

## 8. előadás

# Függvények tulajdonságai, ábrázolásuk

### A függvény fogalma

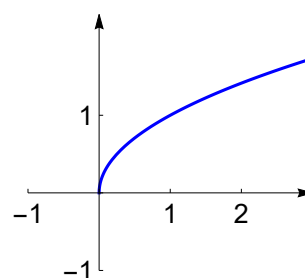
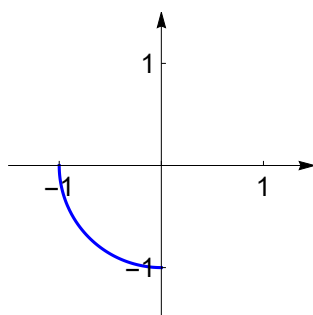
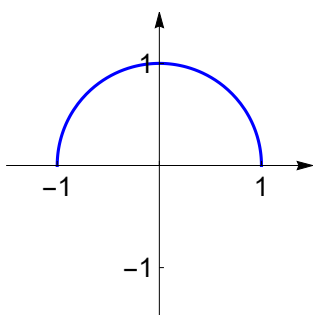
**Definíció:** • Legyen  $A$  és  $B$  két nemüres halmaz. Az  $f : A \rightarrow B$  függvény olyan egyértelmű hozzárendelés, amely **minden**  $x \in A$  elemhez hozzárendel **pontosan egy**  $y \in B$  elemet ( $y = f(x)$ ).

Az  $f$  függvény

- értelmezési tartománya (domain):  $D_f = A$
- értékkészlete azon  $B$ -beli elemek halmaza, amelyek valamely  $A$ -beli elemhez hozzá vannak rendelve (range):  $R_f = \{y \in B \mid \exists x \in A : y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in A\}$
- képhalmaza:  $B$  ( $R_f \subseteq B$ )

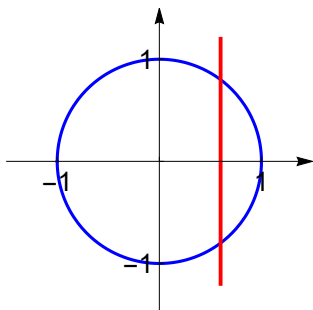
Példák függvénygrafikonokra: minden  $x \in D_f$ -hez pontosan egy  $y = f(x)$  tartozik

1)  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{1-x^2}$     2)  $f : [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -\sqrt{1-x^2}$     3)  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$

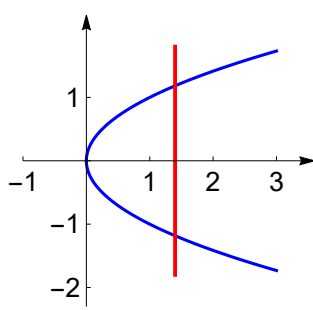


Az alábbi görbék nem függvények grafikonjai, mivel van olyan  $x$ , amelyhez egynél több  $y$  érték tartozik (grafikusan: van olyan függőleges egyenes, amely egynél több pontban metszi a görbét).

4)  $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm \sqrt{1-x^2}$



5)  $x = y^2 \Rightarrow y = \pm \sqrt{x}$



### Abszolútérték-függvény, hatványfüggvények

## Függvények néhány tulajdonsága

### Injektivitás

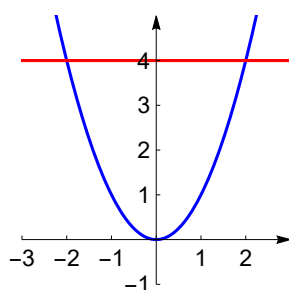
**Definíció:** Az  $f$  függvény **injektív** vagy **kölcsönösen egyértelmű**, ha minden  $x, y \in D_f$ ,  
 $x \neq y$  esetén  $f(x) \neq f(y)$ , azaz különböző értékekhez különböző értékeket rendel.  
 (Vagy: minden  $x, y \in D_f$  esetén  $x = y \iff f(x) = f(y)$ .)

Példa: 1)  $f(x) = x^2$  nem injektív  $\mathbb{R}$ -en, így pl.  $x^2 = 4 \iff |x| = 2 \iff x = \pm 2$

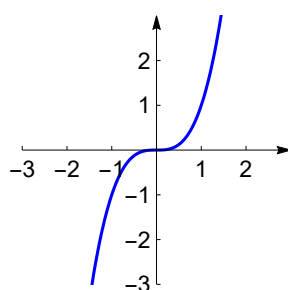
Grafikusan: van olyan vízszintes egyenes, ami egynél több pontban metszi a grafikont.

2)  $f(x) = x^3$  injektív  $\mathbb{R}$ -en (és  $R_f = \mathbb{R}$ ), így minden vízszintes egyenes pontosan egy pontban metszi a grafikont  $\implies$  minden  $a \in \mathbb{R}$  esetén az  $x^3 = a$  egyenletnek pontosan egy megoldása van ( $x = \sqrt[3]{a}$ ).

1)  $f(x) = x^2$



2)  $f(x) = x^3$



### Korlátosság

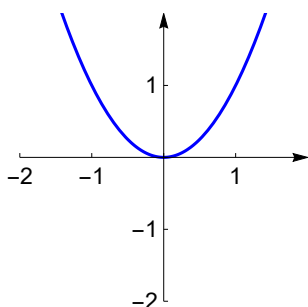
**Definíció:** • Az  $f$  függvény  $\begin{cases} \text{felülről korlátos,} \\ \text{alulról korlátos,} \end{cases}$  ha van olyan  $K \in \mathbb{R}$ , melyre  $\begin{cases} f(x) \leq K, \\ f(x) \geq -K, \end{cases}$  ha  $x \in D_f$ ,  
 vagy másképp  $\begin{cases} R_f \subset (-\infty, K], \\ R_f \subset [-K, \infty). \end{cases}$

• Az  $f$  függvény korlátos, ha alulról és felülről is korlátos, azaz van olyan  $K \in \mathbb{R}$ , melyre  $|f(x)| \leq K$ , ha  $x \in D_f$ , vagy másképp  $R_f \subset [-K, K]$ .

Példák:

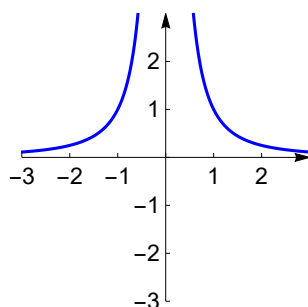
1)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$

alulról korlátos, felülről nem



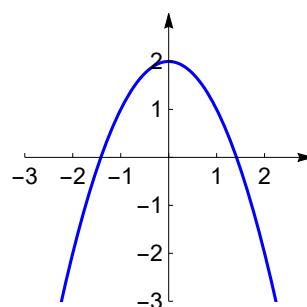
2)  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2}$

alulról korlátos, felülről nem



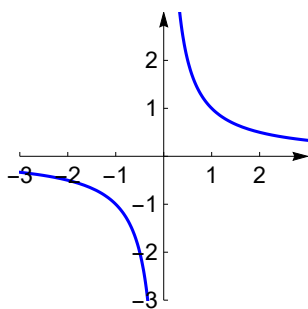
3)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2 - x^2$

felülről korlátos, alulról nem



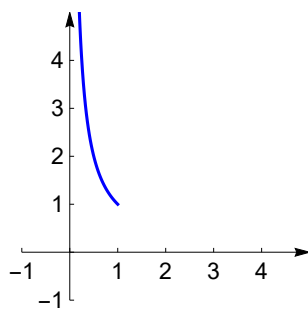
$$4) f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$$

nem korlátos



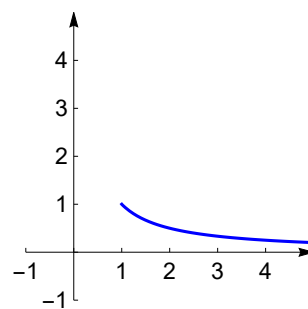
$$2) f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$$

alulról korlátos, felülről nem



$$3) f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$$

korlátos (alulról és felülről is)



## Monotonitás

**Definíció:** • Az  $f$  függvény  $\begin{cases} \text{monoton nő,} \\ \text{szigorúan monoton nő,} \end{cases}$  ha  $x < y \Rightarrow \begin{cases} f(x) \leq f(y) \\ f(x) < f(y) \end{cases} \quad (x, y \in D_f).$

• Az  $f$  függvény  $\begin{cases} \text{monoton csökken,} \\ \text{szigorúan monoton csökken,} \end{cases}$  ha  $x < y \Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq f(y) \\ f(x) > f(y) \end{cases} \quad (x, y \in D_f).$

**Észrevétel:** Ha  $f$  szigorúan monoton, akkor injektív.

Példákhoz ábrák: Képletgyűjtemény, 4. oldal: <https://math.bme.hu/bevmat/kepletek.pdf>

1) Szigorúan monoton nő pl.  $x \mapsto x^3$ ,  $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ ,  $x \mapsto \sqrt{x}$ ,  $x \mapsto x^{\frac{3}{2}}$

2) Szigorúan monoton csökken pl.  $x \mapsto x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

3)  $f(x) = x^2$  szig. mon. csökken, ha  $x \leq 0$  és szig. mon. nő, ha  $x \geq 0$ , de nem monoton, ha  $x \in \mathbb{R}$ .

4)  $f(x) = \frac{1}{x}$  szig. mon. csökken a  $(-\infty, 0)$  és  $(0, \infty)$  intervallumokon, de nem monoton, ha  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

5) Monoton nő és monoton csökken:  $f(x) = c$  konstans függvény.

## Paritás

**Definíció:** • Az  $f$  függvény **páros**, ha minden  $x \in D_f$  esetén  $-x \in D_f$  és  $f(x) = f(-x)$ , azaz  $f$  grafikonja tükrös az  $y$  tengelyre.

• Az  $f$  függvény **páratlan**, ha minden  $x \in D_f$  esetén  $-x \in D_f$  és  $f(-x) = -f(x)$ , azaz  $f$  grafikonja tükrös az origóra.

Példákhoz ábrák: Képletgyűjtemény, 4. oldal: <https://math.bme.hu/bevmat/kepletek.pdf>

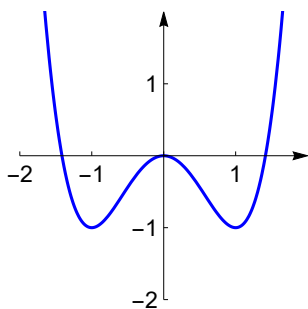
• Páros függvények pl.:  $x \mapsto |x|$ ,  $x \mapsto x^2$ ,  $x \mapsto x^4$ ,  $x \mapsto x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ ,  $x \mapsto x^{-4} = \frac{1}{x^4}$

• Páratlan függvények pl.:  $x \mapsto x$ ,  $x \mapsto x^3$ ,  $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ ,  $x \mapsto x^{-1} = \frac{1}{x}$ ,  $x \mapsto x^{-3} = \frac{1}{x^3}$

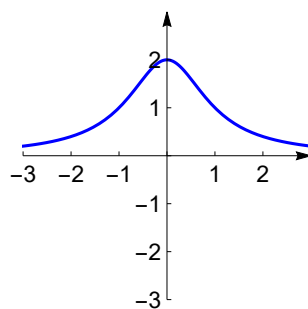
• Nem páros és nem páratlan pl.:  $x \mapsto \sqrt{x}$

Páros függvények pl.

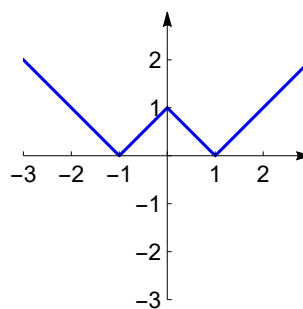
1)  $f(x) = x^4 - 2x^2$



2)  $f(x) = \frac{2}{1+x^2}$

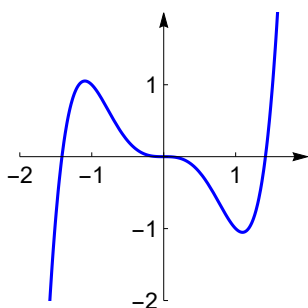


3)  $f(x) = ||x| - 1|$

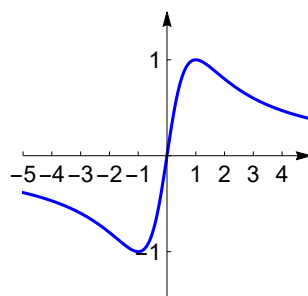


Páratlan függvények pl.

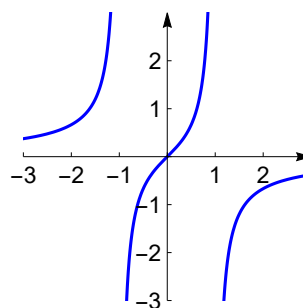
4)  $f(x) = x^5 - 2x^3$



5)  $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$



6)  $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$

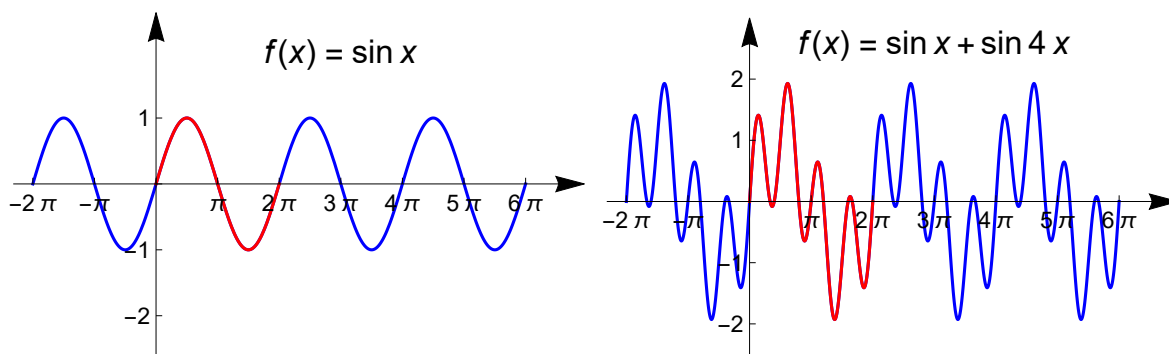


## Periodikusság

**Definíció:** Az  $f$  függvény **periodikus**  $p > 0$  periódussal, ha minden  $x \in D_f$  esetén  $x + p \in D_f$  és  $f(x + p) = f(x)$ .

Megjegyzés: A definíció geometriailag azt jelenti, hogy ha a függvénygrafikont a  $(0, p)$  vektorral eltoljuk, akkor önmagába megy át.

Példák: Trigonometrikus függvények (szinusz, koszinusz, tangens, kotangens), ld. később.



## Összetett függvény

**Definíció.** Az  $f$  külső és  $g$  belső függvényből készített összetett függvénynek nevezzük az

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

függvényt, melynek értelmezési tartománya  $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$ , azaz azon  $x$ -ek a  $g$  értelmezési tartományából, amelyekre  $g(x)$  benne van az  $f$  értelmezési tartományában.

**Megjegyzés:** Az  $f \circ g$  ("f kör g") függvénykompozíció vagy összetett függvény pontosan akkor létezik, hogy  $R_g \cap D_f \neq \emptyset$ .

## Példák

1. Legyen  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x}$  és  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x + 2$ .

Ekkor  $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 2) = \sqrt{x + 2}$

$$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \in [0, \infty)\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 2 \geq 0\} = [-2, \infty)$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 2$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in [0, \infty) \mid f(x) \in \mathbb{R}\} = \{x \geq 0 \mid \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} = [0, \infty)$$

2. Legyen  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$  és  $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \lg x$ .

Ekkor  $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\lg x) = \frac{1}{\lg x}$

$$D_{f \circ g} = \{x \in (0, \infty) \mid g(x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} = \{x > 0 \mid \lg x \neq 0\} = \{x > 0 \mid x \neq 1\} = (0, 1) \cup (1, \infty)$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \lg\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid f(x) \in (0, \infty)\} = \left\{x \neq 0 \mid \frac{1}{x} > 0\right\} = (0, \infty)$$

## Az értelmezési tartomány meghatározása

Ha egy függvény csak formulával van megadva, akkor az értelmezési tartományán azt a legbővebb halmazt értjük, ahol az adott kifejezés értelmezhető.

Kikötések az értelmezési tartomány meghatározásához:

1)  $\frac{1}{a}$  esetén  $a \neq 0$

2) páros gyökvonásnál:  $\sqrt{a}$ ,  $\sqrt[4]{a}$ ,  $\sqrt[6]{a}$  stb. esetén  $a \geq 0$

(páratlan gyökvonásnál:  $\sqrt[3]{a}$ ,  $\sqrt[5]{a}$  stb.  $a \in \mathbb{R}$  tetszőleges, nincs kikötés)

3)  $\log_a(b)$  esetén  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b > 0$

Ha több kikötést is teszünk, akkor ezeknek a feltételeknek egyszerre kell teljesülniük, tehát az értelmezési tartomány a megfelelő halmazok metszete lesz.

## Feladatok

Határozzuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát.

$$1. f(x) = \sqrt{-x^2 + x + 6}$$

Kikötés: A négyzetgyökjel alatti kifejezés nemnegatív:

$$-x^2 + x + 6 \geq 0 \iff x^2 - x - 6 \leq 0 \iff (x + 2)(x - 3) \leq 0$$

Az  $x \mapsto (x + 2)(x - 3)$  másodfokú függvény gyökei  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 3$ . Mivel a főegyüttható pozitív, ezért a grafikonja felfelé nyíló parabola, amely a két gyök között negatív.

Így az  $f$  függvény értelmezési tartománya:  $-2 \leq x \leq 3$ .

(Másképp: az  $x \mapsto -x^2 + x + 6 = -(x + 2)(x - 3)$  függvény főegyütthatója negatív, ezért a grafikonja lefelé nyíló parabola, amely a két gyök között pozitív  $\implies D_f = [-2, 3]$ .)

$$2. f(x) = \frac{\log_3(x + 1)}{16 - 2^{x^2}}$$

Kikötések: 1) A logaritmus argumentuma pozitív:  $x + 1 > 0 \iff x > -1$

2) A tört nevezője nem nulla:  $16 - 2^{x^2} \neq 0 \iff 2^{x^2} \neq 16 = 2^4 \iff x^2 \neq 4 \iff x \neq \pm 2$

$\implies$  az  $f$  függvény értelmezési tartománya:  $-1 < x < 2$  vagy  $x > 2$ .

$$3. f(x) = \sqrt{1 - \lg(x + 2)}$$

Kikötések: 1) A logaritmus argumentuma pozitív:  $x + 2 > 0 \iff x \geq -2$

2) A négyzetgyökjel alatti kifejezés nemnegatív:

$$1 - \lg(x + 2) \geq 0 \iff \lg(x + 2) \leq 1 = \lg 10 \implies x + 2 \leq 10 \iff x \leq 8$$

$\implies$  az  $f$  függvény értelmezési tartománya:  $-2 < x \leq 8$ .

## Inverz függvény

**Definíció:** Azt mondjuk, hogy az  $f$  függvény **invertálható**, ha kölcsönösen egyértelmű, azaz minden  $x, y \in D_f$ ,  $x \neq y$  esetén  $f(x) \neq f(y)$ .

Ekkor az  $f$  függvény inverzének nevezzük és  $f^{-1}$ -gyel jelöljük azt a függvényt, amely minden  $y \in R_f$  számhoz azt az  $x \in D_f$  számot rendeli ( $f^{-1}(y) = x$ ), amelyre  $f(x) = y$ .

**Megjegyzés:** A definícióból adódik, hogy

- $D_{f^{-1}} = R_f$  és  $R_{f^{-1}} = D_f$ ,
- minden  $x \in D_f$  esetén  $(f^{-1}(f(x))) = x$ ,
- minden  $y \in R_f$  esetén  $f(f^{-1}(y)) = y$ .

Az  $f^{-1}$  és  $f$  grafikonjai egymásnak az  $y = x$  egyenesre vonatkozó tükörképei.

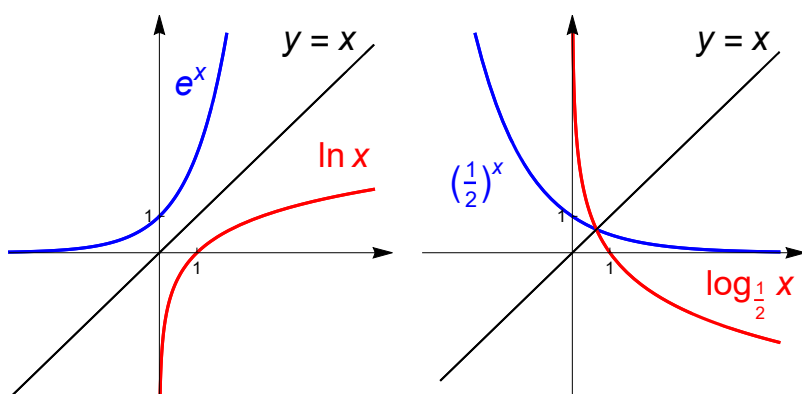
**Tétel:** Ha az  $f$  függvény szigorúan monoton, akkor invertálható, és az inverze is ugyanolyan értelemben szigorúan monoton (azaz  $f$  és  $f^{-1}$  egyszerre szig. mon. növekvő vagy szig. mon. csökkenő).

## Példák

1. Legyen  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ . Ekkor az  $a$  alapú exponenciális és logaritmusfüggvény egymás inverzei.

Ha  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ ,  $f(x) = a^x$  és  $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \log_a x$ , akkor

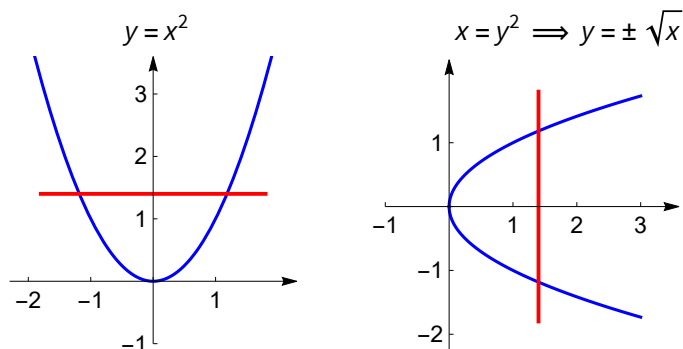
- minden  $x \in (0, \infty)$  esetén  $f(g(x)) = a^{\log_a x} = x$ , és
- minden  $x \in \mathbb{R}$  esetén  $g(f(x)) = \log_a(a^x) = x$ .



2. Az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$  függvény nem invertálható  $\mathbb{R}$ -en.

Láttuk, hogy az  $f(x) = x^2$  függvény ( $y = x^2$ ) nem injektív, azaz nem invertálható  $\mathbb{R}$ -en, mivel különböző értékekhez is ugyanazt az értéket rendel, pl.  $x^2 = 4$  esetén  $x = 2$  vagy  $x = -2$ .

Ezért a fordított hozzárendelést megadó görbe ( $x = y^2$ ) nem függvény grafikonja.



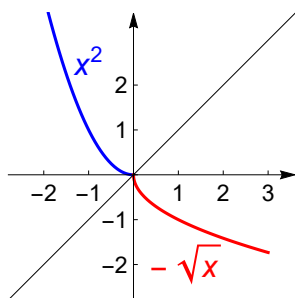
A függvényt leszűkíthetjük valamely alkalmas intervallumra úgy, hogy invertálható legyen.

Például  $f$  szigorúan monoton a  $(-\infty, 0]$  vagy  $[0, \infty)$  vagy  $[2, 5]$  stb. intervallumokon, így a

leszűkítésének ezeken az intervallumokon létezik inverze.

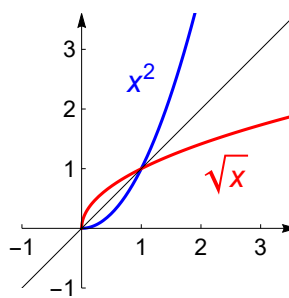
$$g: (-\infty, 0] \rightarrow [0, \infty), g(x) = x^2$$

$$g^{-1}: [0, \infty) \rightarrow (-\infty, 0], g^{-1}(x) = -\sqrt{x}$$



$$h: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), h(x) = x^2$$

$$h^{-1}: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), h^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

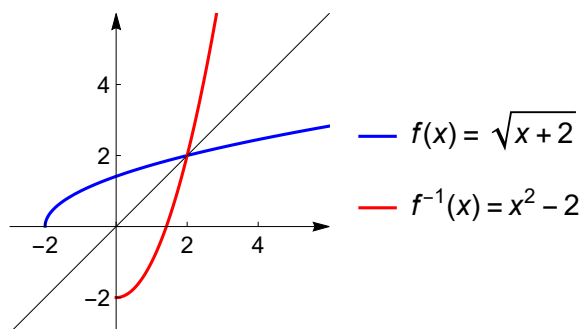


## Az inverz meghatározása

1. Adjuk meg az  $f(x) = \sqrt{x+2}$ ,  $x \geq -2$  függvény inverzét.

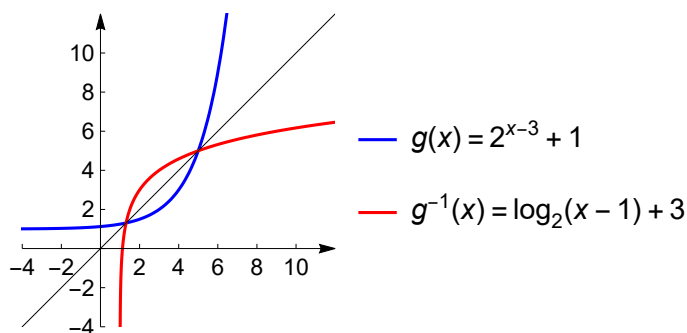
$f$  értelmezési tartománya és értékkészlete:  $D_f = [-2, \infty)$ ,  $R_f = [0, \infty)$ . A függvény szigorúan monoton növekvő a  $[-2, \infty)$  intervallumon, így létezik inverze. Az inverz meghatározásához az  $y = \sqrt{x+2}$  képletben cseréljük az  $x$ -et az  $y$ -nal, és fejezzük ki az  $y$ -t:

$$x = \sqrt{y+2} \Rightarrow x^2 = y+2 \Rightarrow y = x^2 - 2, \text{ így az inverz függvény: } f^{-1}(x) = x^2 - 2, x \in [0, \infty)$$



2. Adjuk meg a  $g(x) = 2^{x-3} + 1$  függvény inverzét.

$D_g = \mathbb{R}$ ,  $R_g = (1, \infty)$ . A függvény szigorúan monoton növekvő, így létezik inverze. Az inverz meghatározása:  $y = 2^{x-3} + 1 \Rightarrow x = 2^{y-3} + 1 \Rightarrow x - 1 = 2^{y-3} \Rightarrow y - 3 = \log_2(x - 1) \Rightarrow y = \log_2(x - 1) + 3$ , így az inverz függvény:  $g^{-1}(x) = \log_2(x - 1) + 3$ ,  $x \in (1, \infty)$



## Feladatok

### Értelmezési tartomány

Határozzuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát:

1. a)  $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 10}$       b)  $f(x) = \lg(x) / \left( \sqrt{x^2 - 10x + 21} \right)$       c)  $f(x) = \sqrt{((x-4)(x+1))/x}$   
 d)  $f(x) = \sqrt{(x(x-4)(x+1))}$       e)  $f(x) = \sqrt{(5 - |x+2|)}$       f)  $f(x) = 1/(\sqrt{(3 - |x-1|)})$
2. a)  $f(x) = \lg(x) + \sqrt{-x}$       b)  $f(x) = \sqrt{(2 + \log_3(x))}$       c)  $f(x) = \ln(x - 4/x)$   
 d)  $f(x) = \lg(2 + x - x^2)$       e)  $f(x) = \lg((x-3)/(x+2))$       f)  $f(x) = \lg(x-3) - \lg(x+2)$
3. a)  $f(x) = 1/(3 - \sqrt{2-x})$       b)  $f(x) = 1/(\lg(x) - 2)$       c)  $f(x) = \lg(5 - |1-x|)$   
 d)  $f(x) = (\sqrt{(10-x)})/\log_2(x-3)$       e)  $f(x) = \lg(2^x - 4) + \sqrt{(9-x^2)}$       f)  $f(x) = 1/\log_2((x^2+1)/2)$

### Függvény inverze

Határozzuk meg az alábbi függvények inverzét:

1.  $f(x) = 6 - \frac{3}{x+2}, x > -2$       2.  $f(x) = 3^{x+2} - 8$
3.  $f(x) = 5 \lg(x-2) + 3$       4.  $f(x) = \sqrt{x-6}, x \geq -6$

## Eredmények

### Értelmezési tartomány

1. a)  $x \leq -5$  vagy  $x \geq 2$       b)  $0 < x < 3$  vagy  $x > 7$       c)  $-1 \leq x < 0$  vagy  $x \geq 4$   
 d)  $-1 \leq x \leq 0$  vagy  $x \geq 4$       e)  $-7 \leq x \leq 3$       f)  $-2 < x < 4$
2. a)  $\emptyset$       b)  $x \geq \frac{1}{9}$       c)  $-2 < x < 0$  vagy  $x > 2$       d)  $-1 < x < 2$       e)  $x < -2$  vagy  $x > 3$       f)  $x > 3$
3. a)  $x < -7$  vagy  $-7 < x \leq 2$       b)  $0 < x < 100$  vagy  $x > 100$       c)  $-4 < x < 6$   
 d)  $3 < x < 4$  vagy  $4 < x \leq 10$       e)  $2 < x \leq 3$       f)  $x < -1$  vagy  $-1 < x < 1$  vagy  $x > 1$