4. Gyakorlat

Feladatok

Rekurzív sorozatok

1. Legyen $a_1 = 3$ és $a_{n+1} = \dfrac{10}{7 - a_n}$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

A sorozat első néhány tagja: $a_1 = 3$, $a_2 = \dfrac{10}{7-3} = 2.5$, $a_3 = \dfrac{10}{7-2.5} \approx 2.22$ stb.

(a) Igazoljuk, hogy $2 < a_n < 5$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

(b) Konvergens-e a sorozat? Ha igen, számítsuk ki a határértékét.

2.hf Legyen $a_1 = 2$ és $a_{n+1} = \sqrt{a_n - 2} + 4$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén.
Konvergens-e az (a_n) sorozat? Ha igen, számítsuk ki a határértékét.

3.hf Legyen $a_1 = 4$ és $a_{n+1} = 6 - \dfrac{5}{a_n}$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén.
(Ekkor $a_2 = 4.75$, $a_3 \approx 4.947, \ldots$.)
Konvergens-e az (a_n) sorozat? Ha igen, számítsuk ki a határértékét.

Az $(1 + x/n)^n \longrightarrow e^x$ határérték

Számítsuk ki a következő sorozatok határértékét.

1. a) $a_n = \left(\dfrac{4n^2+3}{4n^2+1}\right)^{6n^2}$ b) $b_n = \left(\dfrac{2n+3}{5n+6}\right)^{n+7}$ c) $c_n = \left(\dfrac{7n+1}{3n+2}\right)^{n}$

2. a) $a_n = \left(\dfrac{n^2+1}{n^2+4}\right)^{n^2}$ b) $b_n = \left(\dfrac{n^2+1}{n^2+4}\right)^{n}$ c) $c_n = \left(\dfrac{n^2+1}{n^2+4}\right)^{n^3}$

3.hf $a_n = \left(\dfrac{n^2+4}{n^2+2}\right)^{n^3}$

Torlódási pontok

Adjuk meg az alábbi sorozatok torlódási pontjainak halmazát, limesz inferiorját, illetve limesz szuperiorját. Konvergens-e a sorozat?

1. a) $a_n = n^{((-1)^n)}$ b) $a_n = \cos(n\pi)$ c) $a_n = \cos\left(n \cdot \dfrac{\pi}{2}\right)$

2.hf a) $a_n = \sqrt{n^2 + 3n} + (-1)^n \cdot \sqrt{n^2 + 5n + 3}$ b) $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{n^4 + (-1)^n \cdot n^4}{6n^2 - n + 5}}$

3. $a_n = (-1)^n \cdot \sqrt[n]{\dfrac{7n^2 - n}{n^3 + 3}}$

4. a) $a_n = \dfrac{(-3)^n + 8}{5 + 2^{2n+1}}$ b) $b_n = \dfrac{(-4)^n + 8}{5 + 2^{2n+1}}$

5.$^{\text{hf}}$ a) $a_n = \left(\dfrac{2n + (-1)^n}{2n + 3}\right)^n$ b) $a_n = \left(\dfrac{5 - n}{n + 2}\right)^n$

Komplex számok algebrai alakja

1. Számítsuk ki az alábbi mennyiségeket algebrai alakban:
$z_1 + z_2,\quad z_1 - z_2,\quad z_1 z_2,\quad \overline{z_1},\quad |z_2|,\quad \dfrac{z_1}{z_2},$
ha $z_1 = 5 + 3i$, $z_2 = 1 - 2i$.

2. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:
a) $2iz - 5 = 6z + i$
b)$^{\text{hf}}$ $4z - i = (2 + i)z + 8$
c) $2i\overline{z} - 5 = 6z + i$
d)$^{\text{hf}}$ $4\overline{z} + i = (5 + i)z + 1$

Nehezebb feladatok

3.* Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán:
a) $|z| - z = 1 + 2i$
b) $z^2 = \overline{z}$
c) $z^2 + (1 + i)\overline{z} + 4i = 0$

Megoldások

Rekurzív sorozatok

1. Legyen $a_1 = 3$ és $a_{n+1} = \dfrac{10}{7 - a_n}$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.
A sorozat első néhány tagja: $a_1 = 3$, $a_2 = \dfrac{10}{7-3} = 2.5$, $a_3 = \dfrac{10}{7 - 2.5} \approx 2.22$ stb.
(a) Igazoljuk, hogy $2 < a_n < 5$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.
(b) Konvergens-e a sorozat? Ha igen, számítsuk ki a határértékét.

Megoldás.
Korlátosság:
(a) Teljes indukcióval igazoljuk, hogy $2 < a_n < 5$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén.
(i) Az állítás igaz az $n = 1$ kezdőértékre, mivel $2 < a_1 = 3 < 5$.
(ii) Tegyük fel, hogy az állítás teljesül **valamely *n*-re**, azaz $2 < a_n < 5$.
(iii) Indukciós lépés: Igazolnunk kell, hogy ez a tulajdonság öröklődik a **rákövetkező pozitív egészre, (*n* + 1)-re** is, azaz $2 < a_{n+1} < 5$ is teljesül.

Ehhez az $2 < a_n < 5$ feltételből és az $a_{n+1} = \dfrac{10}{7 - a_n}$ képletből indulunk ki, és a képletben szereplő műveleteket hajtjuk végre olyan sorrendben, hogy a_n-ből a_{n+1}-et megkapjuk.

$2 < a_n < 5 \overset{\cdot(-1)}{\Longrightarrow} \quad -2 > -a_n > -5$ (negatív számmal szorozva, az egyenlőtlenség iránya megfordul)

$\overset{+7}{\Longrightarrow} \quad 7 - 2 > 7 - a_n > 7 - 5 \quad \Longrightarrow \quad 5 > 7 - a_n > 2$

$\overset{\text{reciprok}}{\Longrightarrow} \quad \dfrac{1}{5} < \dfrac{1}{7 - a_n} < \dfrac{1}{2}$ (pozitív számok reciprokát véve, az egyenlőtlenség iránya megfordul)

$\overset{\cdot 10}{\Longrightarrow} \quad \dfrac{10}{5} < \dfrac{10}{7 - a_n} < \dfrac{10}{2} \Longrightarrow 2 < a_{n+1} = \dfrac{10}{7 - a_n} < 5$

Így a teljes indukció elve alapján az állítás **minden *n* pozitív egészre** teljesül, azaz megmutattuk, hogy $2 < a_n < 5$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén.

Monotonitás:

(b) Az (a) részben beláttuk, hogy a sorozat korlátos. A konvergenciához a sorozat monotonitását fogjuk igazolni.

Az első néhány tag alapján a sejtésünk az, hogy a sorozat monoton csökkenő.

Teljes indukcióval igazoljuk, hogy az a_n sorozat monoton csökken, azaz $a_n > a_{n+1}$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén.

(i) Az állítás igaz $n = 1$-re, mivel $a_1 = 3 > a_2 = 2.5$.

(ii) Tegyük fel, hogy az állítás teljesül valamely n-re, azaz $a_n > a_{n+1}$.

(iii) Igazoljuk, hogy ekkor az állítás $(n + 1)$-re is igaz, azaz $a_{n+1} > a_{n+2}$.

$a_n > a_{n+1} \overset{\cdot(-1)}{\Longrightarrow} \quad -a_n < -a_{n+1}$ (negatív számmal szorozva, az egyenlőtlenség iránya megfordul)

$\overset{+7}{\Longrightarrow} \quad 7 - a_n < 7 - a_{n+1}$ (mivel $a_n < 5$, ezért $7 - a_n > 2 > 0$ az (a) rész miatt)

$\overset{\text{reciprok}}{\Longrightarrow} \quad \dfrac{1}{7 - a_n} > \dfrac{1}{7 - a_{n+1}}$ (pozitív számok reciprokát véve, az egyenlőtlenség iránya megfordul)

$\overset{\cdot 10}{\Longrightarrow} \quad a_{n+1} = \dfrac{10}{7 - a_n} > \dfrac{10}{7 - a_{n+1}} = a_{n+2}$

Így a teljes indukció elve alapján a sorozat monoton csökkenő.

A határérték:

Mivel a sorozat monoton csökkenő és (alulról) korlátos, ezért konvergens.

Jelöljük A-val a sorozat határértékét, azaz legyen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

Ekkor mindkét oldal határértékét véve, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10}{7 - a_n} = \dfrac{10}{7 - \lim_{n\to\infty} a_n} = \dfrac{10}{7 - A}$

Tehát $A = \dfrac{10}{7 - A} \iff A(7 - A) - 10 = 0 \iff A^2 - 7A + 10 = (A - 2)(A - 5) = 0$

$\iff A_1 = 2,\ A_2 = 5$

Mivel az első tag $a_1 = 3$ és a sorozat monoton csökkenő, ezért $A = 5$ nem lehet a határérték.

Így $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

2. Legyen $a_1 = 2$ és $a_{n+1} = \sqrt{a_n - 2} + 4$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén.
Konvergens-e az (a_n) sorozat? Ha igen, számítsuk ki a határértékét.

Megoldás. Konvergenciához a sorozat monotonitását és korlátosságát kell igazolnunk.
Mivel a feladat szövegében nincs alsó vagy felső korlát megadva, ezért első lépésként vizsgáljuk meg, milyen számok jöhetnek szóba határértékként, amiket aztán a korlátosság igazolásához is felhasználhatunk.

Lehetséges határértékek:
Ha létezik határérték, és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, akkor $A = \sqrt{A-2} + 4 \implies A - 4 = \sqrt{A-2}$
Mivel a négyzetgyök értéke nem lehet negatív, ezért $A - 4 \geq 0$, azaz $A \geq 4$.
Négyzetre emelve és rendezve:

$$A^2 - 9A + 18 = (A-3)(A-6) = 0 \iff A_1 = 3,\ A_2 = 6$$

Mivel láttuk, hogy $A \geq 4$, ezért határértékként csak $A = 6$ jöhet szóba
(de egyelőre még nem tudjuk, hogy létezik-e határérték).
Ellenőrzéssel is látható, hogy az $A = \sqrt{A-2} + 4$ egyenlet csak $A = 6$-ra teljesül.

Korlátosság:
Teljes indukcióval igazoljuk, hogy $a_n < 6$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén.
(i) Az állítás igaz $n = 1$-re, mivel $a_1 = 2 < 6$.
(ii) Tegyük fel, hogy valamely n-re $a_n < 6$.
(iii) Igazoljuk, hogy ekkor $a_{n+1} < 6$ is teljesül.
Ehhez az $a_n < 6$ feltételből és az $a_{n+1} = \sqrt{a_n - 2} + 4$ képletből indulunk ki:

$$\begin{aligned} a_n < 6 \quad & \overset{-2}{\implies} a_n - 2 < 6 - 2 = 4 \\ & \xRightarrow{\text{négyzetgyök}} \sqrt{a_n - 2} < \sqrt{4} = 2 \\ & \overset{+4}{\implies} a_{n+1} = \sqrt{a_n - 2} + 4 < 2 + 4 = 6 \end{aligned}$$

Így a teljes indukció elve alapján $a_n < 6$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén.

Monotonitás:
A sorozat első néhány tagja: $a_1 = 2$, $a_2 = \sqrt{2-2} + 4 = 4$, $a_3 = \sqrt{4-2} + 4 = \sqrt{2} + 4 \approx 5.41$
Teljes indukcióval igazoljuk, hogy az a_n sorozat monoton nő, azaz $a_n < a_{n+1}$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén.
(i) Az állítás igaz $n = 1$-re, mivel $a_1 = 2 < a_2 = 4$.
(ii) Tegyük fel, hogy az állítás teljesül valamely n-re, azaz $a_n < a_{n+1}$.
(iii) Igazoljuk, hogy ekkor az állítás $(n+1)$-re is igaz, azaz $a_{n+1} < a_{n+2}$.

$$\begin{aligned} a_n < a_{n+1} \quad & \overset{-2}{\implies} a_n - 2 < a_{n+1} - 2 \\ & \xRightarrow{\text{négyzetgyök}} \sqrt{a_n - 2} < \sqrt{a_{n+1} - 2} \\ & \overset{+4}{\implies} a_{n+1}\ \sqrt{a_n - 2} < \sqrt{a_{n+1} - 2} = a_{n+2} \end{aligned}$$

Így a teljes indukció elve alapján az a_n sorozat monoton növő.

Mivel a sorozat monoton növő és felülről korlátos, ezért konvergens, és határértéke $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 6$.

3. Legyen $a_1 = 4$ és $a_{n+1} = 6 - \dfrac{5}{a_n}$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén.
   (Ekkor $a_2 = 4.75$, $a_3 \approx 4.947, \ldots$.)
   Konvergens-e az (a_n) sorozat? Ha igen, számítsuk ki a határértékét.

Megoldás.

Lehetséges határértékek:

Ha létezik határérték, és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, akkor $A = 6 - \dfrac{5}{A} \iff A^2 - 6A + 5 = (A-1)(A-5) = 0$
$\iff A_1 = 1,\ A_2 = 5$.

Korlátosság:

Teljes indukcióval igazoljuk, hogy $1 < a_n < 5$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén.

(i) Az állítás igaz $n = 1$-re, mivel $1 < a_1 = 4 < 5$.

(ii) Tegyük fel, hogy valamely n-re $1 < a_n < 5$.

(iii) Igazoljuk, hogy ekkor $1 < a_{n+1} < 5$ is teljesül.

Ehhez az $1 < a_n < 5$ feltételből és az $a_{n+1} = 6 - \dfrac{5}{a_n}$ képletből indulunk ki:

$1 < a_n < 5 \overset{\text{reciprok}}{\Longrightarrow} 1 > \dfrac{1}{a_n} > \dfrac{1}{5}$ (pozitív számok reciprokát véve, az egyenlőtlenség iránya megfordul)

$\overset{\cdot 5}{\Longrightarrow} 5 > \dfrac{5}{a_n} > \dfrac{5}{5} = 1$

$\overset{\cdot(-1)}{\Longrightarrow} -5 < -\dfrac{5}{a_n} < -1$ (negatív számmal szorozva, az egyenlőtlenség iránya megfordul)

$\overset{+6}{\Longrightarrow} 6 - 5 < 6 - \dfrac{5}{a_n} < 6 - 1 \Longrightarrow 1 < a_{n+1} = 6 - \dfrac{5}{a_n} < 5$

Így a teljes indukció elve alapján $1 < a_n < 5$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén.

Monotonitás:

Teljes indukcióval igazoljuk, hogy az a_n sorozat monoton nő, azaz $a_n < a_{n+1}$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén.

(i) Az állítás igaz $n = 1$-re, mivel $a_1 = 4 < a_2 = 4.75$.

(ii) Tegyük fel, hogy az állítás teljesül valamely n-re, azaz $a_n < a_{n+1}$.

(iii) Igazoljuk, hogy ekkor az állítás $(n+1)$-re is igaz, azaz $a_{n+1} < a_{n+2}$.

$a_n < a_{n+1} \overset{\text{reciprok}}{\Longrightarrow} \dfrac{1}{a_n} > \dfrac{1}{a_{n+1}}$ (mivel az (a) rész alapján $a_n > 1 > 0$, ezért pozitív számok reciprokát véve, az egyenlőtlenség iránya megfordul)

$\overset{\cdot(-5)}{\Longrightarrow} -\dfrac{5}{a_n} < -\dfrac{5}{a_{n+1}}$ (negatív számmal szorozva, az egyenlőtlenség iránya megfordul)

$\overset{+6}{\Longrightarrow} a_{n+1} = 6 - \dfrac{5}{a_n} < 6 - \dfrac{5}{a_{n+1}} = a_{n+2}$

Így a teljes indukció elve alapján az a_n sorozat monoton növő.

Mivel az a_n sorozat monoton növő és felülről korlátos, ezért konvergens.
Mivel $a_1 = 4$, és a sorozat monoton növő, ezért $A = 1$ nem lehet a határérték. Így $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 5$.

Az $(1 + x/n)^n \longrightarrow e^x$ határérték

1. a) $a_n = \left(\frac{4n^2+3}{4n^2+1}\right)^{6n^2}$ b) $b_n = \left(\frac{2n+3}{5n+6}\right)^{n+7}$ c) $c_n = \left(\frac{7n+1}{3n+2}\right)^n$

Megoldás.

a) $a_n = \left(\frac{4n^2+3}{4n^2+1}\right)^{6n^2} = \left(\frac{1+\frac{3}{4n^2}}{1+\frac{3}{4n^2}}\right)^{6n^2} = \frac{\left(\left(1+\frac{3}{4n^2}\right)^{n^2}\right)^6}{\left(\left(1+\frac{1}{4n^2}\right)^{n^2}\right)^6} \longrightarrow \frac{\left(e^{\frac{3}{4}}\right)^6}{\left(e^{\frac{1}{4}}\right)^6} = \frac{e^{\frac{18}{4}}}{e^{\frac{6}{4}}} = e^{\frac{18}{4}-\frac{6}{4}} = e^3$

b) 1. megoldás

Mivel $\frac{2n+3}{5n+6} \longrightarrow \frac{2}{5} < 1$, továbbá tudjuk, hogy $a^n \longrightarrow 0$, ha $|a| < 1$,
ezért a sejtés az, hogy $b_n \longrightarrow 0$. Ez a rendőrelvvel igazolható.

Legyen q olyan pozitív szám, melyre $0 < \frac{2}{5} < q < 1$. (Pl. $q = 0.5$ vagy $q = 0.9$ stb.)
Ekkor a határérték definíciója alapján az a_n sorozat tagjai elég nagy indexekre 0 és q közé fognak esni, azaz van olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy ha $n > N$, akkor $0 < \frac{2n+3}{5n+6} < q < 1$

$\Longrightarrow\ 0 < b_n = \left(\frac{2n+3}{5n+6}\right)^{n+7} < q^{n+7} = q^7 \cdot q^n \longrightarrow 0.$

Így a rendőrelv miatt $b_n \longrightarrow 0$.

b) 2. megoldás

$$b_n = \left(\frac{2n+3}{5n+6}\right)^{n+7} = \frac{\left(2n\left(1+\frac{3}{2n}\right)\right)^{n+7}}{\left(5n\left(1+\frac{6}{5n}\right)\right)^{n+7}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{n+7} \cdot \frac{\left(1+\frac{3}{2n}\right)^n}{\left(1+\frac{6}{5n}\right)^n} \cdot \frac{\left(1+\frac{3}{2n}\right)^7}{\left(1+\frac{6}{5n}\right)^7} \longrightarrow 0 \cdot \frac{e^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{6}{5}}} \cdot \frac{1}{1} = 0$$

c) Mivel $\frac{7n+1}{3n+2} \longrightarrow \frac{7}{3} > 1$, továbbá tudjuk, hogy $a^n \longrightarrow \infty$, ha $a > 1$,
ezért a sejtés az, hogy $c_n \longrightarrow \infty$. Ez a speciális rendőrelvvel igazolható, azaz alulról becsüljük a c_n sorozat tagjait egy végtelenbe tartó sorozat tagjaival.

$c_n = \left(\frac{7n+1}{3n+2}\right)^n \geq \left(\frac{7n+0}{3n+2n}\right)^n = \left(\frac{7}{5}\right)^n \longrightarrow \infty$, ezért $c_n \longrightarrow \infty$.

2. a) $a_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2+4}\right)^{n^2}$ b) $b_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2+4}\right)^n$ c) $c_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2+4}\right)^{n^3}$

Megoldás. a) $a_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2+4}\right)^{n^2} = \frac{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{4}{n^2}\right)^{n^2}} \longrightarrow \frac{e}{e^4} = \frac{1}{e^3}$

b) A b_n sorozat tagjait az a_n sorozat tagjaiból n-edik gyökvonással kapjuk: $b_n = \sqrt[n]{a_n}$.
Mivel az a_n sorozat határértéke egy pozitív szám $\left(a_n \longrightarrow \frac{1}{e^3}\right)$, ezért a tagjait elég nagy indexre közrefoghatjuk alulról és felülről is egy-egy rögzített pozitív számmal.
Azaz, a határérték definíciója alapján létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy ha $n > N$, akkor
például $\frac{1}{2\,e^3} < a_n < 1 \Longrightarrow \sqrt[n]{\frac{1}{2\,e^3}} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{1} \Longrightarrow \sqrt[n]{\frac{1}{2\,e^3}} < b_n < 1.$
Mivel $\sqrt[n]{\frac{1}{2\,e^3}} \longrightarrow 1$, ezért a rendőrelv alapján $b_n \longrightarrow 1$.

Megjegyzés: Ebben a példában nem lényeges, hogy az a_n határértéke 1-nél nagyobb vagy kisebb, csak azt használtuk ki, hogy pozitív. Az $\frac{1}{2\,e^3}$ és 1 helyett bármely más A és B pozitív számokat is írhatunk, ahol $0 < A < \frac{1}{e^3} < B$.

c) A c_n sorozat tagjait az a_n sorozat tagjaiból n-edik hatványra emeléssel kapjuk: $c_n = (a_n)^n$.
Mivel az a_n sorozat egy 1-nél kisebb számhoz tart $\left(a_n \longrightarrow \frac{1}{e^3}\right)$, és tudjuk, hogy $a^n \longrightarrow 0$, ha $|a| < 1$, ezért a sejtés az, hogy $c_n \longrightarrow 0$. Ez a rendőrelvvel igazolható.

Legyen q olyan pozitív szám, melyre $0 < \frac{1}{e^3} < q < 1$. $\left(\text{Pl. } q = \frac{1}{8},\ q = \frac{1}{2},\ q = 0.9 \text{ stb.}\right)$
Ekkor a határérték definíciója alapján az a_n sorozat tagjai elég nagy indexekre 0 és q közé fognak esni, azaz van olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy ha $n > N$, akkor $0 < a_n < q < 1$
$\Longrightarrow\ 0 < (a_n)^n = c_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2+4}\right)^{n^3} < q^n \longrightarrow 0,$
így a rendőrelv alapján $c_n \longrightarrow 0$.

3. $a_n = \left(\frac{n^2+4}{n^2+2}\right)^{n^3}$

Megoldás. Legyen $b_n = \left(\frac{n^2+4}{n^2+2}\right)^{n^2}$, ekkor $a_n = (b_n)^n$ és $b_n = \frac{\left(1+\frac{4}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{n^2}} \longrightarrow \frac{e^4}{e^2} = e^2$.
Mivel a b_n sorozat egy 1-nél nagyobb számhoz tart, továbbá tudjuk, hogy $a^n \longrightarrow \infty$, ha $a > 1$, ezért a sejtés az, hogy $a_n \longrightarrow \infty$. Ez a speciális rendőrelvvel igazolható, azaz alulról becsüljük a c_n sorozat tagjait egy végtelenbe tartó sorozat tagjaival.

Legyen q egy olyan pozitív szám, ami 1 és e^2 közé esik, azaz $1 < q < e^2$, pl. $q = 2$.
Mivel $b_n \longrightarrow e^2$, ezért a határérték definíciója alapján létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy ha $n > N$, akkor $b_n > 2$. Így elég nagy n indexekre $a_n = (b_n)^n > 2^n$. Mivel $2^n \longrightarrow \infty$, ezért $a_n \longrightarrow \infty$.

Torlódási pontok

1. a) $a_n = n^{\left((-1)^n\right)}$

Megoldás.
a) Ha n is páros, akkor $(-1)^n = 1$, így $a_n = n^1 = n \longrightarrow \infty$.

Ha n is páratlan, akkor $(-1)^n = -1$, így $a_n = n^{-1} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$.

$\Longrightarrow$ torlódási pontok: 0, ∞

$\Longrightarrow$ $\liminf a_n = 0$, $\limsup a_n = \infty$

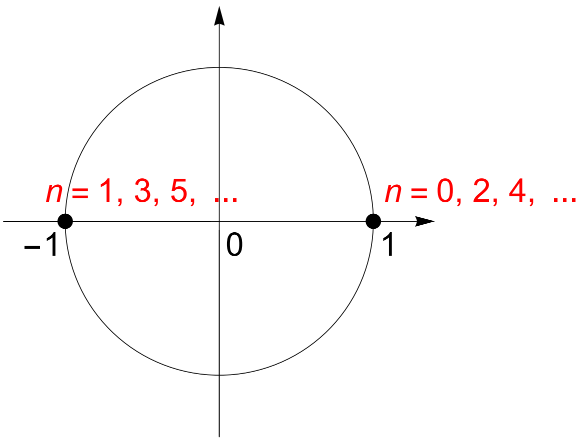
$\Longrightarrow$ az a_n sorozat divergens, mivel $\liminf a_n \neq \limsup a_n$

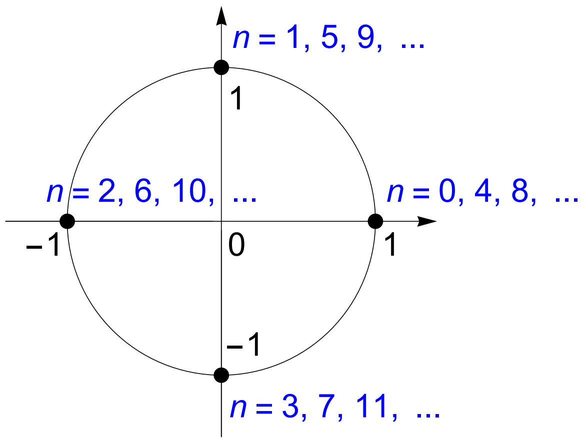
1\. b) $a_n = \cos(n\,\pi)$ c) $a_n = \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$

Megoldás.

b) $a_n = \cos(n\,\pi) = \begin{cases} 1, & \text{ha } n = 0, 2, 4, \ldots \\ -1, & \text{ha } n = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}$

c) $a_n = \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 1, & \text{ha } n = 0, 4, 8, \ldots \\ 0, & \text{ha } n = 1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots \\ -1, & \text{ha } n = 2, 6, 10, \ldots \end{cases}$





$\Longrightarrow$ torlódási pontok: -1, 1

$\Longrightarrow$ $\liminf a_n = -1$, $\limsup a_n = 1$

$\Longrightarrow$ az a_n sorozat divergens, mivel $\liminf a_n \neq \limsup a_n$

$\Longrightarrow$ torlódási pontok: -1, 0, 1

$\Longrightarrow$ $\liminf a_n = -1$, $\limsup a_n = 1$

$\Longrightarrow$ az a_n sorozat divergens, mivel $\liminf a_n \neq \limsup a_n$

2\. a) $a_n = \sqrt{n^2 + 3\,n} + (-1)^n \cdot \sqrt{n^2 + 5\,n + 3}$

Megoldás.

Ha n is páros, akkor $(-1)^n = 1$, így $a_n = \sqrt{n^2 + 3\,n} + \sqrt{n^2 + 5\,n + 3} = \infty + \infty = \infty$.

Ha n is páratlan, akkor $(-1)^n = -1$, így $a_n = \alpha - \beta = (\alpha - \beta) \cdot \frac{\alpha + \beta}{\alpha + \beta} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha + \beta}$ átalakítással:

$$a_n = \left(\sqrt{n^2 + 3\,n} - \sqrt{n^2 + 5\,n + 3}\right) \cdot \frac{\sqrt{n^2 + 3\,n} + \sqrt{n^2 + 5\,n + 3}}{\sqrt{n^2 + 3\,n} + \sqrt{n^2 + 5\,n + 3}} =$$

$$= \frac{(n^2 + 3\,n) - (n^2 + 5\,n + 3)}{\sqrt{n^2 + 3\,n} + \sqrt{n^2 + 5\,n + 3}} = \frac{-2\,n - 3}{\sqrt{n^2\left(1 + \frac{3}{n}\right)} + \sqrt{n^2\left(1 + \frac{5}{n} + \frac{3}{n^2}\right)}} =$$

$$= \frac{n}{\sqrt{n^2}} \cdot \frac{-2 - \frac{3}{n}}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + \sqrt{1 + \frac{5}{n} + \frac{3}{n^2}}} \longrightarrow \frac{-2 - 0}{\sqrt{1 + 0} + \sqrt{1 + 0 + 0}} = -1$$

$\Longrightarrow$ torlódási pontok: -1, ∞

$\Longrightarrow$ $\liminf a_n = -1$, $\limsup a_n = \infty$

$\Longrightarrow$ az a_n sorozat divergens, mivel $\liminf a_n \neq \limsup a_n$

2. b) $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{n^4 + (-1)^n \cdot n^4}{6\,n^2 - n + 5}}$

Megoldás. Ha n is páratlan, akkor $(-1)^n = -1$, így $a_n = 0$.

Ha n is páros, akkor $(-1)^n = 1$, így $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{2\,n^4}{6\,n^2 - n + 5}}$.

Az alábbiakben felhasználjuk a rendőrelvet, illetve hogy $\sqrt[n]{a} \longrightarrow 1$ és $\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$.

Felső becslés (a számlálót növeljük, a nevezőt csökkentjük):

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{\mathbf{2\,n^4}}{\mathbf{6\,n^2} - n + 5}} \leq \sqrt[n]{\frac{\mathbf{2\,n^4}}{\mathbf{6\,n^2} - n^2 + 0}} = \sqrt[n]{\frac{2\,n^2}{5}} = \sqrt[n]{\frac{2}{5}} \cdot \left(\sqrt[n]{n}\right)^2 \longrightarrow 1 \cdot 1^2 = 1$$

Alsó becslés (a számlálót csökkentjük, a nevezőt növeljük):

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{\mathbf{2\,n^4}}{\mathbf{6\,n^2} - n + 5}} \geq \sqrt[n]{\frac{\mathbf{2\,n^4}}{\mathbf{6\,n^2} + 0 + 5\,n^2}} = \sqrt[n]{\frac{2\,n^2}{11}} = \sqrt[n]{\frac{2}{11}} \cdot \left(\sqrt[n]{n}\right)^2 \longrightarrow 1 \cdot 1^2 = 1$$

Így a rendőrelv alapján páros n-re $a_n \longrightarrow 1$.

$\Longrightarrow$ torlódási pontok: 0, 1
$\Longrightarrow$ $\liminf a_n = 0$, $\limsup a_n = 1$
$\Longrightarrow$ az a_n sorozat divergens, mivel $\liminf a_n \neq \limsup a_n$

3. $a_n = (-1)^n \cdot \sqrt[n]{\dfrac{7\,n^2 - n}{n^3 + 3}}$

Megoldás. Legyen $b_n = \sqrt[n]{\dfrac{7\,n^2 - n}{n^3 + 3}}$.

Felső becslés:

$$b_n = \sqrt[n]{\frac{7\,n^2 - n}{n^3 + 3}} \leq \sqrt[n]{\frac{7\,n^2 + 0}{n^3 + 3\,n^3}} = \sqrt[n]{\frac{7}{4\,n}} = \sqrt[n]{\frac{7}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \longrightarrow 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$$

Alsó becslés:

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{7\,n^2 - n}{n^3 + 3}} \geq \sqrt[n]{\frac{7\,n^2 - n^2}{n^3 + 3\,n^3}} = \sqrt[n]{\frac{6}{4\,n}} = \sqrt[n]{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \longrightarrow 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$$

így a rendőrelv alapján $b_n \longrightarrow 1$.

Ha n páros, akkor $(-1)^n = 1$, így $a_n = b_n \longrightarrow 1$.
Ha n páratlan, akkor $(-1)^n = -1$, így $a_n = -b_n \longrightarrow -1$.

$\Longrightarrow$ torlódási pontok: -1, 1
$\Longrightarrow$ $\liminf a_n = -1$, $\limsup a_n = 1$
$\Longrightarrow$ az a_n sorozat divergens, mivel $\liminf a_n \neq \limsup a_n$

4. a) $a_n = \dfrac{(-3)^n + 8}{5 + 2^{2n+1}}$ b) $b_n = \dfrac{(-4)^n + 8}{5 + 2^{2n+1}}$

Megoldás.

a) $a_n = \dfrac{(-3)^n + 8}{5 + 2^{2n+1}} = \dfrac{(-3)^n + 8}{5 + 2 \cdot 4^n} = \left(-\dfrac{3}{4}\right)^n \cdot \dfrac{1 + 8 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n + 2} \longrightarrow 0 \cdot \dfrac{1+0}{0+2} = 0$

$\Longrightarrow$ torlódási pont: 0

$\Longrightarrow$ $\liminf a_n = \limsup a_n = 0$

$\Longrightarrow$ az a_n sorozat konvergens

b) $a_n = \dfrac{(-4)^n + 8}{5 + 2^{2n+1}} = \dfrac{(-4)^n + 8}{5 + 2 \cdot 4^n} = \left(-\dfrac{4}{4}\right)^n \cdot \dfrac{1 + 8 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^n}{5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n + 2} = (-1)^n \cdot \dfrac{1 + 8 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^n}{5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n + 2}$

Ha n páros, akkor $(-1)^n = 1$, így $a_n \longrightarrow 1 \cdot \dfrac{1+0}{0+2} = \dfrac{1}{2}$

Ha n páratlan, akkor $(-1)^n = -1$, így $a_n \longrightarrow -1 \cdot \dfrac{1+0}{0+2} = -\dfrac{1}{2}$

$\Longrightarrow$ torlódási pontok: $\dfrac{1}{2}$, $-\dfrac{1}{2}$

$\Longrightarrow$ $\liminf a_n = -\dfrac{1}{2}$, $\limsup a_n = \dfrac{1}{2}$

$\Longrightarrow$ az a_n sorozat divergens, mivel $\liminf a_n \neq \limsup a_n$

5. a) $a_n = \left(\dfrac{2n + (-1)^n}{2n+3}\right)^{n+6}$

Megoldás.

Ha n páros, akkor $(-1)^n = 1$, így $a_n = \left(\dfrac{2n+1}{2n+3}\right)^{n+6} = \dfrac{\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n}{\left(1 + \frac{3}{2n}\right)^n} \cdot \dfrac{\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^6}{\left(1 + \frac{3}{2n}\right)^6} \longrightarrow \dfrac{e^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{3}{2}}} \cdot \dfrac{1}{1} = e^{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}} = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

Ha n páratlan, akkor $(-1)^n = -1$, így $a_n = \left(\dfrac{2n-1}{2n+3}\right)^{n+6} = \dfrac{\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n}{\left(1 + \frac{3}{2n}\right)^n} \cdot \dfrac{\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^6}{\left(1 + \frac{3}{2n}\right)^6} \longrightarrow \dfrac{e^{-\frac{1}{2}}}{e^{\frac{3}{2}}} \cdot \dfrac{1}{1} = e^{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}} = e^{-3} = \dfrac{1}{e^3}$

$\Longrightarrow$ torlódási pontok: $\dfrac{1}{e^3}$, $\dfrac{1}{e}$

$\Longrightarrow$ $\liminf a_n = \dfrac{1}{e^3}$, $\limsup a_n = \dfrac{1}{e}$

$\Longrightarrow$ az a_n sorozat divergens, mivel $\liminf a_n \neq \limsup a_n$

5. b) $a_n = \left(\dfrac{5-n}{n+2}\right)^n$

Megoldás. $a_n = \left(\dfrac{5-n}{n+2}\right)^n = \left(\dfrac{(-1) \cdot (n-5)}{n+2}\right)^n = (-1)^n \cdot \left(\dfrac{n-5}{n+2}\right)^n$

Ha n páros, akkor $(-1)^n = 1$, így $a_n = 1 \cdot \left(\dfrac{n-5}{n+2}\right)^n = \dfrac{\left(1 - \frac{5}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n} \longrightarrow \dfrac{e^{-5}}{e^2} = \dfrac{1}{e^7}$

Ha n páratlan, akkor $(-1)^n = -1$, így $a_n = -1 \cdot \left(\frac{n-5}{n+2}\right)^n = -\frac{\left(1-\frac{5}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} \longrightarrow -\frac{e^{-5}}{e^2} = -\frac{1}{e^7}$

$\Longrightarrow$ torlódási pontok: $-\frac{1}{e^7}$, $\frac{1}{e^7}$

$\Longrightarrow$ $\liminf a_n = -\frac{1}{e^7}$, $\limsup a_n = \frac{1}{e^7}$

$\Longrightarrow$ az a_n sorozat divergens, mivel $\liminf a_n \neq \limsup a_n$

Komplex számok algebrai alakja

1. Számítsuk ki az alábbi mennyiségeket algebrai alakban:

$z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$, $\overline{z_1}$, $|z_2|$, $\frac{z_1}{z_2}$,

ha $z_1 = 5 + 3i$, $z_2 = 1 - 2i$.

Eredmények:

$z_1 + z_2 = 6 + i$ $\quad\overline{z_1} = 5 - 3i$

$z_1 - z_2 = 4 + 5i$ $\quad |z_2| = \sqrt{5}$

$z_1 z_2 = 11 - 7i$ $\quad \frac{z_1}{z_2} = -\frac{1}{5} + \frac{13i}{5}$

2. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

a) $2iz - 5 = 6z + i$

b) $4z - i = (2+i)z + 8$

c) $2i\overline{z} - 5 = 6z + i$

d) $4\overline{z} + i = (5+i)z + 1$

Eredmények:

a) $z = -\frac{7}{10} - \frac{2i}{5}$ $\qquad$ b) $z = 3 + 2i$

c) $z = -1 - \frac{i}{2}$ $\qquad$ d) $z = -\frac{4}{5} + \frac{i}{5}$

Nehezebb feladatok

3.* a) $|z| - z = 1 + 2i$

Megoldás. Legyen $z = x + yi$, ahol $x, y \in \mathbb{R}$. Ekkor $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, így az egyenlet:

$$|z| - z = 1 + 2i \iff \sqrt{x^2+y^2} - (x + yi) = 1 + 2i$$
$$\iff \left(\sqrt{x^2+y^2} - x\right) - yi = 1 + 2i$$

Két komplex szám pontosan akkor egyenlő, ha a valós képzetes részük is egyenlő, így a fenti egyenlet a következő egyenletrendszerrel ekvivalens:

(1) $\sqrt{x^2+y^2} - x = 1$

(2) $-y = 2$

Innen $y = -2$, így az első egyenletből $\sqrt{x^2+4} - x = 1 \implies \sqrt{x^2+4} = x+1$.
Mivel $\sqrt{x^2+4} \geq 0$, ezért $x+1 \geq 0$, azaz $x \geq -1$. Négyzetre emelve és rendezve:
$x^2+4 = x^2+2x+1 \implies 2x = 3 \implies x = \frac{3}{2}$, erre teljesül az előző feltétel.
A feladat megoldása: $z = \frac{3}{2} - 2i$.

3.* b) $z^2 = \overline{z}$

Megoldás. Legyen $z = x + y\,i$, ahol $x, y \in \mathbb{R}$. Ekkor
- $z^2 = (x+y\,i)^2 = x^2 + 2\,x\,y\,i + y^2\,i^2 = (x^2 - y^2) + 2\,x\,y\,i$
- $\overline{z} = x - y\,i$

Így az egyenlet:
$$z^2 = \overline{z} \iff (x^2-y^2) + 2\,x\,y\,i = x - y\,i$$
$$\iff (x^2-y^2) + 2\,x\,y\,i - x + y\,i = 0$$
Egy komplex szám pontosan akkor 0, ha valós és képzetes része is 0, így a fenti egyenlet a következő egyenletrendszerrel ekvivalens:
(1) $(x^2-y^2) - x = 0$
(2) $2\,x\,y + y = 0$

A (2) egyenletet alakítsuk szorzattá: $y(2\,x+1) = 0$

Egy szorzat pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, így két esetet vizsgálunk.
1. eset: ha $y = 0$, akkor ezt az (1) egyenletbe helyettesítve:
$$(x^2-y^2) - x = 0 \implies x^2 - x = x(x-1) = 0$$
Innen $x_1 = 0$ és $x_2 = 1$, így ebben az esetben két komplex megoldást kapunk:
$z_1 = 0 + 0 \cdot i = 0$ és $z_2 = 1 + 0 \cdot i = 1$.

2. eset: ha $2\,x+1 = 0$, akkor $x = -\frac{1}{2}$. Ezt az (1) egyenletbe helyettesítve:
$$(x^2-y^2) - x = 0 \implies \frac{1}{4} - y^2 + \frac{1}{2} = 0 \implies y^2 = \frac{3}{4}$$
Innen $y_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, így ebben az esetben is két komplex megoldást kapunk:
$z_3 = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ és $z_4 = -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$.

A feladat megoldása: $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_4 = -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3.* c) $z^2 + (1+i)\,\overline{z} + 4\,i = 0$

Megoldás. Legyen $z = x + y\,i$, ahol $x, y \in \mathbb{R}$. Ekkor
- $z^2 = (x+y\,i)^2 = x^2 + 2\,x\,y\,i + y^2\,i^2 = (x^2 - y^2) + 2\,x\,y\,i$

- $(1+i)\overline{z} = (1+i)(x-\ y\,i) = x - y\,i^2 + x\,i - y\,i = (x+y) + (x-y)\,i$

Így az egyenlet:

$$z^2 + (1+i)\overline{z} + 4\,i = 0 \iff (x^2 - y^2) + 2\,x\,y\,i + (x+y) + (x-y)\,i + 4\,i = 0$$

Egy komplex szám pontosan akkor 0, ha valós és képzetes része is 0, így a fenti egyenlet a következő egyenletrendszerrel ekvivalens:

(1) $(x^2 - y^2) + (x+y) = 0$

(2) $2\,x\,y + (x-y) + 4 = 0$

Az (1) egyenletet alakítsuk szorzattá: $(x-y)(x+y) + (x+y) = 0$

$$(x+y)(x-y+1) = 0$$

Egy szorzat pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, így két esetet vizsgálunk.

1. eset: ha $x+y=0$, akkor $y=-x$. Ezt a (2) egyenletbe helyettesítve:

$$2\,x\,y + (x-y) + 4 = 0 \implies 2\,x(-x) + (x+x) + 4 = 0$$
$$-2\,x^2 + 2\,x + 4 = 0$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$(x-2)(x+1) = 0$$

E másodfokú egyenlet gyökei $x_1 = 2$ és $x_2 = -1$, ahonnan $y_1 = -2$ és $y_2 = 1$, így ebben az esetben két komplex megoldást kapunk: $z_1 = 2 - 2\,i$ és $z_2 = -1 + i$.

2. eset: ha $x - y + 1 = 0$, akkor $y = x + 1$. Ezt a (2) egyenletbe helyettesítve:

$$2\,x\,y + (x-y) + 4 = 0 \implies 2\,x(x+1) + (x-(x+1)) + 4 = 0$$
$$2\,x^2 + 2\,x - 1 + 4 = 0$$
$$2\,x^2 + 2\,x + 3 = 0$$

E másodfokú egyenlet diszkriminánsa negatív: $D = 2^2 - 4\cdot 2\cdot 3 = -20 < 0$, így az egyenletnek nincs valós gyöke. Mivel x valós szám, ezért ebben az esetben nem kapunk megoldást.

A feladat megoldása: $z_1 = 2 - 2\,i$ és $z_2 = -1 + i$.