
2. előadás

Halmazok. Számtani és mértani sorozatok.

Halmazok

Definíció

Két halmazt akkor és csak akkor tekintünk **egyenlőnek**, ha elemeik ugyanazok.

Például: $\{1, 2\} = \{2, 1\} = \{1, 1, 2\} = \{1, 2, 2, 1, 2, 1\}$

A halmazt, amelynek nincs eleme, **üres halmaznak** nevezzük. Jele: $\emptyset$.

Az "x dolog eleme az A halmaznak" jelölése: $x \in A$.

Az "x dolog nem eleme az A halmaznak" jelölése: $x \notin A$.

Az A halmazt a B halmaz **részalmazának** nevezzük ($A \subseteq B$), ha az A minden eleme B-nek is eleme. Az A halmaz **valódi része** a B-nek ($A \subset B$), ha $A \subseteq B$, de $A \neq B$.

Halmazokról mindig csak mint egy adott **alaphalmaz** részalmazairól beszélünk, még ha ezt az alaphalmazt nem is nevezzük meg.

Halmazok megadása: $\{x \in \text{alaphalmaz} \mid \text{feltételek } x\text{-re}\}$

Példa: Az 1-nél kisebb pozitív valós számok halmaza: $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$,
azaz azon x valós számok halmaza, melyekre $0 < x < 1$.

Műveletek halmazokkal

Unió vagy egyesítés: Az A és B halmaz uniója azoknak az elemeknek a halmaza, amelyek a két halmaz közül legalább az egyikben benne vannak.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Metszet vagy közös rész: Az A és B halmaz metszete azoknak az elemeknek a halmaza, amelyek mindkét halmazban benne vannak.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

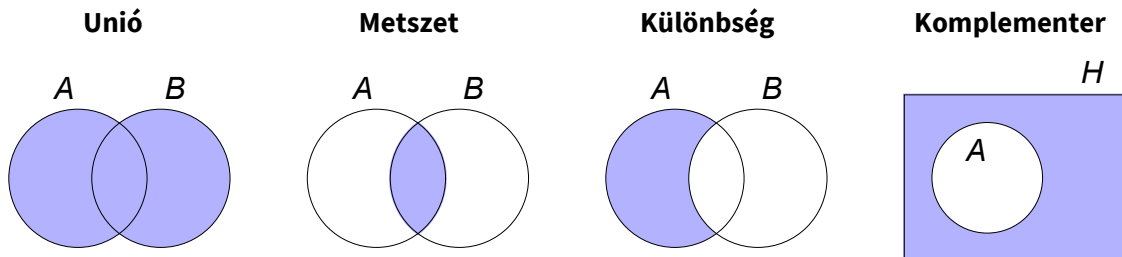
Különbség: Az A és B halmaz $A \setminus B$ különbsége az A összes olyan elemének a halmaza, amelyek nincsenek benne B-ben.

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

Komplementer: Az A halmaz H -ra vonatkozó komplementere a $H \setminus A$ halmaz, jele: $\bar{A}_H$.
Ha az alaphalmaz nincs megnevezve, a komplementert $\bar{A}$ jelöli.

$$\bar{A}_H = \{x \in H \mid x \notin A\}, \text{ illetve } \bar{A} = \{x \mid x \notin A\}$$

Azt mondjuk, hogy az A és B halmaz **diszjunkt**, ha $A \cap B = \emptyset$.



Jelölések

Valós számok halmaza: $\mathbb{R}$

Pozitív valós számok halmaza: $\mathbb{R}^+$

Nemnegatív valós számok halmaza: $\mathbb{R}_0^+$

Természetes számok halmaza: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$.

Megjegyzés: van, ahol az $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ definíció szerepel, ez csak megállapodás kérdése.

Egész számok halmaza: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

Pozitív egészek halmaza: $\mathbb{N}^+$ vagy $\mathbb{Z}^+$.

Racionális számok halmaza: $\mathbb{Q} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists k \in \mathbb{Z} \text{ és } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \text{ melyre } x = \frac{k}{n}\right\}$,

azaz azon valós számok halmaza, amelyek felírhatók két egész szám hányadosaként.

Nem racionális (irracionális) szám pl. $\sqrt{2} \approx 1.41421 \dots$, $\pi \approx 3.14159 \dots$, $e \approx 2.71828 \dots$.

Intervallumok

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

(zárt intervallum)

$$[a, b[= [a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

(balról zárt, jobbról nyílt intervallum)

$$]a, b] = (a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

(balról nyílt, jobbról zárt intervallum)

$$]a, b[= (a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

(nyílt intervallum)

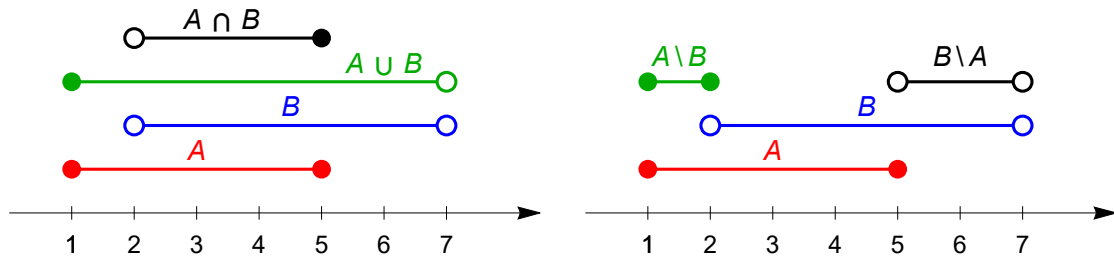
$$]a, +\infty[= (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$

$$]-\infty, b] = (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$$

$$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty), \quad \mathbb{R}^+ = (0, +\infty), \quad \mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty), \quad \mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$$

Példa

Legyen $A = [1, 5]$ és $B = (2, 7) \Rightarrow A \cup B = [1, 7]$ $A \setminus B = [1, 2]$
 $A \cap B = (2, 5]$ $B \setminus A = (5, 7)$



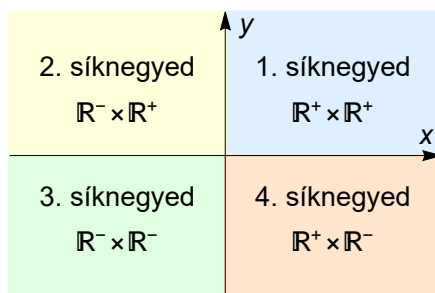
Descartes-szorzat

Az (a, b) rendezett pár 1. eleme a , 2. eleme b . A sorrend számít: $(a, b) \neq (b, a)$.

~~Megjegyzés: $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$~~

Descartes-szorzat: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ és } b \in B\}$

- Példák:**
- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$: a sík pontjainak halmaza vagy a valós számpárok halmaza
 - $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, illetve $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$: az 1. síknegyed pontjai (a tengelyek nem tartoznak bele, illetve a tengelyek is beletartoznak)



Azonosságok

Asszociativitás: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
 Kommutativitás: $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$
 Disztributivitás: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

De Morgan-azonosságok: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Logikai szita formula

Jelölje $|M|$ az M halmaz elemeinek számát. Ekkor fennállnak a következő azonosságok (A, B, C véges halmazok):

- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Feladat

Hány olyan 100-nál nem nagyobb pozitív egész szám van, amely

- a) osztható 2-vel vagy 3-mal;
- b) osztható 2-vel, 3-mal vagy 5-tel;
- b) nem osztható sem 2-vel, sem 3-mal, sem 5-tel?

Megoldás:

a) Legyen $A = \{2\text{-vel osztható számok}\}$ (piros színű)

$B = \{3\text{-mal osztható számok}\}$ (keretezett)

Ekkor $A \cap B = \{2\text{-vel és } 3\text{-mal osztható számok}\}$ (piros színű és keretezett)

$A \cup B = \{2\text{-vel vagy } 3\text{-mal osztható számok}\}$ (piros színű vagy keretezett)

$$\Rightarrow |A| = 50, |B| = 33, |A \cap B| = 16$$

$\Rightarrow$ A szitaformula alapján a 2-vel vagy 3-mal osztható számok száma:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 50 + 33 - 16 = 67.$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

b) Legyen $A = \{2\text{-vel osztható számok}\}$ (piros színű)

$B = \{3\text{-mal osztható számok}\}$ (keretezett)

$C = \{5\text{-tel osztható számok}\}$ (kék háttérű)

Ekkor $A \cap B = \{2\text{-vel és } 3\text{-mal osztható számok}\}$ (piros színű és keretezett)

$A \cap C = \{2\text{-vel és } 5\text{-tel osztható számok}\}$ (piros színű és kék háttérű)

$B \cap C = \{3\text{-mal és } 5\text{-tel osztható számok}\}$ (keretezett és kék háttérű)

$A \cap B \cap C = \{2\text{-vel, } 3\text{-mal és } 5\text{-rel osztható számok}\}$

(piros színű és keretezett és kék háttérű)

$$\Rightarrow |A| = 50, |B| = 33, |C| = 20,$$

$$|A \cap B| = 16, |A \cap C| = 10, |B \cap C| = 6, |A \cap B \cap C| = 3.$$

$\Rightarrow$ A szitaformula alapján a 2-vel, 3-mal vagy 5-tel osztható számok száma:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 50 + 33 + 20 - 16 - 10 - 6 + 3 = 74$$

c) $100 - 74 = 26$ olyan szám van, ami nem osztható sem 2-vel, sem 3-mal, sem 5-tel.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Számtani és mértani sorozatok

Számtani sorozatok

Definíció: Az (a_n) sorozat számtani sorozat, ha minden n pozitív egészre $a_{n+1} - a_n = d$ vagy $a_{n+1} = a_n + d$, ahol d a differencia.

Állítás: Az (a_n) számtani sorozat n -edik tagja: $a_n = a_1 + (n - 1) d$.

Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1) lépés: $a_2 = a_1 + d$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d \quad \Rightarrow \quad n = 1, 2, 3, 4 \text{ esetén igaz az állítás.}$$

2) lépés: Tegyük fel, hogy $a_{n-1} = a_1 + (n - 2) d$. Ekkor a definíció alapján

$$a_n = a_{n-1} + d = (a_1 + (n - 2) d) + d = a_1 + (n - 1) d$$

Ez éppen a bizonyítandó egyenlőség, tehát az állítás minden n -re igaz.

Számtaniközép-tulajdonság

$$\text{Ha } (a_n) \text{ számtani sorozat, akkor } \begin{cases} a_{n-1} = a_n - d \\ a_{n+1} = a_n + d \end{cases} \Rightarrow a_{n-1} + a_{n+1} = (a_n - d) + (a_n + d) = 2a_n$$

$$\text{Így minden } n \geq 2 \text{ egész esetén: } a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

$$\text{Hasonlóan, minden } n > k \text{ esetén } a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$$

Az első n tag összege

Állítás: Az (a_n) számtani sorozat első n tagjának összege:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

Bizonyítás:

Az első n tag összegét kétféleképpen felírva, majd az egyenleteket összeadva:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1$$

$$2 S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Az összeg minden tagja $a_1 + a_n$ -nel egyenlő, ugyanis

$$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n$$

$$a_3 + a_{n-2} = (a_1 + 2d) + (a_n - 2d) = a_1 + a_n \text{ stb.}$$

$$\text{Így } 2 S_n = (a_1 + a_n) \cdot n \Rightarrow S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{a_1 + a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

Mértani sorozatok

Definíció: Az (a_n) sorozat mértani sorozat, ha minden n pozitív egészre $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ vagy $a_{n+1} = a_n \cdot q$, ahol $a_n \neq 0$ és q a kvóciens vagy hányados.

Állítás: Az (a_n) mértani sorozat n -edik tagja: $a_n = a_1 q^{n-1}$.

Mértaniközép-tulajdonság

$$\text{Ha } (a_n) \text{ mértani sorozat, akkor } \begin{cases} a_{n-1} = \frac{a_n}{q} \\ a_{n+1} = a_n q \end{cases} \Rightarrow a_{n-1} \cdot a_{n+1} = \frac{a_n}{q} \cdot a_n q = a_n^2 \Rightarrow |a_n| = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

$$\text{Hasonlóan, minden } n > k \text{ esetén } |a_n| = \sqrt{a_{n-k} \cdot a_{n+k}}$$

Az első n tag összege

Állítás: Az (a_n) mértani sorozat első n tagjának összege:

$$1. \text{ Ha } q = 1, \text{ akkor } S_n = n \cdot a_1.$$

$$2. \text{ Ha } q \neq 1, \text{ akkor } S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Bitonyítás:

$$1. \text{ Ha } q = 1, \text{ akkor } S_n = a_1 + a_1 + a_1 + \dots + a_1 + a_1 = n \cdot a_1.$$

2. Ha $q \neq 1$, akkor az első n tag összegét q -val szorozva, majd a második egyenletből az elsőt kivonva:

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}$$

$$S_n \cdot q = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n$$

$$S_n \cdot q - S_n = a_1 q^2 - a_1$$

$$S_n(q - 1) = a_1(q^n - 1) \quad \Rightarrow S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad (\text{ahol } q \neq 1).$$

Feladatok

1. Egy számtani sorozat első tagja 120, a nyolcadik tagja a sorozat differenciájával egyenlő.
Mennyi a sorozat második tagja?
2. Egy könyvszekrény alsó polcán 18 könyv van, és fölötté minden polcon hárommal több, mint az alatta lévőn. Összesen hány polc van a könyvszekrényben, ha tudjuk, hogy a legfelső polcon 50-nél több, de 54-nél kevesebb könyv van?
3. Határozza meg az első 100 hárommal osztható pozitív egész szám összegét!
4. Egy számtani sorozat első három tagjának összege 12, a harmadik, negyedik, és ötödik tag összege 30. Mennyi az első 10 tag összege?
5. Egy moziterem nézőterének utolsó, huszadik sorában 34 férőhely van. Az első sortól kezdve minden következő sorban eggyel több szék van, mint az előtte lévőn. Hányan lehetnek a moziban szombat este egy teltházás előadás alatt?
6. Egy derékszögű háromszög oldalhosszai számtani sorozatot alkotnak. A köréírt kör sugara 5 cm. Mennyi a háromszög kerülete?
7. Egy háromszög oldalai egy számtani sorozat egymást követő tagjai. A háromszög kerülete 36 cm, legrövidebb és leghosszabb oldalának szorzata 128 cm. Hány centiméter hosszú a háromszög leghosszabb oldala?
8. Három szám mértani sorozatot alkot. Szorzatuk -8 , összegük 3 . Határozzuk meg a sorozat első három tagját.
9. Egy mértani sorozat első három tagjának összege -7 , az első és a harmadik tag szorzata 9 . Határozzuk meg a sorozat első három tagját.
10. Egy mértani sorozat első 5 tagjának szorzata 1 , az első három tag összege 3 . Határozzuk meg a sorozat első tagját és hányadosát.

Eredmények

1. 100 2. 12 3. 15150 4. 145 5. 490 6. 24 cm 7. 16 cm 8. 1, -2 , 4 vagy 4, -2 , 1
 9. -1 , 3, -9 vagy -9 , 3, -1 10. $a_1 = 1$, $q = 1$ vagy $a_1 = 4$, $q = -\frac{1}{2}$

