4. előadás

A logaritmus fogalma. Arány- és százalékszámítás.

2. A logaritmus fogalma

Definíció

A b szám a alapú logaritmusa az a kitevő, amelyre a-t emelve b-t kapunk:
$\log_a b = c \iff a^c = b \quad (a, b \in \mathbb{R}^+,\ a \neq 1,\ c \in \mathbb{R})$

A logaritmus alapja a, argumentuma b.

Következmény

- $\log_a(a^c) = c, \qquad a^{\log_a b} = b$
- $\log_a 1 = 0, \qquad \log_a a = 1, \qquad \log_a\left(\frac{1}{a}\right) = \log_a\left(a^{-1}\right) = -1$

Azonosságok

$(a, b, x, y \in \mathbb{R}^+,\ a \neq 1,\ b \neq 1,\ c \in \mathbb{R})$

1. Szorzat logaritmusa: $\log_a(x\,y) = \log_a x + \log_a y$
2. Hányados logaritmusa: $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
3. Hatvány logaritmusa: $\log_a(x^c) = c \cdot \log_a x$
4. Áttérés más alapú logaritmusra: $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$

Néhány következmény

1. $\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$
2. $\log_{\frac{1}{a}} b = \frac{\log_a b}{\log_a\left(\frac{1}{a}\right)} = -\log_a b$
3. $\log_a\left(\frac{1}{b}\right) = \log_a\left(b^{-1}\right) = -\log_a b$
4. $\log_{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{\log_a\left(\frac{1}{b}\right)}{\log_a\left(\frac{1}{a}\right)} = \frac{-\log_a b}{-1} = \log_a b$

Jelölés

Természetes alapú logaritmus: $\ln x = \log_e x$, ahol $e \approx 2.7182818 \ldots$ az Euler-féle szám.
10-es alapú logaritmus: $\lg x = \log_{10} x$.

Feladatok

1. Számítsuk ki a következő kifejezések értékét.

a) $\log_2 2$, $\log_2 4$, $\log_2 8$, $\log_2 16$, $\log_2\left(\frac{1}{2}\right)$, $\log_2\left(\frac{1}{4}\right)$, $\log_2\left(\frac{1}{8}\right)$, $\log_2\left(\frac{1}{16}\right)$

b) $\log_{\frac{1}{2}} 2$, $\log_{\frac{1}{2}} 4$, $\log_{\frac{1}{2}} 8$, $\log_{\frac{1}{2}} 2$, $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)$, $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}\right)$, $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{8}\right)$, $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{16}\right)$

c) $\log_2 1$, $\log_{\frac{1}{2}} 1$, $\log_2 0$, $\log_2(-1)$

Megoldás. Írjuk fel az argumentumot az alap hatványaként. Ekkor a logaritmus értéke az argumentum kitevője lesz.

a)

- $\log_2 2 = \log_2 2^1 = 1$
- $\log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$
- $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$
- $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$
- $\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2 2^{-1} = -1$
- $\log_2\left(\frac{1}{4}\right) = \log_2\left(\frac{1}{2^2}\right) = \log_2\left(2^{-2}\right) = -2$
- $\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = \log_2\left(\frac{1}{2^3}\right) = \log_2 2^{-3} = -3$
- $\log_2\left(\frac{1}{16}\right) = \log_2\left(\frac{1}{2^4}\right) = \log_2 2^{-4} = -4$

b)

- $\log_{\frac{1}{2}} 2 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right) = -1$
- $\log_{\frac{1}{2}} 4 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right) = -2$
- $\log_{\frac{1}{2}} 8 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right) = -3$
- $\log_{\frac{1}{2}} 16 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}\right) = -4$
- $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\right) = 1$
- $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}\right) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\right) = 2$
- $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{8}\right) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\right) = 3$
- $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{16}\right) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\right) = 4$

c)

- $\log_2 1 = \log_2 2^0 = 0$
- $\log_{\frac{1}{2}} 1 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\right) = 0$
- $\log_2 0$: nincs értelmezve
- $\log_2(-1)$: nincs értelmezve

2. Számítsuk ki a következő kifejezések értékét.

a) $\log_4 2$, $\log_8 2$, $\log_{16} 2$

b) $\log_4\left(\frac{1}{2}\right)$, $\log_8\left(\frac{1}{2}\right)$, $\log_{16}\left(\frac{1}{2}\right)$

Megoldás.

a)

- $\log_4 2 = \log_4 \sqrt{4} = \log_4 4^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$
- $\log_8 2 = \log_8 \sqrt[3]{8} = \log_8 8^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$
- $\log_{16} 2 = \log_{16} \sqrt[4]{16} = \log_{16} 16^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$

b) Használhatjuk például a következő azonosságokat:

Hányados logaritmusa: $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

Hatvány logaritmusa: $\log_a(x^c) = c \cdot \log_a x$

- $\log_4\left(\frac{1}{2}\right) = \log_4 1 - \log_4 2 = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$
- $\log_8\left(\frac{1}{2}\right) = \log_8 1 - \log_8 2 = 0 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$
- $\log_{16}\left(\frac{1}{2}\right) = \log_{16} 1 - \log_{16} 2 = 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$
- $\log_4\left(\frac{1}{2}\right) = \log_4(2^{-1}) = -\log_4 2 = -\frac{1}{2}$
- $\log_8\left(\frac{1}{2}\right) = \log_8(2^{-1}) = -\log_8 2 = -\frac{1}{3}$
- $\log_{16}\left(\frac{1}{2}\right) = \log_{16}(2^{-1}) = -\log_{16} 2 = -\frac{1}{4}$

3. Számítsuk ki a következő kifejezések értékét.

a) $\log_8 4$ b) $\log_4 8$

1. megoldás

a) $\log_8 4 = ?$ Írjuk fel a 4-et a 8 hatványaként.

$$2^3 = 8,\ \ 2^2 = 4 \implies 2 = \sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} \implies 4 = 2^2 = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 8^{\frac{1}{3}\cdot 2} = 8^{\frac{2}{3}}$$

$$\implies \log_8 4 = \log_8 8^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$$

b) $\log_4 8 = ?$ Írjuk fel a 8-at a 4 hatványaként.

$$2^3 = 8,\ \ 2^2 = 4 \implies 2 = \sqrt{4} = 4^{\frac{1}{2}} \implies 8 = 2^3 = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 4^{\frac{1}{2}\cdot 3} = 4^{\frac{3}{2}}$$

$$\implies \log_4 8 = \log_4 4^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$$

2. megoldás: A feladat egyszerűbben is megoldható, ha a $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$ azonosság alapján áttérünk 2-es alapú logaritmusra:

a) $\log_8 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 8} = \frac{\log_2 2^2}{\log_2 2^3} = \frac{2}{3}$

b) $\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{\log_2 2^3}{\log_2 2^2} = \frac{3}{2}$

Észrevétel: $\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$ $(a, b > 0,\ a \neq 1,\ b \neq 1)$

4. Számítsuk ki a következő kifejezések értékét.

a) $A = \log_2 2.4 + \log_2 3 - \log_2 0.9$ b) $B = 4\log_6 2 + 2\log_6 3 - \log_6 4$ c) $C = \frac{\lg 25}{2} + \frac{\lg 8}{3}$

Megoldás. Használjuk fel a következő azonosságokat:

1. $\log_a(x\,y) = \log_a x + \log_a y$ 2. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ 3. $\log_a(x^c) = c \cdot \log_a x$

a) Az 1. azonosság alapján: $A = \log_2 2.4 + \log_2 3 - \log_2 0.9 = \log_2(2.4 \cdot 3) - \log_2 0.9 =$

A 2. azonosság alapján: $= \log_2(7.2) - \log_2 0.9 = \log_2\left(\frac{7.2}{0.9}\right) = \log_2\left(\frac{72}{9}\right) = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$

b) A 3. azonosság alapján: $B = \mathbf{4} \log_6 \mathbf{2} + \mathbf{2} \log_6 \mathbf{3} - \log_6 4 = \log_6 \mathbf{2^4} + \log_6 \mathbf{3^2} - \log_6 4 =$

Az 1. és 2. azonosság alapján: $= \log_6 \frac{2^4 \cdot 3^2}{4} = \log_6 \frac{16 \cdot 9}{4} = \log_6(4 \cdot 9) = \log_6 36 = \log_6 6^2 = 2$

c) A 3. azonosság alapján: $C = \frac{\lg 25}{2} + \frac{\lg 8}{3} = \mathbf{\frac{1}{2}} \lg \mathbf{25} + \mathbf{\frac{1}{3}} \lg \mathbf{8} = \lg\left(\mathbf{25^{\frac{1}{2}}}\right) + \lg\left(\mathbf{8^{\frac{1}{3}}}\right) = \lg\left(\sqrt{25}\right) + \lg\left(\sqrt[3]{8}\right) =$

Az 1. azonosság alapján: $= \lg 5 + \lg 2 = \lg(5 \cdot 2) = \lg 10 = 1$

Feladatok

A logaritmus fogalma

Számítsuk ki az alábbi kifejezések értékét:

1. a) $\lg 0.001$ **b)** $\lg 10\,000$ **c)** $\lg \sqrt{10}$ **d)** $\ln e$ **e)** $\ln 1$ **f)** $\ln e^3$ **g)** $\ln \frac{1}{e^2}$

2. a) $\log_3(81)$ **b)** $\log_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ **c)** $\log_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{8}\right)$ **d)** $\log_{\frac{1}{3}}(27)$ **e)** $\log_5\left(\frac{1}{\sqrt{125}}\right)$ **f)** $\log_{\frac{1}{5}}(25)$

3. a) $\log_{\sqrt{2}}(8)$ **b)** $\log_8\left(\sqrt{2}\right)$ **c)** $\log_9(27)$ **d)** $\log_{27}(9)$ **e)** $\log_{16}(8)$ **f)** $\log_{16}\left(\frac{1}{8}\right)$

4. a) $e^{\ln 2}$ **b)** $10^{\lg 5}$ **c)** $10^{-\lg 5}$ **d)** $4^{\log_2(3)}$

Számítsuk ki a következő kifejezések értékét:

5. a) $2^{\log_4 9}$ **b)** $e^{-\ln 2}$ **c)** $9^{1+\log_3 \frac{1}{2}}$ **d)** $\sqrt{6^{\log_6 25}}$

6. a) $\left(\sqrt{5}\right)^{\log_{25} 16}$ **b)** $25^{\log_{\sqrt{5}} 2}$ **c)** $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\log_4 81}$ **d)** $\left(\frac{1}{\sqrt{27}}\right)^{\log_3 4}$ **e)** $\left(\sqrt{2}\right)^{\log_8 64}$

7. a) $25^{1+\log_5 2}$ **b)** $5^{\log_{25} 36+1}$ **c)** $36^{1-\log_6 2}$ **d)** $\sqrt{5}\,\left(8^{\log_{64} 5} + 3^{1+\log_9 5}\right)$

8. a) $\sqrt[3]{10^{3+\lg 27}}$ **b)** $\sqrt{100^{2-\lg 5}}$ **c)** $\sqrt{81^{1-\log_2 \sqrt{2}}}$ **d)** $\sqrt[3]{7^{\log_{\sqrt{7}} 2-\log_{49} \frac{1}{4}}}$

9. a) $3^{\log_8 4}$ **b)** $\log_{\sqrt[4]{3}}\left(\frac{1}{27}\right)$ **c)** $81^{\log_{27} 9}$ **d)** $2^{-\log_{125} 25}$

Arány- és százalékszámítás

1. András és Béla együtt 70 évesek. András ma kétszer annyi idős, mint Béla volt akkor, amikor András annyi idős volt, mint Béla most. Hány éves Béla?

2. A bergengóc tudósok szerint egy jégeső a réti csigák 60%-át pusztítja el. A héten már harmadszor volt jégeső. Lelkes gimnazisták megszámolták, hogy a jégesőket követően összesen 16 csiga maradt életben a réten. Átlagosan hány csiga élhetett a réten kezdetben, a bergengóc csigaszám-becslési modell szerint?

3. Festéktüsszentő Hapci Benő testtömegének 90%-a víz. Festéktüsszentés céljából permetező végű orrával felszippant 2 liter festékes vizet, így összesen 47 kg víz lesz a szervezetében. Hány kilós volt eredetileg Benő, ha a festékes víz szárazanyag-tartalmától eltekintünk, és 1 l víz 1 kg?

4. A CutIt vállalat munkagépével 24 nap alatt lehet kivágni egy hektár őserdőt, a CutThemAll cég munkagépével 16 nap alatt lehet ugyanezt a hektár ősfát kivágni. Ha ezekből egy-egy ilyen gép együtt dolgozik, hány nap alatt vágja ki az egy hektár ősfát?

5. Két csapon keresztül 4 óra alatt telik meg a benzintartály. Ha csak az egyik van nyitva, a tartály 7 óra alatt lesz tele. Hány óra alatt telik meg a másik csapon keresztül a tartály?

6. Két kőműves együttes munkával 6 nap alatt épít fel egy falat. Hány nap alatt építenék fel a falat külön-külön, ha az egyiknek az egész munka 5 nappal tovább tartana, mint a másiknak?

7. András egyedül 6 nap alatt ássa fel a kertet, András és Béla együtt 2 nap alatt, András, Béla és Cecil együtt 1 nap alatt. Hány nap alatt ássa fel a kertet Béla, illetve Cecil külön-külön, ha csak egyedül dolgoznak?

Eredmények

A logaritmus fogalma

1. a) $\lg 0.001 = \log_{10} 10^{-3} = -3$ **b)** $\lg 10\,000 = \lg 10^4 = 4$ **c)** $\lg \sqrt{10} = \lg 10^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

d) $\ln e = \log_e e^1 = 1$ **e)** $\ln 1 = \ln e^0 = 0$ **f)** $\ln e^3 = 3$ **g)** $\ln \frac{1}{e^2} = \ln e^{-2} = -2$

2. a) $\log_3(81) = \log_3(3^4) = 4$ **b)** $\log_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \log_2\left(2^{-\frac{1}{2}}\right)$ **c)** $\log_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{8}\right) = \log_{\frac{1}{2}}\left(2^{\frac{3}{2}}\right) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}\right) = -\frac{3}{2}$,

vagy: $\log_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{8}\right) = \frac{\log_2\left(\sqrt{8}\right)}{\log_2\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\log_2\left(2^{\frac{3}{2}}\right)}{\log_2(2^{-1})} = \frac{\frac{3}{2}}{-1} = -\frac{3}{2}$ **d)** $\log_{\frac{1}{3}}(27) = \log_{\frac{1}{3}}(3^3) = \log_{\frac{1}{3}}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\right) = -3$

e) $\log_5\left(\frac{1}{\sqrt{125}}\right) = \log_5\left(5^{-\frac{3}{2}}\right) = -\frac{3}{2}$ **f)** $\log_{\frac{1}{5}}(25) = \frac{\log_5(25)}{\log_5\left(\frac{1}{5}\right)} = \frac{\log_5(5^2)}{\log_5(5^{-1})} = \frac{2}{-1} = -2$

3. a) $\log_{\sqrt{2}}(8) = \log_{\sqrt{2}}\left(\left(\sqrt{2}\right)^6\right) = 6$, vagy: $\log_{\sqrt{2}}(8) = \frac{\log_2(8)}{\log_2\left(\sqrt{2}\right)} = \frac{\log_2(2^3)}{\log_2\left(2^{\frac{1}{2}}\right)} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$

b) $\log_8\left(\sqrt{2}\right) = \log_8\left(\sqrt{\sqrt[3]{8}}\right) = \log_8\left(\sqrt[6]{8}\right) = \log_8\left(8^{\frac{1}{6}}\right) = \frac{1}{6}$, vagy: $\log_8\left(\sqrt{2}\right) = \frac{\log_2\left(\sqrt{2}\right)}{\log_2(8)} = \frac{\log_2\left(2^{\frac{1}{2}}\right)}{\log_2(2^3)} = \frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{6}$

c) $\log_9(27) = \frac{\log_3(27)}{\log_3(9)} = \frac{\log_3(3^3)}{\log_3(3^2)} = \frac{3}{2}$ **d)** $\log_{27}(9) = \frac{\log_3(9)}{\log_3(27)} = \frac{\log_3(3^2)}{\log_3(3^3)} = \frac{2}{3}$

e) $\log_{16}(8) = \frac{\log_2(8)}{\log_2(16)} = \frac{\log_2(2^3)}{\log_2(2^4)} = \frac{3}{4}$ **f)** $\log_{16}\left(\frac{1}{8}\right) = \log_{16}(8^{-1}) = -\log_{16}(8) = -\frac{3}{4}$

4. Használjuk fel: $a^{\log_a b} = b$ $\Longrightarrow$ **a)** $e^{\ln 2} = 2$ **b)** $10^{\lg 5} = 5$ **c)** $10^{-\lg 5} = 10^{\lg(5^{-1})} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$,

vagy: $10^{-\lg 5} = \frac{1}{10^{\lg 5}} = \frac{1}{5}$ **d)** $4^{\log_2(3)} = (2^2)^{\log_2(3)} = 2^{2\cdot\log_2(3)} = 2^{\log_2(3^2)} = 2^{\log_2(9)} = 9$,

vagy: $4^{\log_2(3)} = (2^2)^{\log_2(3)} = 2^{(\log_2(3))\cdot 2} = \left(2^{\log_2(3)}\right)^2 = (3)^2 = 9$

5. a) 3 **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{9}{4}$ **d)** 5 **6. a)** 2 **b)** 16 **c)** $\frac{1}{3}$ **d)** $\frac{1}{8}$ **e)** 2

7. a) 100 **b)** 30 **c)** 9 **d)** 20 **8. a)** 30 **b)** 20 **c)** 3 **d)** 2

9. a) $\sqrt[3]{9}$ **b)** -12 **c)** $\left(\sqrt[3]{3}\right)^8$ **d)** $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

Arány- és százalékszámítás

1. Legyen András és Béla jelenlegi életkora A és B, a régebbi életkoruk $A-x$, $B-x$. Ekkor az $A = 2\,(B-x)$, $A-x=B$, $A+B=70$ egyenletrendszerből $x=10$, $A=40$, $B=30$, tehát Béla ma 30 éves.

2. 250 **3.** 50 kg **4.** 9, 6 nap **5.** $\frac{28}{3}$ **6.** 10 és 15 **7.** Béla : 3 nap, Cecil : 2 nap