8. gyakorlat

Elemi függvények és inverzeik

1. Legyen $f(x) = 3\pi - 2\arcsin(3 - 2x)$
   a) Adjuk meg az f függvény értelmezési tartományát (D_f), értékkészletét (R_f) és deriváltját ($f'(x)$).
   b) Írjuk fel az $x_0 = \frac{7}{4}$ pontbeli érintőegyenes egyenletét.
   c) Indokoljuk meg, hogy f-nek létezik az f^{-1} inverze.
   $f^{-1}(x) = ?$, $D_{f^{-1}} = ?$, $R_{f^{-1}} = ?$

2. Hol és milyen típusú szakadása van az alábbi függvényeknek?
   a) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$ b) $f(x) = x \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$ c) $f(x) = x \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x(x-1)}\right)$

3.hf Legyen $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{ha } x \neq 0 \\ a, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$ és $g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{ha } x \neq 0 \\ b, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$

   a) Határozzuk meg az a és b paraméterek értékét úgy, hogy f és g folytonos legyen $x = 0$-ban.
   b) A definíció alapján határozzuk meg $f'(0)$ és $g'(0)$ értékét.

4.* Legyen $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) & \text{ha } x \neq 1 \\ \beta, & \text{ha } x = 1 \end{cases}$
   a) Megválasztható-e a β értéke úgy, hogy f folytonos legyen $x = 1$-ben?
   b) $f'(x) = ?$, ha $x = 1$
   c) $\lim_{x\to 1} f'(x) = ?$ Létezik-e $f'(1)$?

5. Határozzuk meg az alábbi függvények deriváltját:
   a) $f(x) = \arcsin x$, $g(x) = \arcsin(3x + 2)$, $h(x) = \arcsin\left(x^2\right)$
   b) $f(x) = \arccos x$, $g(x) = \arccos\left(\sqrt{x}\right)$, $h(x) = \arccos\left(e^{5x}\right)$
   c) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $g(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2}\right)$, $h(x) = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{1 + x^2}\right)$
   d) $f(x) = \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x$, $g(x) = \operatorname{sh}\left(x^2 + 4\right) \cdot \operatorname{ch}^5(x)$, $h(x) = \frac{\operatorname{sh}(2x)}{\operatorname{ch}\left(x^2\right)}$
   e) $f(x) = \operatorname{arsh} x$, $g(x) = \operatorname{arsh}(6x + 5)$ $h(x) = x \cdot \operatorname{arsh}\left(x^2\right)$
   f) $f(x) = \operatorname{arch} x$, $g(x) = \operatorname{arch}\left(e^x\right)$ $h(x) = \ln\left(x^2 + 1\right) \cdot \operatorname{arch}\left(\sqrt{x}\right)$

6. Számítsuk ki az alábbi határértékeket:
   a) $\lim_{x\to\infty} \operatorname{th}(2x)$ b) $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{cth}(3x)$ c) $\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sh}(2x-5)}{\operatorname{ch}(1-2x)}$ d) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\operatorname{sh}(2x-5)}{\operatorname{ch}(8-2x)}$

7.* Deriváljuk az alábbi függvényeket:
   a) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{ch}\left(5x^2\right) & \text{ha } x \geq 0 \\ \operatorname{sh}(2x) - 3x, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$ b) $g(x) = \left(1 + x^4\right)^{2x}$

8.* Legyen $f(x) = \begin{cases} x\, e^{-\frac{1}{(x-2)^2}} & \text{ha } x > 2 \\ \text{ch}^2 (x-2)^3, & \text{ha } x \leq 2 \end{cases}$. Írjuk fel $f'(x)$ értékét, ahol létezik.

Eredmények

Az 1., 3., 4., 7., 8. feladat megtalálható a példatárban (4.4 fejezet, 63. oldaltól):
https://math.bme.hu/~tasnadi/merninf_anal_1/anal1_gyak.pdf

2. feladat:
  a) $x = 0$-ban véges ugrás
  b) $x = 0$-ban megszüntethető szakadás
  c) $x = 0$-ban megszüntethető szakadás, $x = 1$-ben véges ugrás

6. feladat:
  a) 1 b) -1 c) $\frac{1}{e^4}$ d) $-e^4$