

### 3. előadás

Műveletek törtekkel, nevezetes azonosságok. A hatványozás és gyökvonás azonosságai.

#### Műveletek törtekkel

$$\begin{array}{ll} \text{Összeadás: } \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} & \text{Kivonás: } \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd} \quad \text{közös nevező!} \\ \text{Szorzás: } \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} & \text{Osztás: } \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} \end{array}$$

#### Nevezetes azonosságok

$$\begin{array}{ll} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 & (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 & (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ (a-b)(a+b) = a^2 - b^2 & a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \\ (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc & a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \\ a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \end{array}$$

#### Definíciók

Egész kitevőjű hatványok ( $n \in \mathbb{Z}^+$ ): **n: kitevő**

- Ha  $a \in \mathbb{R}$ :  $a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$  ( $n$  tényező),  $a^1 = a$
- Ha  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ :  $a^{-1} = \frac{1}{a}$ ,  $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$ ,  $a^0 = 1$

Racionális kitevőjű hatványok ( $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ ;  $k, n \in \mathbb{Z}^+$ ;  $k \geq 2$ ):

- $\sqrt[k]{a} = b \iff a = b^k$
- $a^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{a}$ ,  $a^{\frac{n}{k}} = \sqrt[k]{a^n}$ ,  $a^{-\frac{n}{k}} = \frac{1}{\sqrt[k]{a^n}}$  ( $a > 0$ )

Megjegyzés: Ha  $k$  páratlan, akkor  $a < 0$  esetén is értelmezhető  $\sqrt[k]{a}$ .

#### A hatványozás azonosságai

( $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ;  $x, y \in \mathbb{Z}$ ; vagy  $a, b \in \mathbb{R}^+$ ;  $x, y \in \mathbb{Q}$  vagy  $\mathbb{R}$ )

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

## A gyökvonás azonosságai

$$(a, b \in \mathbb{R}_0^+; k, m, n \in \mathbb{Z}^+; k, m \geq 2)$$

$$1. \sqrt[k]{a \cdot b} = \sqrt[k]{a} \cdot \sqrt[k]{b}$$

$$2. \sqrt[k]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[k]{a}}{\sqrt[k]{b}} \quad (b \neq 0)$$

$$3. \sqrt[k]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[k \cdot m]{a}$$

$$4. \left(\sqrt[k]{a}\right)^n = \sqrt[k]{a^n} = a^{\frac{n}{k}}$$

## Feladatok

1.

Hozzuk a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezéseket a változók lehetséges értékei mellett:

$$\text{a)} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2}{a+b} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right) : \frac{a+b}{a^2 b^2}$$

$$\text{b)} \left( \frac{x^2}{y^2} + \frac{y}{x} \right) : \left( \frac{x}{y^2} - \frac{1}{y} + \frac{1}{x} \right)$$

$$\text{c)} \left( \frac{b}{a^2 + ab} - \frac{2}{a+b} + \frac{a}{b^2 + ab} \right) : \left( \frac{b}{a} + \frac{a}{b} - 2 \right)$$

$$\text{d)} \left( \frac{x}{y^2 - xy} + \frac{y}{x^2 - xy} \right) : \frac{y^2 - x^2}{x^2 y + x y^2}$$

$$\text{e)} \left( \frac{b^2}{a^3 - ab^2} + \frac{1}{a+b} \right) : \left( \frac{a-b}{a^2 + ab} - \frac{a}{b^2 + ab} \right)$$

$$\text{f)} \frac{x^2 - y^2}{2} \left( \frac{1}{(x+y)^2} - \frac{1}{(x-y)^2} \right) : \left( \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y} \right)$$

$$\text{g)} \left( \frac{a^2 - 3ab}{a+b} + b \right) : \left( \frac{a}{a+b} - \frac{b}{b-a} - \frac{2ab}{a^2 - b^2} \right)$$

$$\text{h)} \left( \frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} \right) : \frac{x^3 y + x y^3}{x^4 - y^4}$$

2.

Hozzuk a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezéseket a változó lehetséges értékei mellett:

$$\text{a)} \sqrt[3]{\frac{\sqrt{x^9 \cdot \sqrt{x}}}{x^2 \cdot \sqrt[8]{x}}} \cdot \sqrt[8]{x^9}$$

$$\text{b)} \frac{\sqrt{x^5 \cdot \sqrt{x^{-8}}} \cdot \sqrt{x^6 \cdot \sqrt{x^3}}}{\sqrt[3]{x^{12}}}$$

$$\text{c)} \frac{\sqrt[4]{x^{-1} \cdot \sqrt[3]{x \cdot \sqrt{x}}}}{x^{-2} \cdot \sqrt{x^3}}$$

$$\text{d)} \frac{\sqrt{x^{-8} \cdot \sqrt{x^3}}}{\sqrt{x^5}} \cdot \sqrt{\frac{x^{11} \cdot \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}}$$

$$\text{e)} \sqrt{\frac{a}{\sqrt[3]{a^2 \sqrt{a}}}} \sqrt[4]{a}$$

$$\text{f)} \sqrt{a^3 \sqrt[4]{a \sqrt{a^{10}}}} - \sqrt{a^3 \sqrt{a^3}}$$

$$\text{g)} \left( \frac{a^2 b^3}{c^{-1} d^6} \right)^{-2} : \left( \frac{a^4 b^{-2}}{c^4 d} \right)^3$$

$$\text{h)} \sqrt[4]{\frac{a^6 b^{-2}}{c^6 d}} : \frac{a^{-2} d^7}{b^{14} c^2}$$

3.

Számítsuk ki az alábbi kifejezések értékét!

a)  $\sqrt{3 + \sqrt{8}} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{8}}$

b)  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$

c)  $\left( \sqrt{16 + 2\sqrt{55}} - \sqrt{16 - 2\sqrt{220}} \right)^2$

d)  $\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}} + \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}}$

---

## Eredmények

1. a)  $a + b$     b)  $x + y$     c)  $\frac{1}{a + b}$     d)  $\frac{x + y}{x - y}$     e)  $\frac{b}{b - a}$     f)  $x$     g)  $a - b$     h) 4

2. a)  $x^2$     b)  $x^{1/4}$     c)  $x^{3/8}$     d)  $\frac{1}{x^{1/3}}$     e)  $a^{1/3}$     f) 0    g)  $\frac{c^{10}d^{15}}{a^{16}}$     h)  $\frac{a^2b^3}{cd^2}$

3. a) 1    b)  $\frac{7}{3}$     c) 20    d)  $2\sqrt{2}$