

Bevezető Matematika gyakorlatok

Tartalomjegyzék

1. gyakorlat	2
1.1. Számtani és mértani sorozatok	2
1.2. Műveletek törtekkel, nevezetes azonosságok	4
2. gyakorlat	6
2.1. A hatványozás és gyökvonás	6
2.2. Logaritmus fogalma és azonosságai	7
2.3. Arány- és százalékszámítás	7

1. gyakorlat

Témák: Számtani és mértani sorozatok. Műveletek törtekkel, nevezetes azonosságok.

Segédanyag: Képletgyűjtemény, 1–2. oldal: <https://math.bme.hu/bevmat/kepletek.pdf>

További gyakorló feladatok: Bevezető matematika példatár 1.1 és 1.7 fejezet: <https://math.bme.hu/bevmat/bevmat.pdf>

Feladatok

1.1. Számtani és mértani sorozatok

Számtani sorozatok - Hasznos képletek emlékeztetőül:

- n -edik tag képlete: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$
- Tagok közötti összefüggés: $a_n = a_k + (n - k) \cdot d$
- Első n tag összege: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$
- $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

Számtani sorozatok - Bemelegítő feladatok

- a) Egy számtani sorozat harmadik tagja $a_3 = 5$, a különbsége (differenciája) $d = 6$. Számítsd ki a sorozat 12. tagját (a_{12}), emellett a sorozat első 12 tagjának az összegét (S_{10})!
- b) Egy számtani sorozatról tudjuk, hogy a harmadik tagja $a_3 = 11$, a hetedik tagja pedig $a_7 = 23$. Határozd meg a sorozat első tagját (a_1) és a különbségét (d), emellett a sorozat első 10 tagjának az összegét (S_{10})!
- c) Péter elhatározza, hogy fekvőtámaszozni fog. Az első napon 12-t csinál, majd onnantól kezdve minden nap pontosan 2-vel többet, mint az előző napon. Hány fekvőtámaszt fog csinálni Péter a 30. napon?

Mértani sorozatok - Hasznos képletek emlékeztetőül:

- n -edik tag képlete: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$
- Tagok közötti összefüggés: $b_n = b_k \cdot q^{n-k}$
- Első n tag összege ($q \neq 1$ esetén): $S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$
- $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$, ha $b_n > 0$

Mértani sorozatok - Bemelegítő feladatok

- a) Egy mértani sorozat első tagja $b_1 = 5$, a hányadosa $q = 3$. Számítsd ki a sorozat első 6 tagjának összegét (S_6)!
- b) Egy mértani sorozat második tagja $b_2 = 5$, az ötödik tagja pedig $b_5 = 40$. Határozd meg a sorozat kvóciensét (q)!
- c) Egy mértani sorozat negyedik tagja $b_4 = 54$, a hetedik tagja pedig $b_7 = 2$. Számítsd ki a sorozat kvóciensét (q)! Számítsd ki a sorozat első 10 tagjának összegét (S_{10})!

Vegyes feladatok

1. Számítsuk ki

- a) a kétjegyű páros számok összegét;
- b) a háromjegyű páratlan számok összegét.

2. Egy számtani sorozat első három tagjának az összege 30-cal kevesebb, mint a következő három tag összege. Az első hat tag összege 60. Határozzuk meg a sorozat első tagját és differenciáját.

3. Legyen (a_n) számtani sorozat, melyben $a_5 = 17$ és $a_7 = 10$. Határozzuk meg a sorozat első tagját, differenciáját, és a sorozat első nyolc tagjának összegét.

4. Egy derékszögű háromszög oldalai egy számtani sorozat egymást követő tagjai. A háromszög területe 150 cm^2 . Mekkora az oldalak?

5. Egy könyvszekrény polcain, alulról felfelé számtani sorozat szerint növekvő darabszámú könyv van. A második polcon 18, a negyedik polcon 24 könyvet találunk. Hány könyv van a szekrényben összesen, ha 12 polcból áll?

6. Az (a_n) számtani sorozat ötödik eleme 23, különbsége 4. Melyik az a legkisebb n természetes szám, amelyre az $a_n > 200$ egyenlőtlenség teljesül?

7. Legyen (a_n) számtani sorozat, melyben

$$a_1 + a_2 + a_3 = -12, \quad a_1 a_2 a_3 = 80.$$

Határozzuk meg a sorozat első három tagját.

8. Legyen (a_n) mértani sorozat, melyben

$$a_1 + a_2 + a_3 = 39, \quad a_1 a_2 a_3 = 729.$$

Határozzuk meg a sorozat első három tagját.

9. Számítsuk ki a következő összeg értékét:

$$\frac{1}{3^{11}} + \frac{1}{3^{12}} + \frac{1}{3^{13}} + \cdots + \frac{1}{3^{20}}.$$

10. Egy nem csupa pozitív tagból álló mértani sorozat harmadik tagja 4, ötödik tagja pedig 16. Mennyi lesz a sorozat első 10 elemének összege?

11. Legyen (a_n) mértani sorozat, melyben

$$a_4 - a_2 = a_2 + a_3 + a_4 = -6.$$

Mennyi a sorozat első tagja és hányadosa?

12. Egy mértani sorozat első három tagjának összege $\frac{3}{2}$, szorzata -1 . Számítsuk ki a sorozat első tagját és hányadosát.

1.2. Műveletek törtekkel, nevezetes azonosságok

Bemelegítő feladatok

Végezzük el a kijelölt műveleteket:

$$a) \left[\frac{2}{3} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} \right) \right] \cdot \left(\frac{4}{5} : \frac{8}{15} \right) \quad b) \left(\frac{7}{3} - \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \right) : \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{5} : \frac{9}{10} \right)$$

$$c) \frac{1}{2} + \left[\frac{11}{4} - \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{6} \right) \right] \cdot \frac{4}{5} \quad d) \left(\frac{4}{5} : \frac{6}{25} \right) - \left(\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{9} \right) : \frac{5}{12}$$

Nevezetes azonosságok:

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Feladatok - törtek, azonosságok

Hozzuk a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezéseket:

1.

$$a) \left(\frac{a}{b^2} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right) : \left(\frac{a^2}{b^2} - \frac{b}{a} \right) \quad b) \left(\frac{x^2 + y^2}{x - y} - x + y \right) : \left(\frac{x}{x + y} - \frac{2xy}{y^2 - x^2} \right)$$

2.

$$a) \left(\frac{a^2 - 3ab}{a + b} + b \right) : \left(\frac{a}{a + b} - \frac{b}{b - a} - \frac{2ab}{a^2 - b^2} \right) \quad b) \frac{x + y}{x^2 y^2} : \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{2}{x + y} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \right)$$

3.

$$a) (x^2 - 1) \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{1 + x} + 2 \right) \quad b) \frac{1}{x - 1} + \frac{2}{x^2 - 1} + \frac{1}{x + 1}$$

4.

$$a) \frac{x + 2}{x - 3} \left(\frac{3}{x^2 - 4} - \frac{x}{x^2 - 2x} + \frac{x + 3}{x^2 + 2x} \right) \quad b) \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} : \frac{x^2 + 6x + 9}{x^4 - 9x^2}$$

5.

$$a) \frac{(x - 1)(x^2 + 3x + 2)}{(1 - x^2)(x + 2)} \quad b) \left(\frac{1}{x^2 - 1} - \frac{1}{(x^2 - 1)(x + 2)} \right) \left(1 + \frac{2}{x} \right)$$

Számítsuk ki a következő kifejezések értékét:

7.

$$a) \frac{\sqrt{\sqrt{2} + 1} + \sqrt{\sqrt{2} - 1}}{\sqrt{\sqrt{2} + 1} - \sqrt{\sqrt{2} - 1}} \quad b) \frac{\sqrt{3}}{3 - \sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}}$$

8.

$$a) \sqrt{7 + \sqrt{40}} \cdot \sqrt{7 - 2\sqrt{10}} \quad b) \left(\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} \right)^2$$

Eredmények

Számtani és mértani sorozatok

1. a) 2430 b) 247 500
2. $a_1 = \frac{5}{3}, \quad d = \frac{10}{3}$
3. $a_1 = 31, \quad d = -\frac{7}{2}, \quad S_8 = 150$
4. 15 cm, 20 cm, 25 cm
5. 378
6. 50
7. $-10, -4, 2$ vagy $2, -4, -10$
8. 3, 9, 27 vagy 27, 9, 3
9. $\frac{3^{10} - 1}{2 \cdot 3^{20}}$
10. $-\frac{1023}{3}$
11. $a_1 = 1, \quad q = -2$
12. $a_1 = \frac{1}{2}, \quad q = -2$ vagy $a_1 = 2, \quad q = -\frac{1}{2}$

Műveletek törtekkel, nevezetes azonosságok

1. a) $\frac{1}{a-b}$ b) $2y$
2. a) $a-b$ b) $\frac{1}{x+y}$
3. a) $2x^2$ $\frac{2}{x-1}$
4. a) $\frac{2}{x(x-2)}$ b) $x(x-3)$
5. a) -1 b) $\frac{1}{x(x-1)}$
6. a) $1 + \sqrt{2}$ b) 5
7. a) 3 b) 12

2. gyakorlat

Témák: A hatványozás és gyökvonás azonosságai. A logaritmus fogalma. Arány- és százalékszámítás.

Segédanyag: Képletgyűjtemény, 1–2. oldal: <https://math.bme.hu/bevmat/kepletek.pdf>

További gyakorló feladatok: Bevezető matematika példatár 1.1 és 1.2 fejezet: <https://math.bme.hu/bevmat/bevmat.pdf>

2.1. A hatványozás és gyökvonás

Azonosságok

- Pozitív egész kitevő esetén: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ darab}} \quad (n \in \mathbb{Z}^+)$
- Első és nulladik hatvány: $a^1 = a, \quad a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$
- Negatív kitevő: $a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$ és $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n \quad (a, b \neq 0)$
- Azonos alapú hatványok szorzása: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- Azonos alapú hatványok osztása: $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad (a \neq 0)$
- Azonos kitevőjű hatványok szorzása: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
- Azonos kitevőjű hatványok osztása: $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad (b \neq 0)$
- Hatvány hatványozása: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
- n -edik gyökvonás: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \quad (a \geq 0, n \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{1\})$, speciálisan $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$
- Törtkitevős hatvány: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (a \geq 0, n \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{1\})$

Feladatok - a hatványozás és gyökvonás

Hozzuk a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezéseket:

1.

$$\text{a) } \left(\frac{a^4 b^5}{c^2 d^{-2}}\right)^3 : \left(\frac{a^3 b^7}{c^{-2} d^{-5}}\right)^2 \quad \text{b) } \left(\frac{a^{-7} b^3}{c^4 d^{-3}}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{a^{-2} b^3}{c^2 d^{-4}}\right)^3$$

2.

$$\text{a) } \frac{(x^{-3} \cdot x^7)^2 \cdot x^{-4}}{(x^{-1} \cdot x^8)^3} \cdot \frac{x}{\sqrt{x}} \quad \text{b) } \frac{\sqrt{x^{-1} \cdot x \cdot \sqrt[3]{x}}}{x}$$

3.

$$\text{a) } \frac{x^2 \sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x^7} \sqrt[4]{x^5}} \quad \text{b) } \sqrt[3]{\frac{a^8 b^{-2} c^7}{d^2}} : \frac{a^{-10} c^4}{b^5 d^5}$$

4.

$$\text{a) } \frac{\sqrt[4]{a^{12} b^{16}}}{\sqrt[3]{a^6} \sqrt[4]{b^{12}}} \quad \text{b) } \frac{\sqrt{a^4} \sqrt[5]{b^5}}{\sqrt[4]{b^3} \sqrt{a^{24}}}$$

5.

$$\text{a) } \sqrt[3]{\frac{x^2}{\sqrt{x^3} \sqrt{x}}} \sqrt[6]{x} \quad \text{b) } \sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt[6]{x^{-4} \cdot \sqrt{x^{-7}}}} \cdot \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[4]{x}}$$

2.2. Logaritmus fogalma és azonosságai

Definíció és alapvető tulajdonságok

- Logaritmus definíciója: $\log_a b = c \iff a^c = b \quad (a > 0, a \neq 1, b > 0)$
- Alap és argumentum egyezése: $\log_a a = 1$
- Egy logaritmusa: $\log_a 1 = 0$
- Speciális alapok: $\lg x = \log_{10} x$ (tízes alapú) és $\ln x = \log_e x$ (természetes alapú)

Logaritmus azonosságai

- Hatvány logaritmusa: $\log_a(x^k) = k \cdot \log_a x$
- Gyök logaritmusa: $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \cdot \log_a x$
- Identitás (alap és logaritmus alapja egyezik): $a^{\log_a x} = x$

Feladatok

1) Számítsa ki a következő logaritmusok értékét!

Minta megoldás:

$$\log_4 \frac{1}{32} = x \iff 4^x = \frac{1}{32} \iff 2^{2x} = 2^{-5} \iff x = -\frac{5}{2}$$

- | | | |
|-----------------------------------|---------------------------|---------------------------|
| a) $\log_2 4$ | b) $\log_2 8$ | c) $\log_2 \frac{1}{16}$ |
| d) $\log_2 \sqrt{2}$ | e) $\log_{\frac{1}{2}} 2$ | f) $\log_{\frac{1}{3}} 9$ |
| g) $\log_{25} \frac{1}{\sqrt{5}}$ | h) $\log_{25} 125$ | i) $\log_{\sqrt{27}} 3$ |
| j) $\lg \frac{1}{10}$ | k) $\lg 100$ | l) $\lg 0,01$ |
| m) $\ln e$ | n) $\ln e^3$ | o) $\ln \sqrt{e^3}$ |

2) Határozza meg a következő kifejezések pontos értékét!

- | | | |
|--|-------------------------------|--|
| a) $10^{\lg 3}$ | b) $2^{\log_4 9}$ | c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 6}$ |
| d) $5^{-\log_5 4}$ | e) $4^{\log_{\frac{1}{4}} 3}$ | f) $9^{\log_3 1}$ |
| g) $5^{\log_{25} 4}$ | h) $3^{\log_{\sqrt{3}} 2}$ | i) $9^{\log_3 5}$ |
| j) $\left(\frac{1}{10}\right)^{\lg 8}$ | k) $e^{\ln 6}$ | l) $\sqrt{2}^{\log_2 9}$ |

2.3. Arány- és százalékszámítás

Bemelegítő feladatok

- Egy kalap eredeti ára 5000 Ft volt, de az árát 30%-kal megemelték. Mennyi lett a kalap új ára?
- Egy kabát árát a kiárúsítás során 20%-kal csökkentették, így most 24 000 Ft-ba kerül. Mennyi volt a kabát eredeti ára az akció előtt?
- Egy cipő ára 15 000 Ft-ról 18 000 Ft-ra növekedett. Hány százalékos volt az áremelkedés?

További feladatok

- Egy 50 cm sugarú kör sugarát 10 cm-rel csökkentjük. Hány százalékkal csökken a területe?
- Egy kabát árát 20%-kal csökkentették. Hány százalékkal kell emelni ennek a kabátnak az új árát, hogy újra az eredeti árat kapjuk?

3. Gyorsan romló eper kilóját a zöldséges először 20%-kal, majd 30%-kal árazta le. Mennyit fizettünk volna egy kiló eperért eredetileg, ha a leárazások után 700 forintért vettünk egy kilót?
4. Fényszűrő lemezeket raknak egymás mögé. Az első elnyeli a ráeső fényenergia 30%-át, a második a ráeső fényenergia 50%-át, a harmadik pedig a ráeső energia 20%-át. A három lemez együttesen az eredeti fénysugár energiájának hány százalékát nyeli el?
5. Egy fenyőerdő faállománya jelenleg 8000 fa. Minden évben kivágják az állomány 20%-át, de ültetnek 800 új fát is. Feltéve, hogy az állomány egyéb okból nem változik, hány fából állt a faállomány két évvel ezelőtt?
6. Lola, az elefánt, ha nagyon szomjas, akkor testtömegének 84%-a víz. Itatás után 1600 kg-ot nyom, és ekkor testtömegének 85%-a víz. Hány kg-os Lola, amikor nagyon szomjas?
7. A ló 1 hónap alatt eszik meg egy kocsi szénát, a kecske 2 hónap alatt, a juh 3 hónap alatt. Hány hónap alatt eszik meg egy kocsi szénát a ló, a kecske és a juh együtt?
8. 100 literes tartályba egy csapon át 10%-os oldat folyik 5 liter/perc sebességgel. 5 perc elteltével egy másik csapot is kinyitnak, amelyből már 20%-os oldat folyik 10 liter/perc sebességgel. Hány százalékos lesz az oldat akkor, amikor a két csap feltölti a teljes tartályt?

Eredmények

A hatványozás és gyökvonás azonosságai

1. a) $a^6bc^{-10}d^{-4}$ b) $ac^{-2}d^9$
2. a) $x^{-\frac{33}{2}}$ b) $x^{-\frac{5}{6}}$
3. a) $x^{-\frac{4}{3}}$ b) a^6bcd
4. a) ab^3 b) $a^{-1}b^{\frac{1}{2}}$
5. a) $x^{\frac{1}{4}}$ b) $x^{\frac{3}{2}}$

A logaritmus fogalma

- | | | | | | |
|----|-------|-------------------|------------------|------------------|------------------|
| 1. | a) 2 | b) 3 | c) -4 | d) $\frac{1}{2}$ | e) -1 |
| | f) -2 | g) $-\frac{1}{4}$ | h) $\frac{3}{2}$ | i) $\frac{2}{3}$ | j) -1 |
| | k) 2 | l) -2 | m) 1 | n) 3 | o) $\frac{3}{2}$ |
| 2. | a) 3 | b) 3 | c) $\frac{1}{6}$ | d) $\frac{1}{4}$ | e) $\frac{1}{3}$ |
| | f) 1 | g) 2 | h) 4 | i) 25 | j) $\frac{1}{8}$ |
| | k) 6 | l) 3 | | | |

Arány- és százalékszámítás

1. 36%
2. 25%
3. 1250 Ft
4. az eredeti fényenergia 72%-át
5. 10 250

6. 1500 kg

7. $\frac{6}{11}$ hónap

8. 15%