Függvényvizsgálat

Feladatok

Végezzük el az alábbi függvények teljes függvényvizsgálatát:

1. $f(x) = x^4 - 4x^3$	2. $f(x) = -x^4 + 18x^2$	3. $f(x) = x^5 + 5x^4$	4. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
5. $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$	6. $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$	7. $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$	8. $f(x) = \dfrac{x}{(1-2x)^2}$
9. $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$	10. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-3}$	11. $f(x) = x\,e^{-x}$	12. $f(x) = (x+2)^2\,e^{-x}$
13. $f(x) = e^{-x^2}$	14. $f(x) = x\,e^{-x^2}$	15. $f(x) = x^2 \ln x$	16. $f(x) = \arctan(x^2)$

Emlékeztető

A függvényvizsgálat lépései:

1. D_f; zérushelyek (ha megállapítható); paritás; periodicitás; határértékek $+\infty$-ben, $-\infty$-ben (ha van értelme), szakadási pontokban, határpontokban
2. f' vizsgálata $\Longrightarrow$ monotonitás, lokális szélsőértékek
3. f'' vizsgálata $\Longrightarrow$ konvexitás, konkávitás, inflexiós pontok
4. lineáris aszimptoták
5. f ábrázolása, R_f meghatározása

Tétel: Ha az f függvény deriválható az értelmezési tartományának egy x_0 belső pontjában, akkor az x_0-beli **lokális szélsőérték** létezésének
1. szükséges feltétele: $f'(x_0) = 0$
2. elégséges feltétele: a) $f'(x_0) = 0$ és f' előjelet vált x_0-ban
   b) Ha f kétszer deriválható x_0-ban: $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) \neq 0$
   ($f''(x_0) > 0$: lok. min., $f''(x_0) < 0$: lok. max.)

Tétel: Ha az f függvény kétszer deriválható az értelmezési tartományának egy x_0 belső pontjában, akkor az x_0-beli **inflexiós pont** létezésének
1. szükséges feltétele: $f''(x_0) = 0$
2. elégséges feltétele: a) $f''(x_0) = 0$ és f'' előjelet vált x_0-ban
   b) Ha f háromszor deriválható x_0-ban: $f''(x_0) = 0$ és $f'''(x_0) \neq 0$

Aszimptoták:

1) Az $x = a$ egyenes az f függvény **függőleges aszimptotája**, ha $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \pm\infty$ vagy $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \pm\infty$.

2) Az $y = b$ egyenes az f függvény **vízszintes aszimptotája**, ha $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ vagy $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$.

3) A $g(x) = A\,x + B$ egyenes **ferde aszimptotája** az f függvénynek ∞-ben vagy $-\infty$-ben, ha

$\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - g(x)) = 0$ vagy $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - g(x)) = 0$. Ekkor $A = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ és $B = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - A\,x)$.

Minden olyan racionális törtfüggvénynek van ferde aszimptotája, ahol a számláló fokszáma eggyel nagyobb, mint a nevezőé (ld. 9. és 10. példa).

Megoldások

1. $f(x) = x^4 - 4x^3$

$D_f = \mathbb{R}$; zérushely: $f(x) = 0 \iff x = 0$ vagy $x = 4$

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3) = 0 \iff x = 0$ vagy $x = 3$

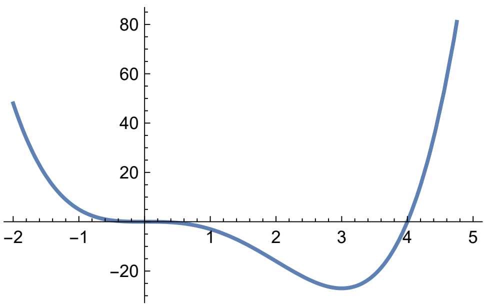
$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2) = 0 \iff x = 0$ vagy $x = 2$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$R_f = [-27, \infty)$

x	x<0	x=0	0<x<3	x=3	x>3
f'	−	0	−	0	+
f	↘		↘	min:−27	↗

x	x<0	x=0	0<x<2	x=2	x>2
f''	+	0	−	0	+
f	∪	infl:0	∩	infl:−16	∪



2. $f(x) = -x^4 + 18x^2$

$D_f = \mathbb{R}$; zérushely: $f(x) = 0 \iff x = 0$ vagy $x = \pm 3\sqrt{2}$; f páros;

$f'(x) = -4x^3 + 36x = 4x(-x^2 + 9) = 0 \iff x = 0$ vagy $x = \pm 3$

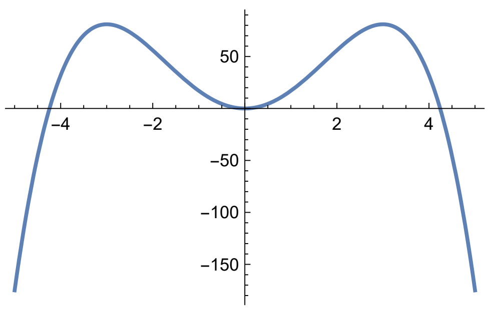
$f''(x) = -12x^2 + 36 = 0 \iff x = \pm\sqrt{3}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$R_f = (-\infty, 81]$

x	x<−3	x=−3	−3<x<0	x=0	0<x<3	x=3	x>3
f'	+	0	−	0	+	0	−
f	↗	max:81	↘	min:0	↗	max:81	↘

x	$x<-\sqrt{3}$	$x=-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$	$x=\sqrt{3}$	$x>\sqrt{3}$
f''	−	0	+	0	−
f	∩	infl:45	∪	infl:45	∩



3. $f(x) = x^5 + 5x^4$

$D_f = \mathbb{R}$; zérushely: $f(x) = 0 \iff x = 0$ vagy $x = -5$

$f'(x) = 5x^4 + 20x^3 = 5x^3(x+4) = 0 \iff x = -4$ vagy $x = 0$

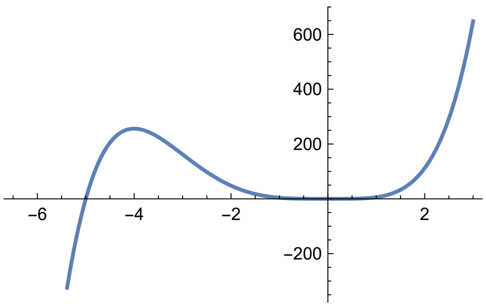
$f''(x) = 20x^3 + 60x^2 = 20x^2(x+3) = 0 \iff x = -3$ vagy $x = 0$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$R_f = \mathbb{R}$

x	x<-4	x=-4	-4<x<0	x=0	x>0
f'	+	0	-	0	+
f	↗	max:256	↘	min:0	↗

x	x<-3	x=-3	-3<x<0	x=0	x>0
f''	-	0	+	0	+
f	⋂	infl:162	⋃		⋃



4. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

$D_f = \mathbb{R}$; $f(x) \neq 0$; f páros

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$f'(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2} = 0 \iff x = 0$

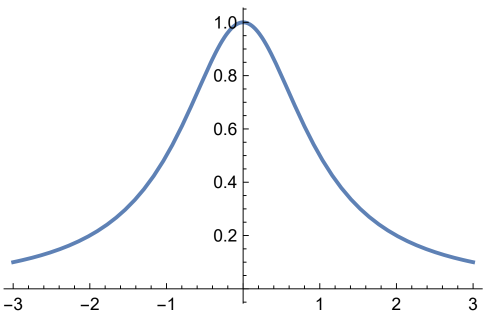
vízszintes aszimptota: $y = 0$

$f''(x) = \dfrac{2\cdot(-1+3x^2)}{(1+x^2)^3} = 0 \iff x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$R_f = (0, 1]$

x	x<0	x=0	x>0
f'	+	0	-
f	↗	max:1	↘

x	$x<-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}<x<\frac{1}{\sqrt{3}}$	$x=\frac{1}{\sqrt{3}}$	$x>\frac{1}{\sqrt{3}}$
f''	+	0	-	0	+
f	⋃	infl: $\frac{3}{4}$	⋂	infl: $\frac{3}{4}$	⋃



5. $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; $f(x) \neq 0$; f páros

$f'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2} = 0 \iff x = 0$

$f''(x) = \frac{2\cdot(1+3x^2)}{(1-x^2)^3} \neq 0$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to -1\pm 0} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x\to 1\pm 0} f(x) = \mp\infty$

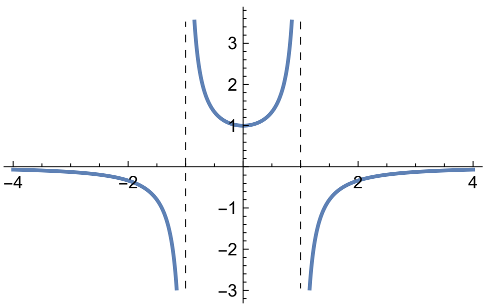
vízszintes aszimptota : $y = 0$

függőleges aszimptoták: $x = 1,\ x = -1$

$R_f = (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$

x	x<−1	−1<x<0	x=0	0<x<1	1<x
f'	−	−	0	+	+
f	↘	↘	min:1	↗	↗

x	x<−1	−1<x<1	x>1
f''	−	+	−
f	∩	∪	∩



6. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

$D_f = \mathbb{R}$; $f(x) = 0 \iff x = 0$; f páratlan

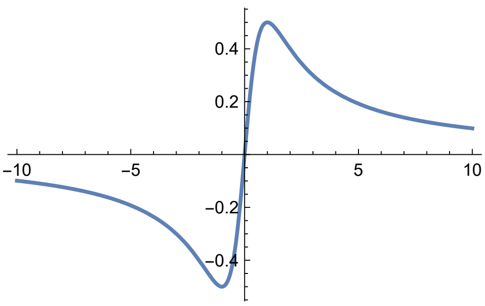
$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \iff x = \pm 1$

$f''(x) = \frac{2x(-3+x^2)}{(1+x^2)^3} = 0 \iff x = 0$ vagy $x = \pm\sqrt{3}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

vízszintes aszimptota : $y = 0$

$R_f = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$



x	x<−1	x=−1	−1<x<1	x=1	x>1
f'	−	0	+	0	−
f	↘	min: $-\frac{1}{2}$	↗	max: $\frac{1}{2}$	↘

x	$x<-\sqrt{3}$	$x=-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}<x<0$	x=0	$0<x<\sqrt{3}$	$x=\sqrt{3}$	$x>\sqrt{3}$
f''	−	0	+	0	−	0	+
f	∩	infl: $-\frac{\sqrt{3}}{4}$	∪	infl:0	∩	infl: $\frac{\sqrt{3}}{4}$	∪

7. $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$f(x) = 0 \iff x = 0;\ f$ páratlan

$f'(x) = \dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2} \neq 0$

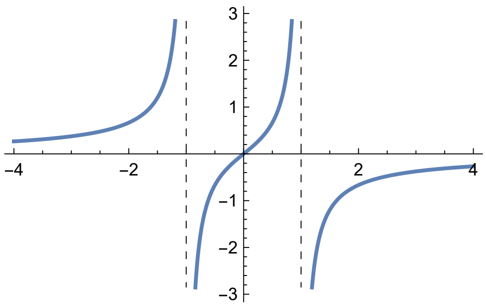
$f''(x) = \dfrac{2x(3+x^2)}{(1-x^2)^3} = 0 \iff x = 0$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0,\quad \lim\limits_{x\to-1\pm0} f(x) = \mp\infty,\quad \lim\limits_{x\to1\pm0} f(x) = \mp\infty$

vízszintes aszimptota : $y = 0$

függőleges aszimptoták: $x = 1,\ x = -1$

$R_f = \mathbb{R}$



x	x<-1	-1<x<1	x>1
f'	+	+	+
f	↗	↗	↗

x	x<-1	-1<x<0	x=0	0<x<1	1<x
f''	+	−	0	+	−
f	∪	∩	infl:0	∪	∩

8. $f(x) = \dfrac{x}{(1-2x)^2}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

$f(x) = 0 \iff x = 0$

$f'(x) = \dfrac{1+2x}{(1-2x)^3} = 0 \iff x = -\dfrac{1}{2}$

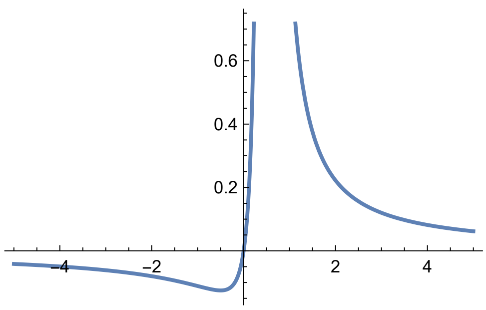
$f''(x) = \dfrac{8\cdot(1+x)}{(1-2x)^4} = 0 \iff x = -1$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0,\quad \lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}\pm0} f(x) = +\infty$

vízszintes aszimptota : $y = 0$

függőleges aszimptota: $x = \dfrac{1}{2}$

$R_f = \left[-\dfrac{1}{8}, +\infty\right)$



x	$x<-\frac{1}{2}$	$x=-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$	$x>\frac{1}{2}$
f'	−	0	+	−
f	↘	min: $-\frac{1}{8}$	↗	↘

x	x<-1	x=-1	$-1<x<\frac{1}{2}$	$x>\frac{1}{2}$
f''	−	0	+	−
f	∩	infl: $-\frac{1}{9}$	∪	∩

9. $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\};$

$f(x) = 0 \iff x = 0$

$f'(x) = \dfrac{x(2+x)}{(1+x)^2} = 0 \iff x = -2 \text{ vagy } x = 0$

$f''(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3} \neq 0$

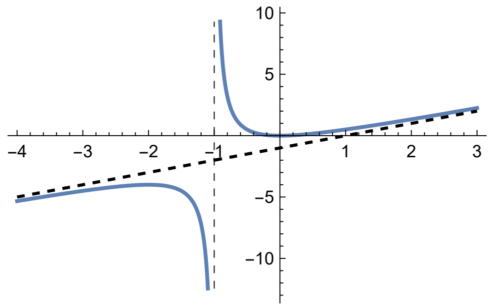
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty, \quad \lim\limits_{x \to -1 \pm 0} f(x) = \pm\infty$

függőleges aszimptota : $x = -1$

lineáris aszimptota: $y = x - 1$

$R_f = \mathbb{R}$

x	x<-2	x=-2	-2<x<-1	-1<x<0	x=0	x>0
f'	+	0	–	–	0	+
f	↗	max:-4	↘	↘	min:0	↗



x	x<-1	x>-1
f''	–	+
f	∩	∪

10. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-3}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right\};$

$f(x) = 0 \iff x = 0;\ f$ páratlan

$f'(x) = \dfrac{x^2(x^2-9)}{(x^2-3)^2} = 0 \iff x = 0 \text{ vagy } x = \pm 3$

$f''(x) = \dfrac{6x(9+x^2)}{(x^2-3)^3} = 0 \iff x = 0$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty, \quad \lim\limits_{x \to -\sqrt{3} \pm 0} f(x) = \pm\infty, \quad \lim\limits_{x \to \sqrt{3} \pm 0} f(x) = \pm\infty$

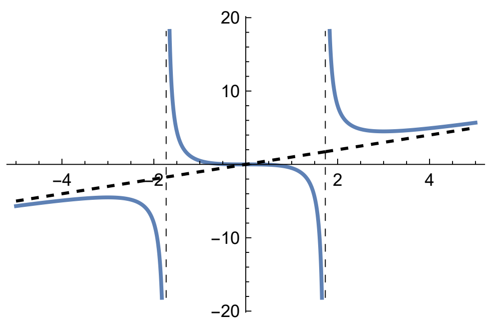
függőleges aszimptoták : $x = -\sqrt{3}, \ x = \sqrt{3}$

lineáris aszimptota: $y = x$

$R_f = \mathbb{R}$

x	x<-3	x=-3	$-3<x<-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}<x<0$	x=0	$0<x<\sqrt{3}$	$\sqrt{3}<x<3$	x=3	x>3
f'	+	0	–	–	0	–	–	0	+
f	↗	max: $-\frac{9}{2}$	↘	↘		↘	↘	min: $\frac{9}{2}$	↗

x	$x<-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}<x<0$	x=0	$0<x<\sqrt{3}$	$x>\sqrt{3}$
f''	–	+	0	–	+
f	∩	∪	infl:0	∩	∪



11. $f(x) = x\,e^{-x}$

$D_f = \mathbb{R};\ \ f(x) = 0 \iff x = 0$

$f'(x) = e^{-x}(1 - x) = 0 \iff x = 1$

$f''(x) = e^{-x}(x - 2) = 0 \iff x = 2$

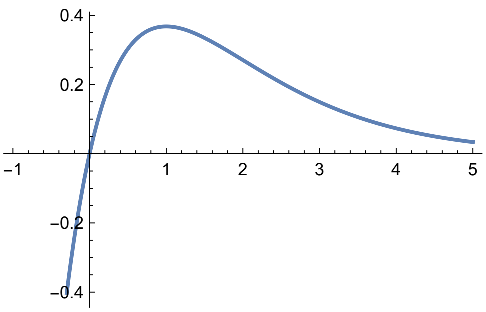
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$R_f = \left(-\infty, \frac{1}{e}\right]$

x	x<1	x=1	x>1
f'	+	0	−
f	↗	max: $\frac{1}{e}$ ≈0.37	↘

x	x<2	x=2	x>2
f''	−	0	+
f	⋂	infl: $\frac{2}{e^2}$ ≈0.27	⋃



12. $f(x) = (x + 2)^2\,e^{-x}$

$D_f = \mathbb{R};\ \ f(x) = 0 \iff x = -2$

$f'(x) = -e^{-x}\,x\,(2 + x) = 0 \iff x = 0$ vagy $x = -2$

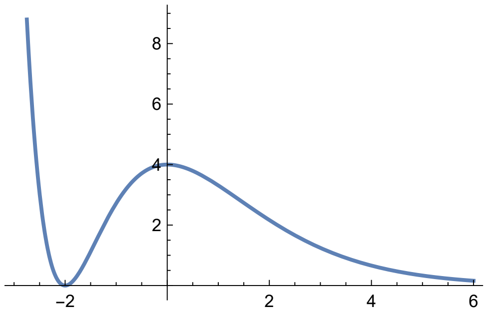
$f''(x) = e^{-x}\left(x^2 - 2\right) = 0 \iff x = \pm\sqrt{2}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+2)^2}{e^x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2\,(x+2)}{e^x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = 0$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$R_f = [0, +\infty)$

x	x<−2	x=−2	−2<x<0	x=0	x>0
f'	−	0	+	0	−
f	↘	min:0	↗	max:4	↘



x	x<−$\sqrt{2}$	x=−$\sqrt{2}$	−$\sqrt{2}$<x<$\sqrt{2}$	x=$\sqrt{2}$	x>$\sqrt{2}$
f''	+	0	−	0	+
f	⋃	infl:≈1.41	⋂	infl:≈2.83	⋃

13. $f(x) = e^{-x^2}$

$D_f = \mathbb{R}$; $f(x) \neq 0$; f páros

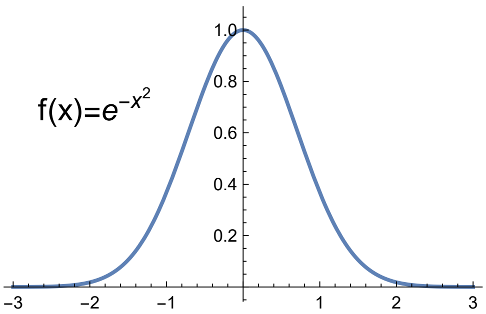
$f'(x) = e^{-x^2}(-2x) = 0 \iff x = 0$

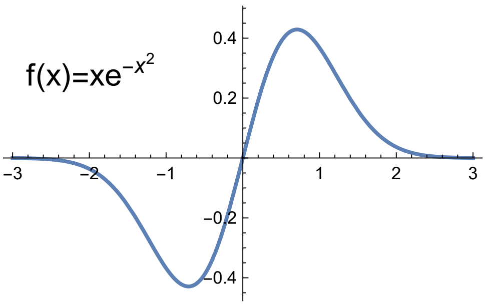
$f''(x) = 2e^{-x^2}\left(-1 + 2x^2\right) = 0 \iff x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$; $R_f = (0, 1]$

x	x<0	x=0	x>0
f'	+	0	–
f	↗	max:1	↘

x	$x<-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$	$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$	$x>\frac{1}{\sqrt{2}}$
f''	+	0	–	0	+
f	∪	infl: $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ≈0.61	∩	infl: ≈ $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ≈0.61	∪





14. $f(x) = x\,e^{-x^2}$

$D_f = \mathbb{R}$; $f(x) = 0 \iff x = 0$; f páratlan

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{e^{x^2}} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{e^{x^2}\cdot 2x} = 0$

$f'(x) = -e^{-x^2}\left(-1 + 2x^2\right) = 0 \iff x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$R_f = \left[-\dfrac{1}{\sqrt{2e}}, \dfrac{1}{\sqrt{2e}}\right]$

$f''(x) = 2e^{-x^2}x\left(-3 + 2x^2\right) = 0 \iff x = 0$ vagy $x = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

x	$x<-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$	$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$	$x>\frac{1}{\sqrt{2}}$
f'	–	0	+	0	–
f	↘	min: $-\frac{1}{\sqrt{2e}}$ ≈–0.43	↗	max: $\frac{1}{\sqrt{2e}}$ ≈0.43	↘

x	$x<-\sqrt{\frac{3}{2}}$	$x=-\sqrt{\frac{3}{2}}$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}<x<0$	x=0	$0<x<\sqrt{\frac{3}{2}}$	$x=\sqrt{\frac{3}{2}}$	$x>\sqrt{\frac{3}{2}}$
f''	–	0	+	0	–	0	+
f	∩	infl: ≈–0.27	∪	infl:0	∩	infl: ≈0.27	∪

15. $f(x) = x^2 \ln x$

$D_f = \mathbb{R}^+$; $f(x) = 0 \iff x = 1$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to 0+0} \frac{-x^2}{2} = 0$$

$$f'(x) = x(1 + 2\ln x) = 0 \iff x = \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0.61$$

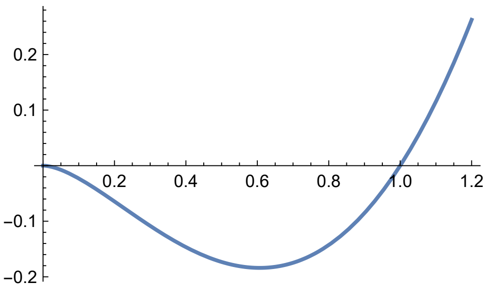
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f''(x) = 3 + 2\ln x = 0 \iff x = \frac{1}{e^{3/2}} \approx 0.22$$

$$R_f = \left[-\frac{1}{2e}, +\infty\right)$$

x	$0<x<\frac{1}{\sqrt{e}}$	$x=\frac{1}{\sqrt{e}}$	$x>\frac{1}{\sqrt{e}}$
f'	–	0	+
f	↗	min: $-\frac{1}{2e} \approx -0.18$	↘

x	$0<x<\frac{1}{e^{3/2}}$	$x=\frac{1}{e^{3/2}}$	$x>\frac{1}{e^{3/2}}$
f''	–	0	+
f	∩	infl: $-\frac{3}{2e^3} \approx -0.07$	∪



16. $f(x) = \arctan(x^2)$

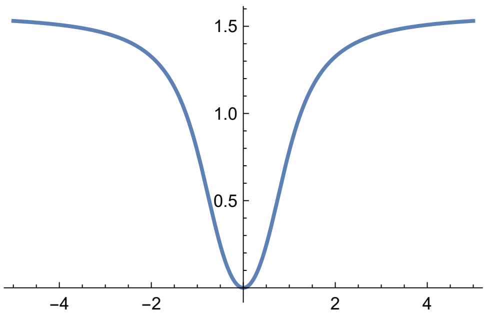
$D_f = \mathbb{R}$; $f(x) = 0 \iff x = 0$; f páros

$$f''(x) = \frac{2\cdot(1 - 3x^4)}{(1 + x^4)^2} = 0 \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{1 + x^4} = 0 \iff x = 0$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}; \quad R_f = \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right)$$

x	x<0	0	x>0
f'	–	0	+
f	↘	min:0	↗



x	$x<-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$	$x=-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}<x<\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$	$x=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$	$x>\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$
f''	–	0	+	0	–
f	∩	infl: $\frac{\pi}{6}$	∪	infl: $\frac{\pi}{6}$	∩