7. gyakorlat

Deriválási szabályok

Deriváljuk a következő függvényeket:

1)

a) $f(x) = x^7 + \frac{1}{x^{111}}$ b) $f(x) = x^{-7} \cdot \sqrt[5]{x}$ c) $f(x) = \left(1 + x^2\right) e^x$ d) $f(x) = x^3 \sin x$

e) $f(x) = x \sin x \cos x$ f) $f(x) = \operatorname{tg} x$ g) $f(x) = \operatorname{ctg} x$ h) $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^4 + 1}$

i) $f(x) = \frac{\cos x}{x^3}$ j) $f(x) = \frac{\sin x}{x + \cos x}$ k) $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^7 + 2x + 1}$ l) $f(x) = \operatorname{sgn} x$

2)

a) $f(x) = \left(1 + x^2\right)^4$ b) $f(x) = \left(x^3 - 3x + 8\right)^7$ c) $f(x) = \sqrt{1 + x^6}$ d) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{1 + 2x^2}}$

e) $f(x) = \sin\left(x^2\right)$ f) $f(x) = (\sin x)^3$ g) $f(x) = \sin^3\left(x^2\right)$ h) $f(x) = \cos^2(2x + 3)$

i) $f(x) = x e^{3x} - e^{-x^2}$ j) $f(x) = \sqrt{1 + e^{3x}}$ k) $f(x) = \left(\cos^3(x) + 3\right)^5$ l) $f(x) = 2^x$

m) $f(x) = \ln x + \log_3 x$ n) $f(x) = \ln\left(x^2 + 1\right)$ o) $f(x) = x^x$ p) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$

3)$^{\text{hf}}$ További gyakorló feladatok:
https://math.bme.hu/~nagyi/analizis1/derivalas.pdf

Deriválási szabályok + definíció alkalmazása

4) Legyen $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Mutassuk meg, hogy $f'(0)$ nem létezik.

5) Legyen $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot \sin\left(\sqrt[3]{x^2}\right)$. Mivel egyenlő $f'(x)$? Az $x = 0$-ban alkalmazzuk a definíciót.

6)* Legyen $f(x) = \sqrt[5]{x^3 \cdot \operatorname{tg}\left(5x^2\right)}$, ahol $|x| < \frac{1}{5}$.

a) Mivle egyenlő $f'(x)$, ha $x \neq 0$?

b) Mivel egyenlő $f'(0)$? Alkalmazzuk a definíciót.

7)* Legyen $f(x) = |x - 1| \cdot \sin(2x - 2)$. Mivel egyenlő $f'(x)$?

Paraméteres feladatok

8) Adjuk meg az a és b paraméterek értékét úgy, hogy az alábbi függvények minden x valós szám esetén deriválhatók legyenek:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3x - 1}, & \text{ha } x \geq 1 \\ a x + b, & \text{ha } x < 1 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x^2 + 1}, & \text{ha } x \geq 1 \\ b x^4 + 1, & \text{ha } x < 1 \end{cases}$

c)$^{\text{hf}}$ $f(x) = \begin{cases} \cos(\pi x), & \text{ha } x \geq 1 \\ a x^6 + b x^4 + x^2, & \text{ha } x < 1 \end{cases}$

Fizikai példák

9) Jelölje $x(t)$ egy szabadon eső test magasságát a $t \in \mathbb{R}$ idő függvényében. Ekkor a test sebessége $x'(t)$, gyorsulása $x''(t)$. Ha a légellenállástól eltekintünk, akkor Newton II. törvénye alapján a test mozgásegyenlete $m\,x''(t) = -m\,g$, ahol m a test tömege, g a gravitációs gyorsulás, $-m\,g$ a nehézségi erő. Mutassuk meg, hogy minden $h_0, v_0 \in \mathbb{R}$ esetén az

$$x(t) = -\frac{g}{2}\,t^2 + v_0\,t + h_0$$

függvényre teljesül az $x''(t) = -g$ egyenlet és az $x(0) = h_0$, $x'(0) = v_0$ ún. kezdeti feltételek, ahol h_0 a test magassága, v_0 pedig a test kezdősebessége a $t = 0$ időpontban.

10) Ha a Holdon felfelé elhajítanánk egy követ $v_0 = 24\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ kezdősebességgel, akkor t másodperc múlva $x(t) = -0.8\,t^2 + 24\,t$ méter magasan lenne.

a) Írjuk fel a kő sebességét az idő függvényében.

b) Milyen magasra repül a kő?

c) Mekkora a Holdon a gravitációs gyorsulás?

d) Mennyi idő alatt esik vissza?

11) A sütőből kivett pizza hőmérsékletét az idő függvényében az $y(t) = K + c\cdot e^{-\alpha\,t}$ függvény adja meg, ahol a t időt percben mérjük. K, c és α pozitív konstansok, K a környezet hőmérséklete °C-ban, α a lehűlés sebességére jellemző állandó.

a) Igazoljuk, hogy erre a függvényre teljesül az alábbi egyenlet:

$$y'(t) = \alpha(K - y(t)).$$

Ez az egyenlet a **Newton-féle lehűlési törvény** alapján azt fejezi ki, hogy egy test lehűlési sebessége egyenesen arányos a környezet és a test hőmérsékletének különbségével.

b) Ha a pizza kezdetben (azaz a $t = 0$ időpontban) 120 °C-os, a levegő $K = 30$ °C-os és $\alpha = 0.0366$, akkor mekkora lesz a pizza hőmérséklete 60 perc múlva?

Eredmények

4)-6) feladatok: 4.3 fejezet 9-12. feladatok
https://math.bme.hu/~tasnadi/merninf_anal_1/anal1_gyak.pdf

8. a) $a = -\frac{3}{4},\ b = \frac{5}{4}$ b) $a = \frac{8}{5},\ b = -\frac{1}{5}$ c) $a = 3,\ b = -5$

10. a) A kő sebessége $v(t) = x'(t) = -1.6\,t + 24$ (m/s)

b) A kő addig repül felfelé, amíg a sebessége nulla nem lesz, azaz

$$x'(t) = -1.6\,t + 24 = 0 \implies t = \frac{24}{1.6} = 15 \text{ (s)}$$

Ezt az időt visszahelyettesítve a magasságot megadó függvénybe, megkapjuk a maximális magasságot: $x(15) = -0.8\cdot 15^2 + 24\cdot 15 = 180$ (m)

c) A test mozgásegyenlete $x(t) = -0.8\,t^2 + 24\,t = -\frac{g}{2}\,t^2 + v_0\,t + h_0$, ahol $h_0 = 0$, így
a Holdon a gravitációs gyorsulás $g = 1.6\,(\mathrm{m}/s^2)$.

d) Mivel a kő 15 másodpercig emelkedett, ezért 30 másodperc alatt esik vissza.
Vagy másképp: a kő akkor érkezik vissza, amikor a magassága nulla lesz, azaz
$x(t) = -0.8\,t^2 + 24\,t = t(-0.8\,t + 24) = 0$
E másodfokú egyenlet gyökei $t = 0$ és $t = 30$, azaz 30 másodperc múlva esik vissza a kő.

11. a) Az $y(t) = K + c \cdot e^{-\alpha\,t}$ függvényt helyettesítsük be az $y'(t) = \alpha(K - y(t))$ egyenletbe:
- A bal oldal: $y'(t) = 0 + c \cdot (-\alpha) \cdot e^{-\alpha\,t}$
- A jobb oldal: $\alpha(K - y(t)) = \alpha\big(K - \big(K + c \cdot e^{-\alpha\,t}\big)\big) = \alpha \cdot (-c) \cdot e^{-\alpha\,t}$

Látható, hogy mindkét oldal értéke $-\alpha \cdot c \cdot e^{-\alpha\,t}$, így az $y(t)$ függvényre teljesül a megadott egyenlet.

b) $y(0) = 120 = 30 + c \cdot e^{-0.0366 \cdot 0} \implies c = 90 \implies y(60) = 30 + 90 \cdot e^{-0.0366 \cdot 60} \approx 40\ (°\mathrm{C})$.