

## Szöveges szélsőérték-feladatok

1. Egy téglalap alakú,  $1 \times 2$  méteres kartonpapírból felül nyitott, téglalap alakú dobozt hajtogatunk úgy, hogy a papír négy sarkából négy egybevágó négyzetet vágunk ki, majd felhajtjuk a doboz oldalait. Mekkora négyzeteket kell kivágnunk, hogy a doboz térfogata maximális legyen?
2. Egy épülő atlétikapályán két párhuzamos egyenes szakaszból és az őket összekötő félkörívekből áll a futópálya. Hogyan kell kialakítani a pálya alakját, hogy a futópálya hossza 400 méter legyen, és a lehető legnagyobb területű téglalap alakú focipálya férjen el a belsejében?
3. A Populista Párt vezetője tudja, hogy ha hatalomra kerülése esetére a bérek  $x$ -szeresére való növelését ígéri meg, akkor a szavazók  $30(x - 1)^2$  százaléka nem fog hinni neki, viszont a maradék szavazók  $50(x - 1)$  százaléka a pártra fog szavazni. Hányszorosos bérnövekedést kell ígérnie, hogy a lehető legtöbb szavazatot kapja?
4. Egy derékszögű háromszög átfogója 10 cm. Maximum mennyi lehet a területe?
5. Egy egyenes körkúp alapkörének a sugara 2 méter, magassága 5 méter. Határozzuk meg a kúpba írható maximális térfogatú henger adatait!
- 6.<sup>hf</sup> Magyarországon a teljes lakosság 1 év alatt összesen  $10^{13}$  forintnyi jövedelmet kap. Tudjuk, hogy ha a keresetek  $(100y)\%$ -át kéne jövedelemadóként befizetni, akkor a lakosság a befizetendő adó  $(100y^3)\%$ -át elcsalná (nem fizetné be). Ilyen feltételek mellett mekkorára kéne az adókulcsot állítani, hogy a lehető legtöbb pénz folyjon be?
- 7.<sup>hf</sup> Egy egyenlő szárú trapéz két szára és az alapja 1 cm hosszú. Hogyan kell megválasztani a száraknak az alappal bezárt szögét, hogy a területe maximális legyen?
- 8.<sup>hf</sup> Lenke elhatározta, hogy feltölti a 10000 literes úszómedencéjét, melyhez a vizet a közeli kútról fogja vödörrel hordani. Tetszőlegesen nagy vödört választhat a munkához, de tudja, hogy ha egy fordulóval  $l$  liter vizet hoz, akkor a forduló  $64 + l^2$  másodpercig fog tartani. Hogyan válassza meg  $l$  értékét, hogy a lehető leggyorsabban végezzen?
- 9.<sup>hf</sup> Roland elhatározza, hogy kifesti a szobáját. Persze ehhez előbb a bútorokat többé-kevésbé össze kell tologatnia, hogy mindenütt hozzáférjen a falhoz. Roland tudja, hogy ha  $t$  órát fordít a bútorok összetologatására, akkor a festéssel  $10(1 + 1/t)$  óra alatt végez, viszont a festés után megint  $t$  órát vesz igénybe a bútorok eredeti helyzetbe való állítása. Hogyan kell  $t$  értékét megválasztania, hogy a lehető leghamarabb legyen kész?
- 10.<sup>hf</sup> Egy hajó üzemeltetési költségeit a fűtőanyag-fogyasztás és egyéb kiadások képezik. Az óránként felhasznált fűtőanyag  $A$  értéke függ a sebességtől; az összefüggést az  $A = 0,03 \cdot v^3$  képlet fejezi ki, ahol  $v$  (km/h) a sebesség; az egyéb kiadások  $B$  forintot tesznek ki. Határozzuk meg, milyen sebességgel haladjon a hajó, hogy a kilométerenkénti költség a lehető legkisebb legyen. (Vegyük  $B$ -t pl. 480 Ft-nak.)
- 11.<sup>hf</sup> Két egymást merőlegesen metsző folyosó szélessége 2,4 m, illetve 1,6 m. Mekkora az a leghosszabb létra, amelyet (vízszintes helyzetben) az egyik folyosóról a másikra át lehet vinni?
- 12.<sup>hf</sup> Egy házra olyan ablakokat terveznek, amelyeknek alsó része téglalap alakú, felső része pedig a téglalapra illő félkör. Egy-egy ablak adott kerülete  $K$ . Hogyan kell megválasztani az ablakok méreteit, hogy minél több fényt engedjenek át?

## Megoldások

### ■ 1. feladat

Jelölje  $x$  a kivágott négyzetek oldalát. Ekkor a doboz térfogata:  $V(x) = x(1 - 2x)(2 - 2x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x$ , ahol  $0 < x < \frac{1}{2}$ . A  $V$  függvény maximumát keressük.

$V'(x) = 12x^2 - 12x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{6} \approx 0.211$  vagy  $x_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{6} \approx 0.789$ . A  $V$  függvénynek  $x_1$ -ben lehet maximuma,  $x_2$  a feladat szövege miatt nem jöhet szóba.

$V''(x) = 24x - 12$  és  $V''(x_1) = -4\sqrt{3} < 0$ , tehát itt valóban maximum van.

### ■ 2. feladat

Jelölje  $x$  az egyenes szakaszok hosszát és  $r$  a félkörívek sugarát. Ekkor a futópálya hossza  $400 = 2x + 2r\pi$ . A focipálya területe  $2rx$ . Az egyenletből például  $x$ -et kifejezve,  $x = 200 - r\pi$ , így keressük a

$T(r) = 2r(200 - r\pi)$  függvény maximumát.  $T'(r) = 400 - 4\pi r = 0 \Leftrightarrow r = \frac{100}{\pi}$ , itt lehet szélsőérték.

$T''(r) = -4\pi < 0$ , tehát ez valóban maximum. A focipálya területe akkor maximális, ha a félkörívek sugara  $r = \frac{100}{\pi} \approx 31,83$  m, az egyenes szakaszok hossza  $x = 100$  m.

### ■ 3. feladat

Az  $f(x) = (100 - 30(x - 1)^2) \cdot 50(x - 1) \cdot \frac{1}{100} = -35 + 5x + 45x^2 - 15x^3$  függvény maximumát keressük.

$f'(x) = 5 + 90x - 45x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{10}}{3}$ . A lehetséges szélsőérték hely  $\frac{3 + \sqrt{10}}{3} \approx 2.05$ , mivel a negatív gyök nyilván nem jöhet szóba. Könnyen látható, hogy ebben a pontban a derivált előjelet vált (vagy a második derivált negatív), így itt valóban maximum van. Tehát a bérek 2.05-szörösére emelésével érhető el a legtöbb szavazat.

### ■ 4. feladat

1. megoldás: Jelölje  $a$  és  $b$  a derékszögű háromszög befogóit. Ekkor  $a^2 + b^2 = 100$  és a területe  $\frac{ab}{2}$ . Az egyenletből  $b$ -t kifejezve, keressük a  $T(a) = \frac{1}{2} a \sqrt{100 - a^2}$  függvény maximumát, ahol  $0 < a < 10$ .

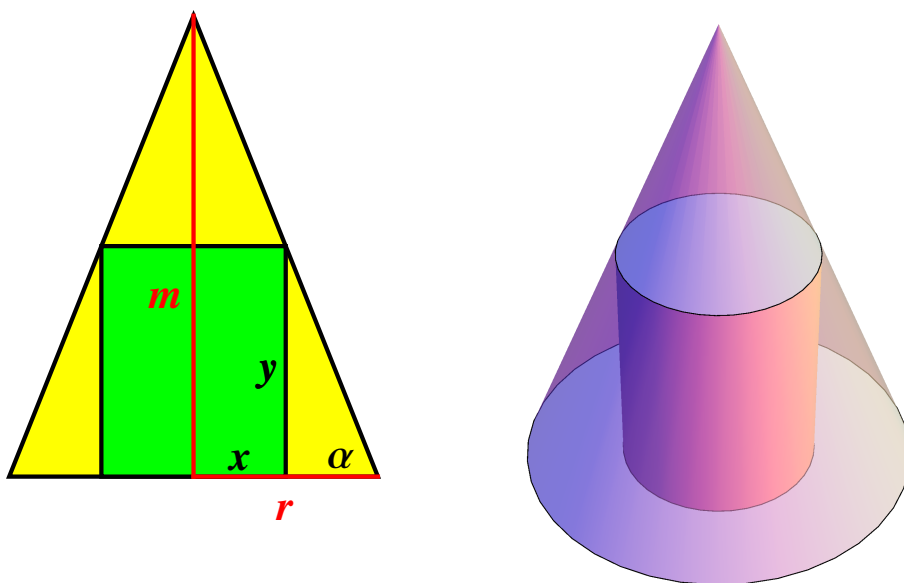
$T'(a) = -\frac{a^2}{2\sqrt{100-a^2}} + \frac{\sqrt{100-a^2}}{2} = \frac{50-a^2}{\sqrt{100-a^2}} = 0$ , ahonnan  $a = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$  (mivel  $a > 0$ ), itt lehet szélsőérték.

Könnyen ellenőrizhető, hogy ebben a pontban a derivált előjelet vált (azaz  $T'(a) > 0$ , ha  $a < 5\sqrt{2}$  és  $T'(a) < 0$ , ha  $a > 5\sqrt{2}$ ), tehát a háromszög területe akkor maximális, ha  $a = b = 5\sqrt{2} \approx 7,1$  cm.

2. megoldás: Felhasználva a számtani és mértani középére vonatkozó egyenlőtlenséget,  $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \sqrt{a^2 b^2}$ , azaz  $\frac{100}{2} \geq ab = 2T$ . Innen látható, hogy a háromszög területe:  $T \leq 25$ , és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha  $a^2 = b^2$ , azaz  $a = b = 5\sqrt{2}$ .

### ■ 5. feladat

A kúp magassága  $m = 5$ , alapkörének sugara  $r = 2$ . Jelölje  $x$  a henger alapkörének sugarát,  $y$  a henger magasságát és  $\alpha$  a kúp alkotójának az alapkör síkjával bezárt szögét. Ekkor  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{m}{r} = \frac{y}{r-x}$ . A henger térfogata, amelynek a maximumát keressük:  $V(x) = x^2 y = \frac{5}{2} x^2 (2-x) = -\frac{5x^3}{2} + 5x^2$ , ahol  $0 < x < 2$ . Ekkor  $V'(x) = -\frac{15x^2}{2} + 10x = 0$ , ahonnan  $x = \frac{4}{3}$  (mivel  $x > 0$ ). Ebben a pontban valóban maximum van, mert  $V''(x) = -15x + 10$ , így  $V''\left(\frac{4}{3}\right) = -10 < 0$ . A maximális térfogatú henger sugara  $x = \frac{4}{3}$ , magassága  $y = \frac{5}{3}$ .



### ■ 6. feladat

A fizetendő adó  $10^{13} \cdot y$  forint lenne, de ebből nem fizetnek be  $10^{13} \cdot y \cdot y^3$  forintot. A befizetett adó a kettő különbsége, így keressük az  $f(y) = 10^{13} y(1 - y^3)$  függvény maximumát.

$f'(y) = 10^{13} (1 - 4y^3) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \approx 0.63$ , itt lehet szélsőérték. Ebben a pontban a második derivált

negatív, tehát itt valóban maximum van, az adókulcsot 63 %-ra kell állítani, hogy a lehető legtöbb pénz folyjon be.

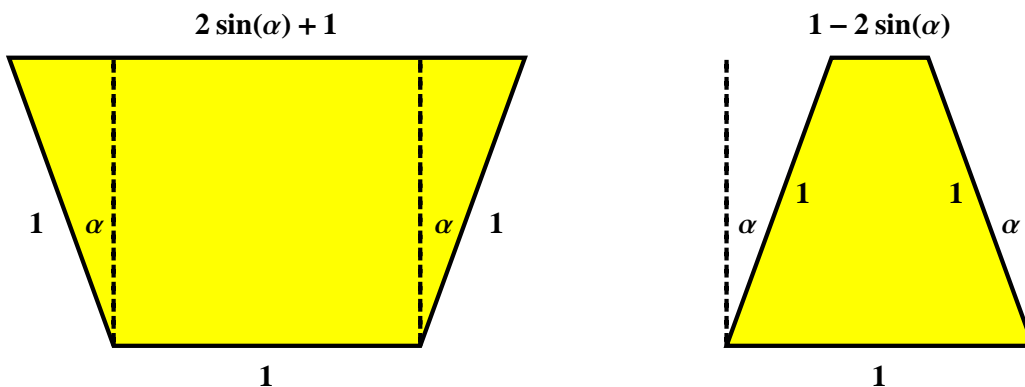
### ■ 7. feladat

Jelölje  $\alpha$  a trapéz szárainak a függőlegessel bezárt szögét. Ekkor a trapéz magassága  $\cos \alpha$ . Ha a szárak párhuzamosak, akkor a trapéz rombusz, így területe akkor maximális, ha négyzet (területe  $1 \cdot \cos \alpha$ , ami  $\alpha = 0$ -nál maximális.)

Ha a szárak nem párhuzamosak, akkor a szemközti oldal hossza  $1 - 2 \sin \alpha$ , ha a szárak "befelé" hajlanak, és  $1 + 2 \sin \alpha$ , ha a szárak "kifelé" hajlanak. Összefoglalva, tekinthetjük úgy, hogy a szemközti oldal hossza

$1 + 2 \sin \alpha$ , ahol  $\alpha$  negatív is lehet,  $\alpha = -\frac{\pi}{6}$ -nál kapnánk szabályos háromszöget.

Keressük a  $T(\alpha) = \frac{1+(1+2\sin\alpha)}{2} \cos \alpha = (1 + \sin \alpha) \cos \alpha$  függvény maximumát a  $-\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$  intervallumon.  $T(\alpha) = \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha$ , így a  $T'(\alpha) = -\sin \alpha + \cos 2\alpha = 0$  egyenletet kell megoldanunk. Felhasználva, hogy  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ ,  $\sin \alpha$ -ra a  $-2 \sin^2 \alpha - \sin \alpha + 1 = 0$  másodfokú egyenlet adódik, ahonnan  $\sin \alpha = -1$  vagy  $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ . Az értelmezési tartománnyal összevetve azt kapjuk, hogy  $\alpha = \frac{\pi}{6}$ -nál lehet a függvénynek maximuma. A második derivált  $T''(\alpha) = -\cos \alpha - 2 \sin 2\alpha$  és  $T''(\frac{\pi}{6}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} < 0$ , tehát itt valóban maximum van. Ekkor a száraknak a hosszabbik alappal bezárt szöge  $\frac{\pi}{3}$ .



### ■ 8. feladat

Ha egy vödörbe  $L$  liter víz fér, akkor  $\frac{10000}{L}$  fordulóra lesz szükség, ami  $\frac{10000}{L} (64 + L^2)$  ideig tart. Tehát keressük az  $F(L) = 10000 \left(\frac{64}{L} + L\right)$  függvény minimumát, ahol  $L > 0$ .

$F'(L) = 10000 \left(1 - \frac{64}{L^2}\right) = 0$ , ahonnan  $L = 8$  a lehetséges szélsőérték hely. Mivel  $F''(L) = 10000 \cdot \frac{128}{L^3}$  és  $F''(8) > 0$ , ezért  $F$ -nek itt valóban minimuma van.

### ■ 9. feladat

Az  $f(t) = 2t + 10 \left(1 + \frac{1}{t}\right)$  függvény minimumát keressük, ahol  $t > 0$ .  $f'(t) = 2 - \frac{10}{t^2} = 0$ , ahonnan  $t = \sqrt{5} \approx 2.24$ , itt lehet szélsőérték. Mivel  $f''(t) = \frac{20}{t^3}$  és így  $f''(\sqrt{5}) > 0$ , ezért ebben a pontban valóban minimuma van a függvénynek.

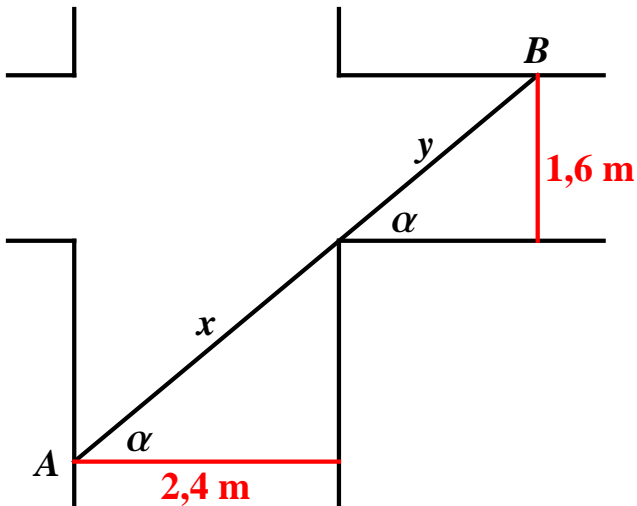
### ■ 10. feladat

Jelölje  $AB$  a létrát. Az ábra épp a maximális hosszúságú létrát szemlélteti fordulás közben. Az  $AB$  szakasz  $x$  és  $y$  része  $\alpha$ -val kifejezhető:

$AB = f(\alpha) = \frac{2,4}{\cos \alpha} + \frac{1,6}{\sin \alpha}$ . A szélsőérték meghatározásához deriváljuk  $f(\alpha)$ -t:

$$f'(\alpha) = \frac{2,4 \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} - \frac{1,6 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{0,8}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} (3 \sin^3 \alpha - 2 \cos^3 \alpha).$$

$f'(\alpha) = 0$ , ha  $3 \sin^3 \alpha = 2 \cos^3 \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \approx 0.8736$ ,  $\alpha \approx 41^\circ$ .  $AB = 3,2 + 2,4 = 5,6$  m.



### ■ 11. feladat

A hajó 1 óra alatt  $v$  kilométert tesz meg, ezalatt  $A + B$  forint a kiadás. A kilométerenkénti költség:

$$f(v) = \frac{A+B}{v} = 0,03 v^2 + \frac{480}{v}. \quad \text{Szélsőérték ott lehet, ahol}$$

$$f'(v) = 0,06 v - \frac{480}{v^2} = 0, \text{ azaz } v = 20.$$

$f''(v) = 0,06 + \frac{960}{v^3}$ , így  $f''(20) > 0$ , ezért itt valóban minimum van, a kilométerenkénti költség  $v = 20$  km/h-s sebességnél a legkisebb.

### ■ 12. feladat

Jelölje  $r$  a félkör sugarát, ekkor a téglalap vízszintes oldala  $2r$ . A téglalap függőleges oldalát jelölje  $x$ . Az ablak kerülete  $K = 2x + 2r + r\pi$ , területe  $T = \frac{1}{2} r^2 \pi + 2rx$ . Az első egyenletből  $2x$ -et kifejezve, keressük

$$\text{a } T(r) = \frac{1}{2} r^2 \pi + r(K - 2r - r\pi) = Kr - \frac{1}{2} (4 + \pi) r^2 \quad \text{függvény maximumát.}$$

$T'(r) = K - (4 + \pi)r = 0$ , ahonnan  $r = \frac{K}{4 + \pi}$  a lehetséges maximumhely. Mivel  $T''(r) = -(4 + \pi) < 0$ , ezért itt valóban maximum van, és ekkor  $x = \frac{K}{4 + \pi}$ .