Szakadási pontok típusai

Definíció. Azt mondjuk, hogy az f függvények szakadása van az $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban, ha x_0 torlódási pontja D_f-nek, és f nem folytonos x_0-ban. Ilyenkor az x_0-t az f szakadási helyének nevezzük. A szakadási helyeket a következőképpen osztályozzuk.

1. Elsőfajú szakadás:
   - a) megszüntethető szakadás, ha létezik $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0+} f(x) \in \mathbb{R}$, de nem egyenlő $f(x_0)$-val vagy $f(x_0)$ nem létezik
   - b) véges ugrás, ha létezik $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) \in \mathbb{R}$ és $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) \in \mathbb{R}$, de nem egyenlőek
2. Másodfajú szakadás: ha nem elsőfajú.

Megjegyzés: 1. Az elsőfajú szakadásnál mindkét egyoldali határérték létezik és véges.
2. A másodfajú szakadásnál a két egyoldali határérték közül legalább az egyik nem létezik, vagy létezik, de nem véges.

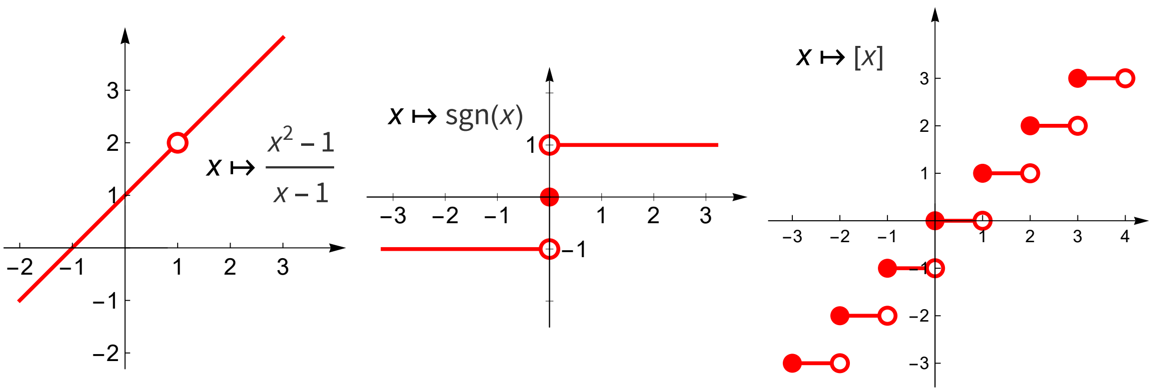
Példák

1. Elsőfajú szakadás

a) Az $x \mapsto \dfrac{x^2-1}{x-1}$ függvénynek megszüntethető szakadása van az $x_0 = 1$-ben

b) Az $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$ szignumfüggvénynek véges ugrása van a $x_0 = 0$-ban.

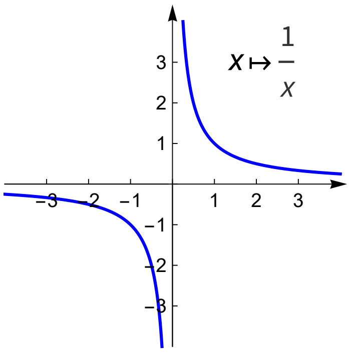
c) Az $x \mapsto [x]$ egészrészfüggvénynek minden $x \in \mathbb{Z}$ egész helyen véges ugrása van.

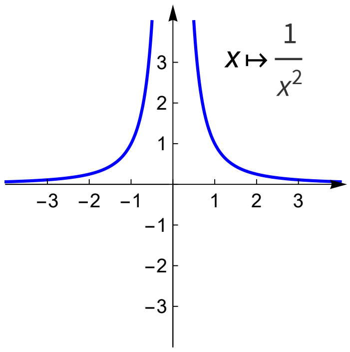


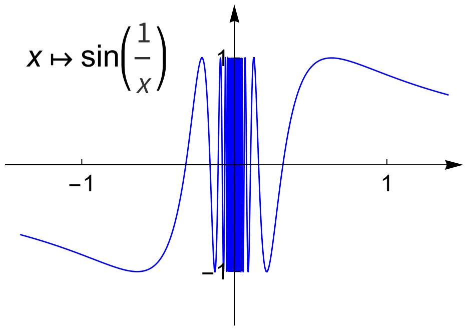
2. Másodfajú szakadás

a) Az $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$, $x \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ függvénynek másodfajú szakadása van a 0-ban.

(1) $\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-0} \dfrac{1}{x} = -\infty$ (2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ (3) $\lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ nem létezik

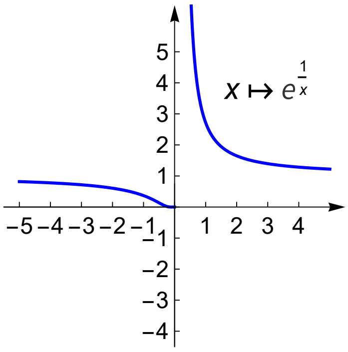






b) Az $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ függvénynek másodfajú szakadása van a 0-ban.

- Ha $x \longrightarrow 0+$, akkor $\frac{1}{x} \longrightarrow \infty$, és mivel $\lim\limits_{x \to \infty} e^x = \infty$, ezért $\lim\limits_{x \to 0+0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$.
- Ha $x \longrightarrow 0-$, akkor $\frac{1}{x} \longrightarrow -\infty$, és mivel $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, ezért $\lim\limits_{x \to 0-0} e^{\frac{1}{x}} = 0$.



c) Az $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2 (x-1)}$ függvénynek másodfajú szakadása van az

$x_1 = -1$ és $x_2 = 1$ helyeken. A határérték a szakadási pontokban:

- $\lim\limits_{x \to -1\pm 0} f(x) = \lim\limits_{x \to -1\pm 0} \dfrac{1}{(x+1)^2} \cdot \dfrac{x}{(x-1)} = \dfrac{1}{0+} \cdot \dfrac{-1}{-2} = \infty \cdot \dfrac{1}{2} = \infty$
- $\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1+0} \dfrac{1}{(x-1)} \cdot \dfrac{x}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{0+} \cdot \dfrac{1}{4} = \infty \cdot \dfrac{1}{4} = \infty$
- $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{1}{(x-1)} \cdot \dfrac{x}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{0-} \cdot \dfrac{1}{4} = (-\infty) \cdot \dfrac{1}{4} = -\infty$