# 2. előadás

Halmazok. Számtani és mértani sorozatok.

# Halmazok

## Definíció

Két halmazt akkor és csak akkor tekintünk **egyenlőnek**, ha elemeik ugyanazok.

Például: $\{1, 2\} = \{2, 1\} = \{1, 1, 2\} = \{1, 2, 2, 1, 2, 1\}$

A halmazt, amelynek nincs eleme, **üres halmaznak** nevezzük. Jele: $\emptyset$.
Az “$x$ dolog eleme az $A$ halmaznak” jelölése: $x \in A$.
Az “$x$ dolog nem eleme az $A$ halmaznak” jelölése: $x \notin A$.

Az $A$ halmazt a $B$ halmaz **részhalmazának** nevezzük ($A \subseteq B$), ha az $A$ minden eleme $B$-nek is eleme. Az $A$ halmaz **valódi része** a $B$-nek ($A \subset B$), ha $A \subseteq B$, de $A \neq B$.

Halmazokról mindig csak mint egy adott **alaphalmaz** részhalmazairól beszélünk, még ha ezt az alaphalmazt nem is nevezzük meg.

Halmazok megadása: $\left\{ x \in \text{alaphalmaz} \;\middle|\; \text{feltételek } x\text{-re} \right\}$

**Példa:** Az 1-nél kisebb pozitív valós számok halmaza: $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$,
azaz azon $x$ valós számok halmaza, melyekre $0 < x < 1$.

## Műveletek halmazokkal

**Unió vagy egyesítés:** Az $A$ és $B$ halmaz uniója azoknak az elemeknek a halmaza, amelyek a két halmaz közül legalább az egyikben benne vannak.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \lor x \in B\}$$

**Metszet vagy közös rész:** Az $A$ és $B$ halmaz metszete azoknak az elemeknek a halmaza, amelyek mindkét halmazban benne vannak.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \land x \in B\}$$

**Különbség:** Az $A$ és $B$ halmaz $A \setminus B$ különbsége az $A$ összes olyan elemének a halmaza, amelyek nincsenek benne $B$-ben.

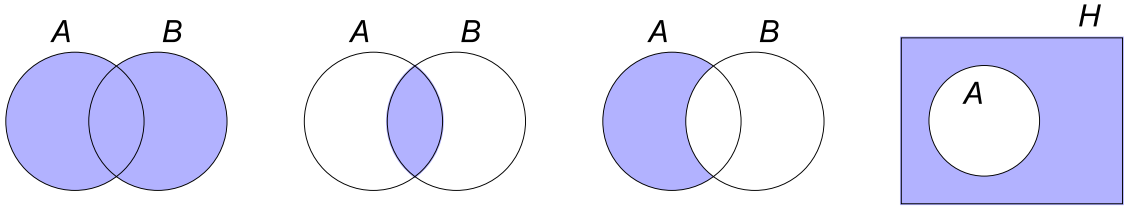
$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \land x \notin B\}$$

**Komplementer:** Az $A$ halmaz $H$-ra vonatkozó komplementere a $H \setminus A$ halmaz, jele: $\overline{A}_H$.
Ha az alaphalmaz nincs megnevezve, a komplementert $\overline{A}$ jelöli.

$$\overline{A}_H = \{x \in H \mid x \notin A\}, \quad \text{illetve} \quad \overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$$

Azt mondjuk, hogy az $A$ és $B$ halmaz **diszjunkt**, ha $A \cap B = \emptyset$.

**Unió** **Metszet** **Különbség** **Komplementer**




## Jelölések

Valós számok halmaza: $\mathbb{R}$
Pozitív valós számok halmaza: $\mathbb{R}^+$
Nemnegatív valós számok halmaza: $\mathbb{R}_0^+$
Természetes számok halmaza: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$.
Megjegyzés: van, ahol az $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ definíció szerepel, ez csak megállapodás kérdése.

Egész számok halmaza: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
Pozitív egészek halmaza: $\mathbb{N}^+$ vagy $\mathbb{Z}^+$.

Racionális számok halmaza: $\mathbb{Q} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists\, k \in \mathbb{Z} \text{ és } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \text{ melyre } x = \frac{k}{n}\right\}$,
azaz azon valós számok halmaza, amelyek felírhatók két egész szám hányadosaként.
Nem racionális (irracionális) szám pl. $\sqrt{2} \approx 1.41421\ldots$, $\pi \approx 3.14159\ldots$, $e \approx 2.71828\ldots$.

## Intervallumok

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$ (zárt intervallum)
$[a, b[ = [a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$ (balról zárt, jobbról nyílt intervallum)
$]a, b] = (a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$ (balról nyílt, jobbról zárt intervallum)
$]a, b[ = (a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (nyílt intervallum)

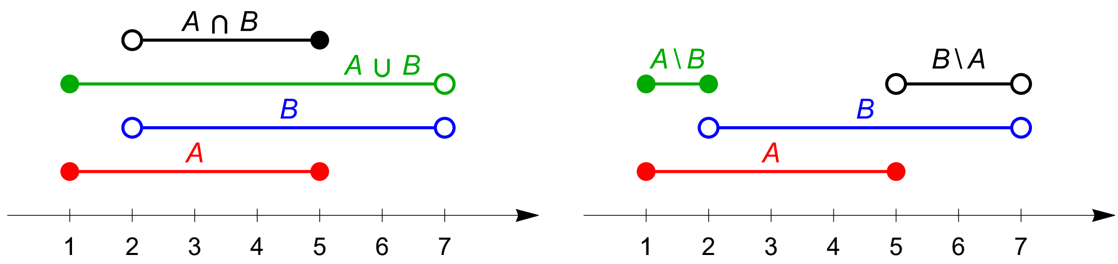
$]a, +\infty[ = (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$
$]-\infty; b] = (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\}$

$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$, $\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty)$, $\mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$

## Példa

Legyen $A = [1, 5]$ és $B = (2, 7)$ $\Longrightarrow$ $A \cup B = [1, 7)$ $\quad A \setminus B = [1, 2]$

$A \cap B = (2, 5]$ $\quad B \setminus A = (5, 7)$




## Descartes-szorzat

Az $(a, b)$ rendezett pár 1. eleme $a$, 2. eleme $b$. A sorrend számít: $(a, b) \neq (b, a)$.
Megjegyzés: $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$
Descartes-szorzat: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ és } b \in B\}$

**Példák:**
- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ : a sík pontjainak halmaza vagy a valós számpárok halmaza
- $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, illetve $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$ : az 1. síknegyed pontjai (a tengelyek nem tartoznak bele, illetve a tengelyek is beletartoznak)


## Azonosságok

Asszociativitás: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $\quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Kommutativitás: $A \cap B = B \cap A$, $\quad A \cup B = B \cup A$
Disztributivitás: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $\quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

De Morgan-azonosságok: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

## Logikai szita formula

Jelölje $|M|$ az $M$ halmaz elemeinek számát. Ekkor fennálnak a következő azonosságok ($A$, $B$, $C$ véges halmazok):

1. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
2. $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$

## Feladat

Hány olyan 100-nál nem nagyobb pozitív egész szám van, amely
a) osztható 2-vel vagy 3-mal;
b) osztható 2-vel, 3-mal vagy 5-tel;
b) nem osztható sem 2-vel, sem 3-mal, sem 5-tel?

**Megoldás:**

a) Legyen $A = \{$2-vel osztható számok$\}$ (piros színű)
$B = \{$3-mal osztható számok$\}$ (keretezett)
Ekkor $A \cap B = \{$2-vel és 3-mal osztható számok$\}$ (piros színű és keretezett)
$A \cup B = \{$2-vel vagy 3-mal osztható számok$\}$ (piros színű vagy keretezett)

$\Longrightarrow$ $|A| = 50$, $|B| = 33$, $|A \cap B| = 16$
$\Longrightarrow$ A szitaformula alapján a 2-vel vagy 3-mal osztható számok száma:
$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 50 + 33 - 16 = 67.$

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **2** | $\boxed{3}$ | **4** | 5 | $\boxed{\mathbf{6}}$ | 7 | **8** | $\boxed{9}$ | **10** | 11 | $\boxed{\mathbf{12}}$ | 13 | **14** | $\boxed{15}$ | **16** | 17 | $\boxed{\mathbf{18}}$ | 19 | **20** |
| $\boxed{21}$ | **22** | 23 | $\boxed{\mathbf{24}}$ | 25 | **26** | $\boxed{27}$ | **28** | 29 | $\boxed{\mathbf{30}}$ | 31 | **32** | $\boxed{33}$ | **34** | 35 | $\boxed{\mathbf{36}}$ | 37 | **38** | $\boxed{39}$ | **40** |
| 41 | $\boxed{\mathbf{42}}$ | 43 | **44** | $\boxed{45}$ | **46** | 47 | $\boxed{\mathbf{48}}$ | 49 | **50** | $\boxed{51}$ | **52** | 53 | $\boxed{\mathbf{54}}$ | 55 | **56** | $\boxed{57}$ | **58** | 59 | $\boxed{\mathbf{60}}$ |
| 61 | **62** | $\boxed{63}$ | **64** | 65 | $\boxed{\mathbf{66}}$ | 67 | **68** | $\boxed{69}$ | **70** | 71 | $\boxed{\mathbf{72}}$ | 73 | **74** | $\boxed{75}$ | **76** | 77 | $\boxed{\mathbf{78}}$ | 79 | **80** |
| $\boxed{81}$ | **82** | 83 | $\boxed{\mathbf{84}}$ | 85 | **86** | $\boxed{87}$ | **88** | 89 | $\boxed{\mathbf{90}}$ | 91 | **92** | $\boxed{93}$ | **94** | 95 | $\boxed{\mathbf{96}}$ | 97 | **98** | $\boxed{99}$ | **100** |

b) Legyen $A = \{$2-vel osztható számok$\}$ (piros színű)
$B = \{$3-mal osztható számok$\}$ (keretezett)
$C = \{$5-tel osztható számok$\}$ (kék hátterű)

Ekkor $A \cap B = \{$2-vel és 3-mal osztható számok$\}$ (piros színű és keretezett)
$A \cap C = \{$2-vel és 5-tel osztható számok$\}$ (piros színű és kék hátterű)
$B \cap C = \{$3-mal és 5-tel osztható számok$\}$ (keretezett és kék hátterű)
$A \cap B \cap C = \{$2-vel, 3-mal és 5-rel osztható számok$\}$
(piros színű és keretezett és kék hátterű)

$\Longrightarrow$ $|A| = 50$, $|B| = 33$, $|C| = 20$,
$|A \cap B| = 16$, $|A \cap C| = 10$, $|B \cap C| = 6$, $|A \cap B \cap C| = 3.$

$\Longrightarrow$ A szitaformula alapján a 2-vel, 3-mal vagy 5-tel osztható számok száma:
$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| =$
$= 50 + 33 + 20 - 16 - 10 - 6 + 3 = 74$

c) $100 - 74 = 26$ olyan szám van, ami nem osztható sem 2-vel, sem 3-mal, sem 5-tel.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 | 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

# Számtani és mértani sorozatok

## Számtani sorozatok

**Definíció:** Az $(a_n)$ sorozat számtani sorozat, ha minden $n$ pozitív egészre $a_{n+1} - a_n = d$
vagy $a_{n+1} = a_n + d$, ahol $d$ a differencia.

**Állítás:** Az $(a_n)$ számtani sorozat $n$-edik tagja: $a_n = a_1 + (n-1)\,d$.

**Bizonyítás:** Teljes indukcióval.

1) lépés: $a_2 = a_1 + d$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2\,d$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2\,d) + d = a_1 + 3\,d \qquad \Longrightarrow \; n = 1, 2, 3, 4 \text{ esetén igaz az állítás.}$$

2) lépés: Tegyük fel, hogy $a_{n-1} = a_1 + (n-2)\,d$. Ekkor a definíció alapján

$$a_n = a_{n-1} + d = (a_1 + (n-2)\,d) + d = a_1 + (n-1)\,d$$

Ez éppen a bizonyítandó egyenlőség, tehát az állítás minder $n$-re igaz.

## Számtaniközép-tulajdonság

Ha $(a_n)$ számtani sorozat, akkor $\begin{cases} a_{n-1} = a_n - d \\ a_{n+1} = a_n + d \end{cases} \Longrightarrow \; a_{n-1} + a_{n+1} = (a_n - d) + (a_n + d) = 2\,a_n$

Így minden $n \geq 2$ egész esetén: $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

Hasonlóan, minden $n > k$ esetén $a_n = \dfrac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$

## Az első $n$ tag összege

**Állítás:** Az $(a_n)$ számtani sorozat első $n$ tagjának összege:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2\,a_1 + (n-1)\,d}{2} \cdot n$$

**Bizonyítás:**
Az első $n$ tag összegét kétféleképpen felírva, majd az egyenleteket összeadva:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$
$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$
-----------------------------------------------
$2\,S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$

Az összeg minden tagja $a_1 + a_n$-nel egyenlő, ugyanis

$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n$
$a_3 + a_{n-2} = (a_1 + 2\,d) + (a_n - 2\,d) = a_1 + a_n$ stb.

Így $2\,S_n = (a_1 + a_n) \cdot n \implies S_n = \frac{a_1 + \boldsymbol{a_n}}{2} \cdot n = \frac{a_1 + \boldsymbol{a_1 + (n-1)\,d}}{2} \cdot n = \frac{2\,a_1 + (n-1)\,d}{2} \cdot n$

## Mértani sorozatok

**Definíció:** Az $(a_n)$ sorozat mértani sorozat, ha minden $n$ pozitív egészre $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ vagy $a_{n+1} = a_n \cdot q$,

ahol $a_n \neq 0$ és $q$ a kvóciens vagy hányados.

**Állítás:** Az $(a_n)$ mértani sorozat $n$-edik tagja: $a_n = a_1\, q^{n-1}$.

## Mértaniközép-tulajdonság

Ha $(a_n)$ mértani sorozat, akkor $\begin{cases} a_{n-1} = \frac{a_n}{q} \\ a_{n+1} = a_n\, q \end{cases} \implies a_{n-1} \cdot a_{n+1} = \frac{a_n}{q} \cdot a_n\, q = a_n^2 \implies |\, a_n \,| = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$

Hasonlóan, minden $n > k$ esetén $|\, a_n \,| = \sqrt{a_{n-k} \cdot a_{n+k}}$

## Az első $n$ tag összege

**Állítás:** Az $(a_n)$ mértani sorozat első $n$ tagjának összege:
1. Ha $q = 1$, akkor $S_n = n \cdot a_1$.
2. Ha $q \neq 1$, akkor $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

**Bitonyítás:**
1. Ha $q = 1$, akkor $S_n = a_1 + a_1 + a_1 + \ldots + a_1 + a_1 = n \cdot a_1$.

2. Ha $q \neq 1$, akkor az első $n$ tag összegét $q$-val szorozva, majd a második egyenletből az elsőt kivonva:

$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}$
$S_n \cdot q = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \ldots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n$
---------------------------------------------------------
$S_n \cdot q - S_n = a_1 q^2 - a_1$

$S_n(q-1) = a_1(q^n - 1) \qquad \Longrightarrow S_n = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ (ahol $q \neq 1$).

# Feladatok

**1.** Egy számtani sorozat első tagja 120, a nyolcadik tagja a sorozat differenciájával egyenlő. Mennyi a sorozat második tagja?

**2.** Egy könyvszekrény alsó polcán 18 könyv van, és fölötte minden polcon hárommal több, mint az alatta lévőn. Összesen hány polc van a könyvszekrényben, ha tudjuk, hogy a legfelső polcon 50-nél több, de 54-nél kevesebb könyv van?

**3.** Határozza meg az első 100 hárommal osztható pozitív egész szám összegét!

**4.** Egy számtani sorozat első három tagjának összege 12, a harmadik, negyedik, és ötödik tag összege 30. Mennyi az első 10 tag összege?

**5.** Egy moziterem nézőterének utolsó, huszadik sorában 34 férohely van. Az első sortól kezdve minden következő sorban eggyel több szék van, mint az előtte lévőn. Hányan lehetnek a moziban szombat este egy teltházas előadás alatt?

**6.** Egy derékszögű háromszög oldalhosszai számtani sorozatot alkotnak. A köréírt kör sugara 5 cm. Mennyi a háromszög kerülete?

**7.** Egy háromszög oldalai egy számtani sorozat egymást követő tagjai. A háromszög kerülete 36 cm, legrövidebb és leghosszabb oldalának szorzata 128 cm. Hány centiméter hosszú a háromszög leghosszabb oldala?

**8.** Három szám mértani sorozatot alkot. Szorzatuk −8, összegük 3. Határozzuk meg a sorozat első három tagját.

**9.** Egy mértani sorozat első három tagjának összege −7, az első és a harmadik tag szorzata 9. Határozzuk meg a sorozat első három tagját.

**10.** Egy mértani sorozat első 5 tagjának szorzata 1, az első három tag összege 3. Határozzuk meg a sorozat első tagját és hányadosát.

# Eredmények

**1.** 100 **2.** 12 **3.** 15150 **4.** 145 **5.** 490 **6.** 24 cm **7.** 16 cm **8.** 1, −2, 4 vagy 4, −2, 1

**9.** −1, 3, −9 vagy −9, 3, −1 **10.** $a_1 = 1$, $q = 1$ vagy $a_1 = 4$, $q = -\dfrac{1}{2}$