
11. előadás

Kombinatorika és valószínűségszámítás

Segédanyag: Képletgyűjtemény, 12. oldal: <https://math.bme.hu/bevmat/kepletek.pdf>

Feladatok

1. Egy 24 fős osztályban kisorsoljuk a *Dűne*, a *Randevú a Rámával* és az *Alapítvány* című könyveket. Egy diák csak egy könyvet kaphat. Hányféle kimenetele lehet a sorsolásnak?
2. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből hány olyan háromjegyű számot készíthetünk, melyben szerepel az 5-ös?
3. Mi annak a valószínűsége, hogy egy 2-essel kezdődő négyjegyű szám minden számjegye páros?
4. Egy dobozban 20 golyó van, amire 1-től 20-ig vannak az egész számok felírva. Találomra kihúzzuk egymás után az összeset. Mi annak a valószínűsége, hogy minden húzásra kisebbet húzunk, mint a következő húzásra? (A 20. húzást leszámítva - azután következő húzás nincs.)
5. 32 lapos magyar kártyacsomagból kihúzzuk először egy lapot, majd ennek visszarakása nélkül még egyet. Mi a valószínűsége annak, hogy mindkét kihúzott lap ász lesz? (A magyar kártyában négy ász van.)
6. Az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből ötjegyű számokat írunk fel véletlenszerűen. Mi annak a valószínűsége, hogy a felírt szám számjegyei között van legalább kettő számjegy, amely különböző?
7. Annát, Balázst, Csabit és Dórit véletlenszerűen leültetjük egymás mellé egy sorba. Mi annak a valószínűsége, hogy Anna és Balázs egymás mellé kerül?
8. A kétjegyű természetes számok közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mi a valószínűsége annak, hogy ez a szám kettővel vagy hárommal osztható?
9. Egy hét tagú baráti társaságban asztalitenisz körmérkőzéseket játszanak (mindenki játszik mindenkivel egy meccset). Eddig hat mérkőzést játszottak le. Mi a valószínűsége annak, hogy ha találomra kiválasztunk két játékost, akkor ők ketten még nem játszottak egymással?
10. Mennyi a valószínűsége, hogy három dobókockával dobott szám szorzata páros?
11. Két dobókockával dobunk egyszer. Mi annak a valószínűsége, hogy legfeljebb 5 a dobott számok összege?
12. Egy dobókockával egymás után dobunk ötször. Mi annak a valószínűsége, hogy az öt dobásból egyetlen egyszer, a negyedik dobásnál dobunk hármast?

- 13.** Egy alaposan összekevert francia kártyapakliból kihúzzunk 5 lapot. Mi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott lapok között lesz a pikk dáma? (A francia kártyapakli 52 lapos, pikk a négy „szín” közül az egyik, minden színből 13 lap van, minden színben pontosan egy dáma van.)
- 14.** Ármin, Boró és Cili egy-egy francia kártyapaklit tartanak a kezükben. Mi annak a valószínűsége, hogy ha találomra húznak a paklijaikból, akkor mindhárom diáknak király lesz a kezében? (A francia kártyapakli 52 lapos és egy pakliban négy király van.)
- 15.** Anna, Bia és Csabi egy 32 lapos magyar kártyacsomagból kihúznak egy-egy lapot. Mi annak a valószínűsége, hogy a három gyerek közül pontosan egynél van király? (A magyar kártyában négy király van.)
- 16.** Anna, Berci és Csabi kezében egy-egy 32 lapos magyar kártyapakli van. Mindannyian találomra húznak egy-egy kártyát a saját paklijukból. Mi annak a valószínűsége, hogy Anna és Berci királyt húzott, Csabi viszont nem? (Egy pakliban négy király van.)
- 17.** Kockapókerben 5 dobókockával dobunk egyszerre. Úgynevezett “kis sort” dobunk, ha a kockákon az 1, 2, 3, 4, 5 értékek láthatóak. Mennyi a valószínűsége annak, hogy “kis sort” dobunk? (Jó tanács: különböztessük meg a kockákat.)
- 18.** Kockapókerben 5 dobókockával dobunk egyszerre. Ha az öt dobott számból pontosan négy megegyezik, akkor “kis pókerről” beszélünk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy “kis pókerünk” lesz? (Jó tanács: különböztessük meg a kockákat.)

Eredmények

- 1.** $\frac{24!}{21!}$ **2.** $6^3 - 5^3$ **3.** $\frac{1}{8}$ **4.** $\frac{1}{20!}$ **5.** $\frac{3}{248}$ **6.** $\frac{5^5 - 5}{5^5}$ **7.** $\frac{1}{2}$ **8.** $\frac{2}{3}$ **9.** $\frac{5}{7}$ **10.** $\frac{7}{2^3}$
- 11.** $\frac{5}{18}$ **12.** $\frac{5^4}{6^5}$ **13.** $\frac{\binom{51}{4}}{\binom{52}{5}}$ **14.** $\frac{4^3}{52^3}$ **15.** $\frac{3 \cdot 4 \cdot 28 \cdot 27}{32 \cdot 31 \cdot 30}$ **16.** $\frac{4^2 \cdot 28}{32^3}$ **17.** $\frac{5!}{6^5}$ **18.** $\frac{25}{6^5}$

További gyakorló feladatok

- 19.** A 32 lapos magyar kártyából egyszerre 3 lapot húzzunk. Mi a valószínűsége annak, hogy a kihúzott lapok között legalább egy zöld van?
- 20.** Adjuk meg annak a valószínűségét, hogy egy totószelvény vaktában kitöltve, az első 13 mérkőzés eredménye közül éppen 8-at találunk el.
- 21.** Mi a valószínűsége, hogy egy lottószelvényt kitöltve pontosan k találatunk lesz ($k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$)? Mi a valószínűsége, hogy legalább 3 találatunk lesz?

22. 200 termék közül 30 selejtes. Találomra kivesszünk 10-et. Mi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztottak között

- a)** nem lesz selejtes; **b)** lesz selejtes;
c) pontosan két selejtes lesz; **d)** legfeljebb egy selejtes lesz,
 ha visszatevés nélkül választunk?

23. Oldjuk meg az előző feladatot úgy is, hogy a kiválasztott terméket minden húzás után visszatesszük.

24. Mennyi annak a valószínűsége, hogy 10 kockával dobva pontosan öt 6-ost dobunk?

25. Egy vendéglő egyik asztalánál ülő 8 vendég 2 sört, 4 süteményt és 2 kávét rendel. A pincér véletlenszerűen teszi a vendégek elé az ételeket. Mi a valószínűsége, hogy mindenki azt kapja, amit rendelt?

Eredmények

$$19. 1 - \frac{\binom{24}{3}}{\binom{32}{3}} \qquad 20. \frac{\binom{13}{8} \cdot 2^5}{3^{13}} = \binom{13}{8} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5$$

$$21. P(k \text{ találat}) = \frac{\binom{5}{k} \binom{85}{5-k}}{\binom{90}{5}} \qquad P(\text{legalább 3 találat}) = \sum_{k=3}^5 \frac{\binom{5}{k} \binom{85}{5-k}}{\binom{90}{5}}$$

$$22. \text{ a) } \frac{\binom{170}{10}}{\binom{200}{10}} \quad \text{ b) } \frac{\binom{200}{10} - \binom{170}{10}}{\binom{200}{10}} \quad \text{ c) } \frac{\binom{30}{2} \binom{170}{8}}{\binom{200}{10}} \quad \text{ d) } \frac{\binom{170}{10} + \binom{30}{1} \binom{170}{9}}{\binom{200}{10}}$$

$$23. \text{ a) } \frac{30^{10}}{200^{10}} \quad \text{ b) } \frac{200^{10} - 30^{10}}{200^{10}} \quad \text{ c) } \frac{\binom{10}{2} \cdot 30^2 \cdot 170^8}{200^{10}} \quad \text{ d) } \frac{170^{10} + \binom{10}{1} \cdot 30^1 \cdot 170^9}{200^{10}}$$

24. Az összes lehetőségek száma 6^{10} . A kedvező esetek számát így határozhatjuk meg: a 10 hely közül 5-öt $\binom{10}{5}$ -féleképpen választhatunk ki. Erre az 5 helyre 6-osokat írunk, a többi helyre pedig az

1, 2, 3, 4, 5 számok valamelyikét. Így a keresett valószínűség: $\frac{\binom{10}{5} 5^5}{6^{10}} = \binom{10}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^5 \left(\frac{5}{6}\right)^5$.

$$25. \frac{2! \cdot 4! \cdot 2!}{8!}$$