Bevezető matematika B, 2. zárthelyi dolgozat

2021. december 10.

Munkaidő: 90 perc. A dolgozat megírásához semmilyen segédeszköz nem használható.

Név: ______________________ Neptun-kód: ___________ Kurzus: _____

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	$\sum$

Feladatok

1. (6 pont) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\frac{\sqrt{16^{x-3}}}{8^{x+1}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{3x+1}$$

2. (3+4 pont) Oldja meg az alábbi egyenletet és egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:

a) $\log_8(\log_2(\log_3 x)) = \frac{1}{3}$ **b)** $\log_{\frac{1}{3}}(x+5) > -1$

3. (6 pont) Határozza meg az alábbi függvény értelmezési tartományát és zérushelyeit:

$$f(x) = \lg(\,|\,x+2\,|\,-3)$$

4. (6 pont) Invertálható-e az alábbi függvény? Ha igen, írja fel az inverzét (a választ indokolja):

$$f(x) = \sqrt[3]{x+5} - 2$$

5. (6 pont) Oldja meg az alábbi egyenletet a $[0; 2\pi]$ zárt intervallumon:

$$2\cos^2 x + 3\sin x = 3$$

6. (6 pont) Mennyi az **a** = (−2, 3) és **b** = (3, 4) vektorok által közbezárt szög koszinusza?

7. (7 pont) Az ABC háromszög csúcsai $A(1, 5)$, $B(-2, 8)$, $C(-4, 6)$.

a) Írja fel az A csúcson átmenő, BC oldalra merőleges f egyenes egyenletét.

b) Határozza meg az f egyenes és a BC oldal egyenesének M metszéspontját.

c) Az előzőek alapján számítsa ki az A csúcsból induló magasság hosszát.

8. (6 pont) András, Bence és Csabi egy 32 lapos magyar kártyacsomagból kihúznak egymás után, visszatevés nélkül egy-egy lapot. Mi annak a valószínűsége, hogy a három gyerek közül pontosan kettőnél van zöld? (A magyar kártyában 8 zöld van.)

Pontozási útmutató

1.

Bal és jobb oldal közös alapra hozása: **4 pont**
Kitevők egyenlősége és helyes eredmény: **2 pont**
Eredmény: $x = \frac{7}{5}$

2.

a) $\log_2(\log_3 x) = 8^{\frac{1}{3}} = 2$ **(1p)** $\Longrightarrow$ $\log_3 x = 2^2 = 4$ **(1p)** $\Longrightarrow$ $x = 3^4 = 81$ **(1p)**

b) kikötés: $x + 5 > 0$, azaz $x > -5$ **(1p)**
$\log_{\frac{1}{3}}(x + 5) > \log_{\frac{1}{3}} 3$ **(1p)**
$x + 5 < 3$ **(1p)**, mivel az $\frac{1}{3}$ alapú logaritmusfüggvény szig. mon. csökkenő
Eredmény: $-5 < x < -2$ **(1p)**

3.

Értelmezési tartomány:
$|x + 2| - 3 > 0 \Longleftrightarrow x + 2 > 3$ vagy $x + 2 < -3 \Longleftrightarrow x < -5$ vagy $x > 1$ **(3 pont)**
Zérushely:
$|x + 2| - 3 = 1 \Longleftrightarrow x + 2 = \pm 4 \Longleftrightarrow x = 2$ vagy $x = -6$ **(3 pont)**

4.

f invertálható, mivel szigorúan monoton növő **(2 pont)**
$f^{-1}(x) = (x + 2)^3 - 5$ **(3 pont)**, $x \in \mathbb{R}$ **(1 pont)**

5.

$2\cos^2 x + 3\sin x = 3$
$2 \cdot (1 - \sin^2 x) + 3\sin x = 3$ **(1 point)**
$2 - 2\sin^2 x + 3\sin x = 3$
$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$ **(1 pont)**
$(\sin x)_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4}$ **(1 pont)**
1. eset: $\sin x = 1 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{2}$ **(1 pont)**
2. eset: $\sin x = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = \frac{\pi}{6}$ vagy $x = \frac{5\pi}{6}$ **(2 pont)**

6.

$\mathbf{a} = (-2, 3)$, $\mathbf{b} = (3, 4)$
$\Longrightarrow \mathbf{a}\,\mathbf{b} = 6$ **(1p)**

$|\mathbf{a}| = \sqrt{13}$ **(1p)**

$|\mathbf{b}| = \sqrt{5}$ **(1p)**

$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\alpha$ **(1p)**

$\Longrightarrow \cos\alpha = \dfrac{6}{5\sqrt{13}}$ **(2p)**

7.

a) $e:\ x + y = 6$ **(2p)**

b) a BC oldal egyenese, $f:\ x - y = -10$ **(2p),** metszéspont: $M(-2, 8)$ **(1p)**

c) $\overrightarrow{AM} = (-3, 3)$, így $d(A, M) = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$ **(2p)**

8.

Kedvező esetek száma: $3\cdot 8\cdot 7\cdot 24$ **(3 pont)**

Összes esetek száma: $32\cdot 31\cdot 30$ **(2 pont)**

Valószínűség: $p = \dfrac{3\cdot 8\cdot 7\cdot 24}{32\cdot 31\cdot 30}$ **(1 pont)**