Függvények határértéke

Véges helyen véges határérték

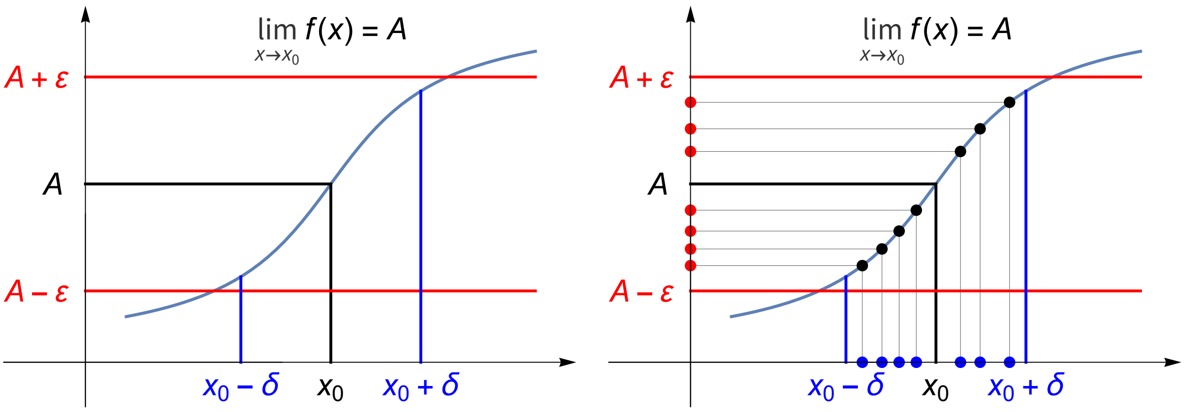
Definíció. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban létezik határértéke, és az az $A \in \mathbb{R}$ valós szám, ha

- x_0 torlódási pontja D_f-nek,
- minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy

$$\text{ha } x \in D_f \text{ és } 0 < |x - x_0| < \delta, \text{ akkor } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Megjegyzés:
- $0 < |x - x_0| < \delta$ jelentése: $x_0 - \delta < x < x_0$ vagy $x_0 < x < x_0 + \delta$.
- δ függhet ε-tól, ezt néha $\delta(\varepsilon)$-nal jelöljük.



Definíció. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban létezik $\left\{\begin{array}{l}\text{jobb oldali}\\ \text{bal oldali}\end{array}\right.$ határértéke, és az az $A \in \mathbb{R}$ valós szám, ha

- x_0 torlódási pontja a $\left\{\begin{array}{l} D_f \cap (x_0, \infty) \\ D_f \cap (-\infty, x_0) \end{array}\right.$ halmaznak,
- minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy

$$\text{ha } x \in D_f \text{ és } \left\{\begin{array}{l} x_0 < x < x_0 + \delta \\ x_0 - \delta < x < x_0 \end{array}\right., \text{ akkor } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Jelölés: Az f $\left\{\begin{array}{l}\text{jobb oldali}\\ \text{bal oldali}\end{array}\right.$ határértéke x_0-ban $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) \end{array}\right.$

Következmény: Ha x_0 belső pontja D_f-nek, akkor $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ pontosan akkor létezik, ha

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) \text{ és } \lim_{x \to x_0+0} f(x) \text{ is létezik, és } \lim_{x \to x_0+0} f(x) = \lim_{x \to x_0-0} f(x).$$

Véges helyen végtelen határérték

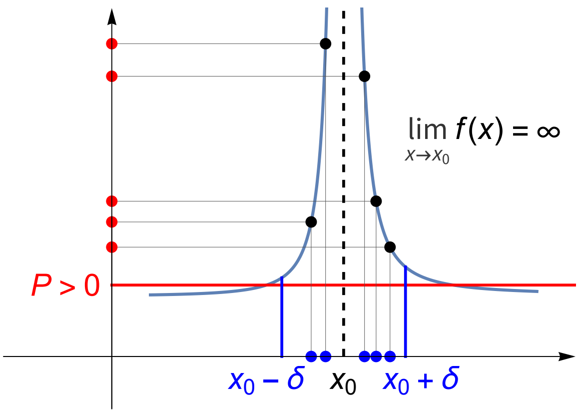
Definíció. Azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke az $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban $\begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$, ha

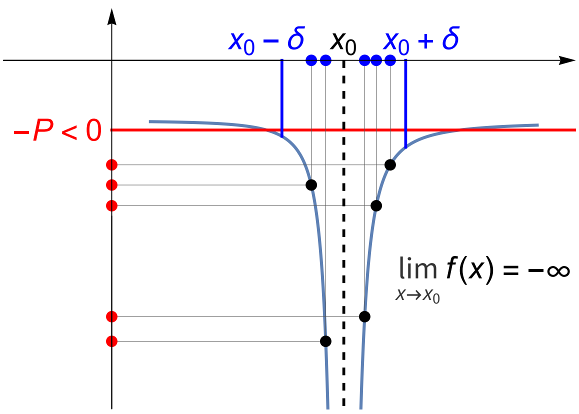
- x_0 torlódási pontja D_f-nek,
- minden $P > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy

$$\text{ha } x \in D_f \text{ és } 0 < |x - x_0| < \delta, \text{ akkor } \begin{cases} f(x) > P \\ f(x) < -P \end{cases}.$$

Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, illetve $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Megjegyzés: A jobb és bal oldali határértékek az előzőekhez hasonlóan definiálhatók.



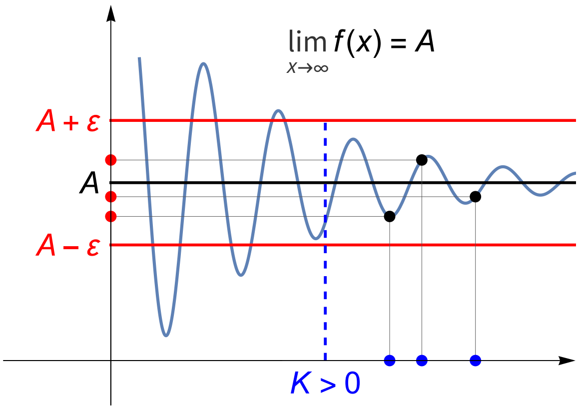


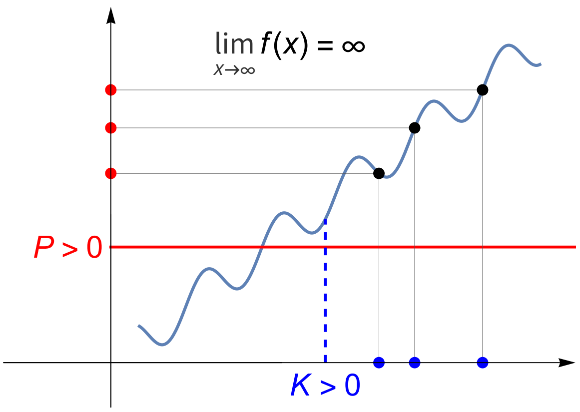
Végtelenben vett határértékek

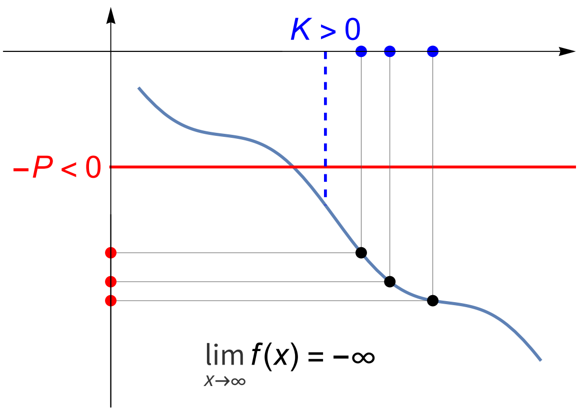
Definíció. Tegyük fel, hogy D_f felülről nem korlátos.

- Azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke a ∞-ben az $A \in \mathbb{R}$ valós szám, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $K > 0$ szám, hogy $x > K$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.

- Azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke a ∞-ben $\begin{cases} \infty \\ -\infty \end{cases}$, ha minden $P > 0$ számhoz található olyan $K > 0$ szám, hogy $x > K$ esetén $x \in D_f$ és $\begin{cases} f(x) > P \\ f(x) < -P \end{cases}.$







Definíció. Tegyük fel, hogy D_f alulról nem korlátos.

- Azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke $-\infty$-ben az $A \in \mathbb{R}$ valós szám, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $K > 0$ szám, hogy $x < -K$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.

- Azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke $-\infty$-ben $\begin{cases} \infty \\ -\infty \end{cases}$, ha minden $P > 0$ számhoz található olyan $K > 0$ szám, hogy $x < -K$ esetén $x \in D_f$ és $\begin{cases} f(x) > P \\ f(x) < -P \end{cases}$.