frac{\pi^2}{x^2}\right)\cos\frac{\pi^2}{x}\right|_{x=\pi} = 1$,
érintő: $y = x - \pi$, normális: $y = -x + \pi$.

195. $f(3) = 3$, $f'(3) = 3x^2 - 8\Big|_{x=3} = 19$,
érintő: $y = 19x - 54$, normális: $y = -\frac{x}{19} + \frac{60}{19}$.

196. y-t x függvényének tekintve és az implicit függvény differenciálási szabályát használva: $3x^2 + 3y^2(x)y'(x) - 6y(x) - 6xy'(x) = 0$, így az $x = 3$, $y(3) = 3$ értékek behelyettesítésével kapjuk, hogy $y'(3) = -1$.
Érintő: $y = -x + 6$, normális: $y = x$. (A gyakorlatban a fenti deriváltat csak $3x^2 + 3y^2y' - 6y - 6xy' = 0$ alakban írjuk fel.)

197. $y' = (1 + y')\cos(x + y)$, $y'(\pi) = -\frac{1}{2}$
Érintő: $y = -\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}$, normális: $y = 2(x - \pi)$.

198. $f(x) = f(x)\sin ax$, ha $\sin ax = 1$, azaz ha $ax = \pi/2 + 2k\pi$.
Ekkor $(f(x)\sin ax)'|_{ax=\pi/2+2k\pi} = (f'(x)\sin ax + af(x)\cos ax)|_{ax=\pi/2+2k\pi} = f'(x)$, tehát a deriváltak megegyeznek a közös pontban, így a görbék érintik egymást.

199. $2x - 4 + 2yy' = 0$, amiből $y' = (2-x)/y$. Az egyenes egyenlete $y = mx$. Az (x_0, y_0) érintési pontra és az érintő m iránytangensére az alábbi egyenletek állnak fenn: $x_0^2 - 4x_0 + y_0^2 + 3 = 0$, $(2-x_0)/y_0 = m$, $y_0 = mx_0$. Ezekből $m = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, tehát két ilyen egyenes van, és ezek egyenlete: $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$.

200. $b^2 - 4ac = 0$.

201. Vízszintes az érintő ott, ahol $y'(x) = 0$, azaz $3x^2 + p = 0$, tehát $x = \pm\sqrt{-p/3}$. Ha e pontokban $y(x) = 0$, akkor az érintő az x-tengely lesz. A behelyettesítést elvégezve, rövid számolás után megkapjuk a kívánt összefüggést.

202. $f(0) = g(0) = 0$, $f'(0) = g'(0) = 1$, $f''(0) = g''(0) = 0$, $f'''(0) = g'''(0) = -1$, $f^{(4)}(0) = g^{(4)}(0) = 0$, $f^{(5)}(0) = 1 \neq g^{(5)}(0) = 0$.

203. $f^{(i)}(0) = g^{(i)}(0)$, ha $0 \le i \le 5$, de $f^{(6)}(0) = -1 \neq g^{(6)}(0) = 0$.

206. A **T 9.26** tétel szerint legalább másodrendben, valójában harmadrendben.

207. A **T 9.26** tétel szerint legalább elsőrendben, a deriváltakat kiszámolva látható, hogy pontosan elsőrendben érintik egymást.

208. A metszéspontok $P_1(2,2)$ és $P_2(2,-2)$. P_1-ben a két iránytangens 0 és -1, tehát a hajlásszög $\pi/4$. P_2-ben a két iránytangens 0 és 1, a hajlásszög itt is $\pi/4$.

209. A metszéspontok $P_1(2\sqrt{2},2)$, $P_2(-2\sqrt{2},2)$, $P_3(2\sqrt{2},-2)$, $P_4(-2\sqrt{2},-2)$. Az ellipszis érintőjének iránytangense $m_1 = -2x/y$, a hiperboláé $m_2 = x/(4y)$. Ha x és y helyébe bármelyik metszéspont koordinátáit helyettesítjük, $m_1 m_2 = -1$ adódik, tehát a két görbe merőlegesen metszi egymást mind a négy pontban.

210. A metszéspontok $P_1(3,4)$, $P_2(4,3)$, $P_3(-3,-4)$, $P_4(-4,-3)$. A hiperbola érintőjének iránytangense $m_1 = \operatorname{tg}\alpha_1 = -y/x$, a köré $m_2 = \operatorname{tg}\alpha_2 = -x/y$. Az érintők hajlásszögének tangense:

$$\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_2}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \pm\frac{7}{24},$$

azaz a hajlásszög mind a négy pontban $|\alpha_1 - \alpha_2| = \operatorname{arctg}\frac{7}{24}$.

211. A sugár $r(2) = 1/2$, a középpont $(2, -5/2)$.

212. Mivel a $P(0,0)$ pontban az érintő függőleges, ezért x és y szerepének felcserélésével áttérünk az inverz függvényre: $2py = x^2$, $y' = x/p$, $y'' = 1/p$. A képletbe való behelyettesítéssel kapjuk, hogy a sugár $p(1 + x^2/p^2)^{3/2}$, a középpont $(-x^3/p^2, \frac{3}{2}x^2/p + p)$. E képleteket a $2py = x^2$ behelyettesítésével átírjuk y függvényévé: a sugár $p(1 + \frac{2y}{p})^{3/2}$, a középpont $(-(2y)^{3/2}/\sqrt{p}, 3y + p)$. Visszatérve az inverz függvényről az eredetire, azaz visszacserélve az x és y változókat kapjuk, hogy a sugár $p(1+\frac{2x}{p})^{3/2}$, a középpont $(-(2x)^{3/2}/\sqrt{p}, 3x + p)$.

213. A sugár a^2/b, a középpont $(0,(b^2-a^2)/b)$.

214. Térjünk át x és y szerepének felcserélésével az inverz függvénykapcsolatra, és vizsgáljuk a $-\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ egyenletű görbe simulókörét a $(0,a)$ pontban, majd cseréljük vissza x-et és y-t. A sugár b^2/a, a középpont $((a^2+b^2)/a,0)$.

215.

216. Ha f differenciálható x_0-ban, akkor folytonos is ott, tehát bal oldali és jobb oldali határértékei megegyeznek.
$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=ax_0+b$, $\lim_{x\to x_0-0} f(x)=x_0^2$, így $x_0^2=ax_0+b$.
Ha f differenciálható, akkor a differenciahányados bal oldali és jobb oldali határértékei ugyancsak megegyeznek.

$$\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=a,\qquad \lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=2x_0,$$

azaz $2x_0=a$. A két egyenletből pedig kapjuk, hogy $a=2x_0$ és $b=-x_0^2$.

217.
$$\lim_{x\to x_0-0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0),$$
$$\lim_{x\to x_0+0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0+0}\frac{f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0),$$
a jobb oldali és bal oldali határérték megegyezik, így g differenciálható az x_0 pontban és $g'(x_0)=f'(x_0)$. g grafikonja $x>x_0$ esetén megegyezik az f függvény x_0-beli érintőjével.

218. $a=-\dfrac{m^2}{2c^3}$, $b=\dfrac{3m^2}{2c}$.

219. $a=\frac{1}{2}f''(x_0),\ b=f'(x_0),\ c=f(x_0)$.

220. a) Igaz, b) nem igaz. **221.** Egyik sem igaz. **222.** Egyik sem igaz.

223. $F''(x)=g'^2(x)f''(g(x))+g''(x)f'(g(x))$,
$F'''(x)=g'^3(x)f'''(g(x))+3g'(x)g''(x)f''(g(x))+g'''(x)f'(g(x))$.